

УДК 532.3, 517.933

© *Е. В. Ветчанин, И. С. Мамаев*

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УПРАВЛЕНИЙ ВОДНОГО РОБОТА НЕИЗМЕННОЙ ФОРМЫ

Рассмотрена модель, описывающая движение водного робота с корпусом в форме симметричного крылового профиля NASA0040. Управление движением осуществляется с помощью периодических колебаний ротора. Численно показано, что при физически допустимых значениях параметров управления в фазовом пространстве системы существует только один предельный цикл. Предельный цикл, возникающий при симметричном управлении, соответствует в среднем направленному продвижению робота. В случае несимметричных управлений реализуется движение вблизи окружности. Предложен алгоритм управления курсом движения робота, использующий обнаруженные предельные циклы и переходные процессы между ними.

Ключевые слова: движение в жидкости, водный робот, алгоритм управления, предельные циклы.

DOI: [10.35634/vm220410](https://doi.org/10.35634/vm220410)

Введение

Одним из направлений в современной робототехнике является построение математических моделей, а также конструирование и изучение динамики роботов с внутренними механизмами. Например, различных сферороботов [3, 4, 21] и водных роботов [15, 20]. Для таких устройств оказывается нетривиальной задача управления движением, для решения которой, вообще говоря, могут использоваться различные подходы.

Одним из классических подходов, применяемых в динамике роботов, является построение управлений с обратной связью. Данный метод обычно применяется для подавления внешних возмущений и неустойчивости. Например, в работах [12–14] обратная связь применялась для стабилизации движения сферических роботов. В работе [6] рассматривалась задача стабилизации перевернутого маятника на колесной платформе. В работе [2] обратная связь применялась для стабилизации движения кругового профиля вокруг неподвижного источника переменной интенсивности.

Другой подход к решению задач управления связан с поиском управляющих воздействий в классе некоторых функций, в частности, периодических. В работе [22] рассмотрена задача стабилизации вращений твердого тела с неподвижной точкой за счет периодического изменения моментов инерции. Аналогичная задача, но для сферических роботов изучалась в работах [7, 18]. Колесные системы с периодическими управлениями были рассмотрены в работах [8–11, 19]. Траекторное управление движением сферического робота под действием периодического возмущения, создаваемого вибрирующей плоскостью, изучалось в работе [16]. В работе [17] изучалось влияние периодических движений опорной поверхности на устойчивость частных движений сфероробота.

В данной работе мы изучаем движение водного робота с внутренним ротором на основе математической модели, предложенной в работе [15]. В § 1 описана математическая модель и форма управляющего воздействия. В § 2 изучаются предельные циклы системы и переходные процессы, возникающие при изменении параметров управляющего воздействия. В § 3 предельные циклы системы и переходные процессы используются для реализации элементарных маневров: направленного продвижения и поворотов.

§ 1. Математическая модель

1.1. Уравнения движения. Рассмотрим движение надводного робота, корпус которого имеет форму симметричного крылового профиля НАСА0040 (см. рис. 1). Устройство, по-

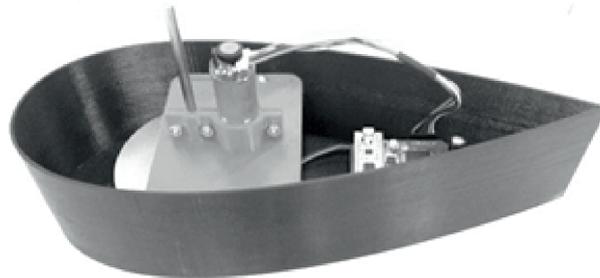


Рис. 1. Натурный образец рыбоподобного робота

казанное на рис. 1, управляется вращением массивного маховика и обладает следующими массовыми характеристиками (см. табл. 1):

Таблица 1. Массовые характеристики робота

Масса робота, m	0.905, кг
Центральный момент инерции робота, I	0.00844, кг·м ²
Масса ротора, m_r	0.327, кг
Центральный момент инерции ротора, I_r	0.00058, кг·м ²

Для описания плоскопараллельного движения данного робота введем две системы координат (см. рис. 2): неподвижную OXY и подвижную Cx_1x_2 , жестко связанную с корпусом робота. Будем предполагать, что ось Cx_1 совпадает с осью симметрии робота, а начало подвижной системы координат совпадает с центром масс системы.

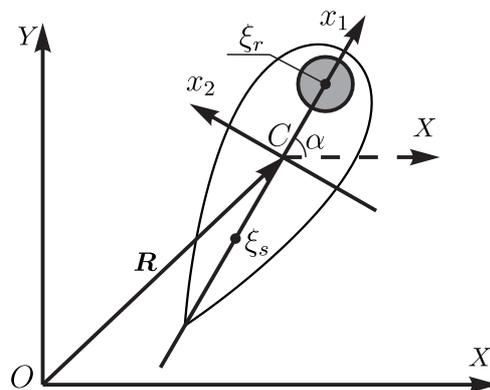


Рис. 2. OXY — неподвижная система координат, Cx_1x_2 — подвижная система координат

С учетом выбора систем координат полная система уравнений, описывающая движение рассматриваемого устройства, может быть записана в следующей форме [15]:

$$\begin{aligned}
 (m + \lambda_{11}^{(1)})\dot{v}_1 &= (m + \lambda_{22}^{(1)})v_2\omega + \lambda_{23}^{(1)}\omega^2 - c_1v_1|v_1|, \\
 (m + \lambda_{22}^{(2)})\dot{v}_2 + \lambda_{23}^{(2)}\dot{\omega} &= -(m + \lambda_{11}^{(2)})v_1\omega - c_2v_2|v_2|, \\
 \lambda_{23,i}^{(3)}\dot{v}_2 + (I + \lambda_{33}^{(3)})\dot{\omega} &= (\lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)})v_1v_2 - \lambda_{23,r}^{(3)}v_1\omega - c_3\omega|\omega| - \dot{k}(t), \\
 \dot{X} &= v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha, \quad \dot{Y} = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, \quad \dot{\alpha} = \omega,
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

$$\tag{1.2}$$

где v_1, v_2 — проекции вектора поступательной скорости точки C на оси подвижной системы координат, ω — угловая скорость робота, $k = I_r \Omega(t)$ — гиросtatический момент ротора, Ω — угловая скорость ротора. Коэффициенты λ_{ij}^k имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{(1)} &\approx 0.3087, & \lambda_{22}^{(1)} &\approx -0.5796, & \lambda_{23}^{(1)} &\approx 0.039085, \\ \lambda_{22}^{(2)} &\approx 2.0996, & \lambda_{23}^{(2)} &\approx 0.17629, & \lambda_{11}^{(2)} &\approx -7.9826, \\ \lambda_{23,l}^{(3)} &\approx 0.083474, & \lambda_{33}^{(2)} &\approx 0.018935, & \lambda_{11}^{(3)} - \lambda_{22}^{(3)} &\approx -4.7550, & \lambda_{23,r}^{(3)} &\approx 1.4488, \\ c_1 &= 0.04715, & c_2 &= 17.702, & c_3 &= 0.092872. \end{aligned}$$

Отметим, что подсистема (1.1), описывающая эволюцию поступательной и угловой скорости, отделяется от полной системы (1.1), (1.2).

1.2. Выбор управляющего воздействия. Уравнения движения (1.1) содержат производную гиросtatического момента ротора или, что то же самое, угловое ускорение ротора $\dot{\Omega}$. Таким образом, вращение ротора с постоянной скоростью равносильно движению системы с неподвижным ротором. Кроме того, изменение угловой скорости ротора на постоянную величину $\Omega \rightarrow \Omega + \text{const}$ не изменяет форму уравнений движения (1.1).

Наиболее простым с технической точки зрения способом управления является чередование равномерного и равноускоренного вращения ротора, как это было предложено в работах [5, 15]. В частности, мы будем использовать следующий закон вращения ротора:

$$\Omega(t) = \begin{cases} \Omega_{\max}, & t \in [nT, nT + t_1), \\ \Omega_{\text{acc1}}(t), & t \in [nT + t_1, nT + t_1 + t_2), \\ -\Omega_{\max}, & t \in [nT + t_1 + t_2, nT + t_1 + t_2 + t_3), \\ \Omega_{\text{acc2}}(t), & t \in [nT + t_1 + t_2 + t_3, nT + t_1 + t_2 + t_3 + t_4), \end{cases}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = T,$$

$$\Omega_{\text{acc1}}(t) = \Omega_{\max} - \frac{2\Omega_{\max}}{t_2} (t - nT - t_1),$$

$$\Omega_{\text{acc2}}(t) = -\Omega_{\max} + \frac{2\Omega_{\max}}{t_4} (t - nT - t_1 - t_2 - t_3),$$

где Ω_{\max} — постоянная величина, задающая максимальную скорость вращения ротора, t_1, t_3 — длины временных промежутков равномерного вращения ротора, t_2, t_4 — длины временных промежутков равноускоренного вращения ротора. Отметим, что в численных и натуральных экспериментах предполагается, что

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = T = \text{const}.$$

Графическое представление закона (1.2), показано на рис. 3, а. Для выбранного закона вращения ротора управляющее воздействие — гиросtatический момент — $\dot{k}(t)$ является кусочно-постоянным, см. рис. 3, б.

Замечание 1. Кусочно-постоянные управления в ряде случаев оказываются удобными для аналитического исследования. В частности, в книге [1] такой подход использовался для изучения параметрического резонанса.

Отметим, что используемый в натурном образце двигатель позволяет развивать скорость вращения ротора до $\Omega_{\max} \leq 50 \text{ с}^{-1}$, при этом время равноускоренного движения составляет не менее 0.3 с. В численных примерах, описанных ниже, указанное техническое ограничение приниматься во внимание не будет.

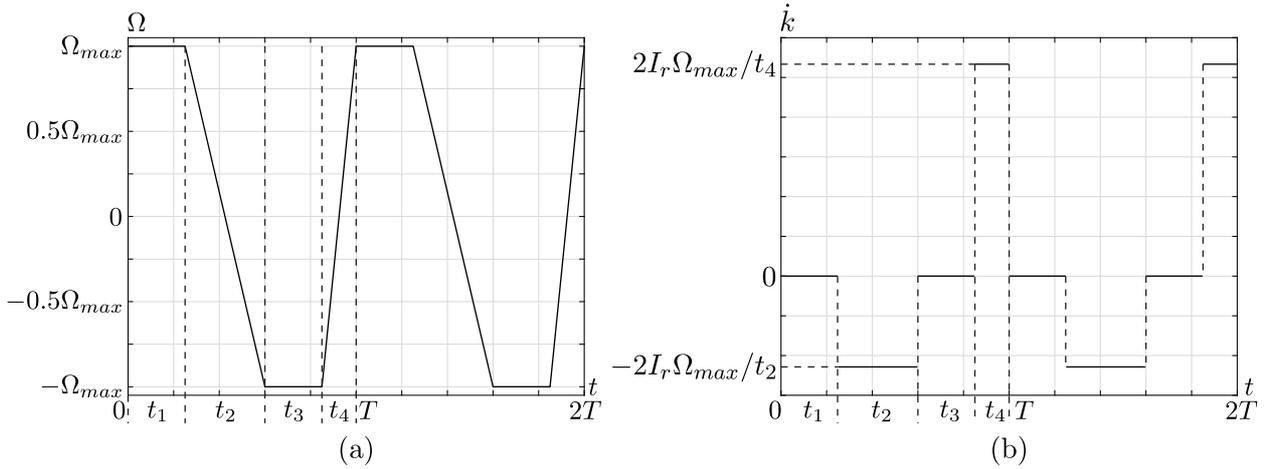


Рис. 3. (а) Зависимость (1.2) изменения угловой скорости ротора от времени; (б) соответствующая закону (1.2) зависимость управляющего воздействия \dot{k} от времени

§ 2. Асимптотически устойчивые периодические решения как стандартные маневры

Рассматриваемая в данной работе система (1.1) является типичной автоколебательной системой с периодическим возбуждением. Естественно ожидать, что уравнения (1.1) допускают возникновение асимптотически устойчивых периодических и, возможно, квазипериодических и хаотических решений. Численные эксперименты показывают, что в рамках рассматриваемой математической модели при физически допустимых значениях управляющего воздействия (и даже в случае некоторого превышения технических ограничений) существуют устойчивые режимы движения, которые могут использоваться в качестве стандартных маневров для продвижения и выполнения поворотов робота. Поскольку используемое в данной работе управление является периодическим, то для анализа динамики удобно использовать отображение за период (стробоскопическое отображение Пуанкаре). В частности, с помощью отображения будем искать предельные циклы, которые могут быть использованы для осуществления упомянутых выше маневров.

2.1. Неподвижные точки отображения Пуанкаре. Численный анализ уравнений (1.1) показывает, что при физически допустимых управлениях в фазовом пространстве системы существует единственный предельный цикл. Каждый из предельных режимов движения характеризуется средними значениями поступательной и угловой скоростей:

$$\langle v \rangle = \frac{\sqrt{(X_{n+1} - X_n)^2 + (Y_{n+1} - Y_n)^2}}{T}, \quad X_n = X(nT), \quad Y_n = Y(nT),$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{T}, \quad \alpha_n = \alpha(nT).$$

Средние значения поступательной и угловой скоростей при различных $t_2 = t_4$ и Ω_{max} приведены на рис. 4 и 5. На данных рисунках ось абсцисс соответствует разности $t_1 - t_3$, диапазон изменения которой задается неравенством: $|t_1 - t_3| \leq T - t_2 - t_4$. Из рис. 4 и 5 видно, что возможны два типа движения робота.

1. В случае симметричного закона управления (при $t_1 = t_3$) робот движется в среднем прямолинейно с некоторой скоростью $\langle v \rangle \neq 0$ и $\langle \omega \rangle = 0$.
2. В случае несимметричного закона управления (при $t_1 \neq t_3$) среднее движение робота соответствует движению по окружности, радиус которой приближенно вычисляется

как:

$$R \approx \frac{\langle v \rangle}{\langle \omega \rangle}.$$

Кроме того, при смене знака $t_1 - t_3$ на противоположный (или, что то же самое, при замене $t_1 \leftrightarrow t_3$), происходит смена направления поворота на противоположное. При этом радиус окружности и скорость ее прохождения не изменяются.

Замечание 2. Предельный случай $t_1 = t_2 = t_4 = 0$, $t_3 = T$ и $t_3 = t_2 = t_4 = 0$, $t_1 = T$ соответствуют свободному движению робота. Вследствие вязкого квадратичного трения все траектории уравнений движения (1.1) за конечное время приходят к состоянию покоя $v_1 = v_2 = 0$, $\omega = 0$.

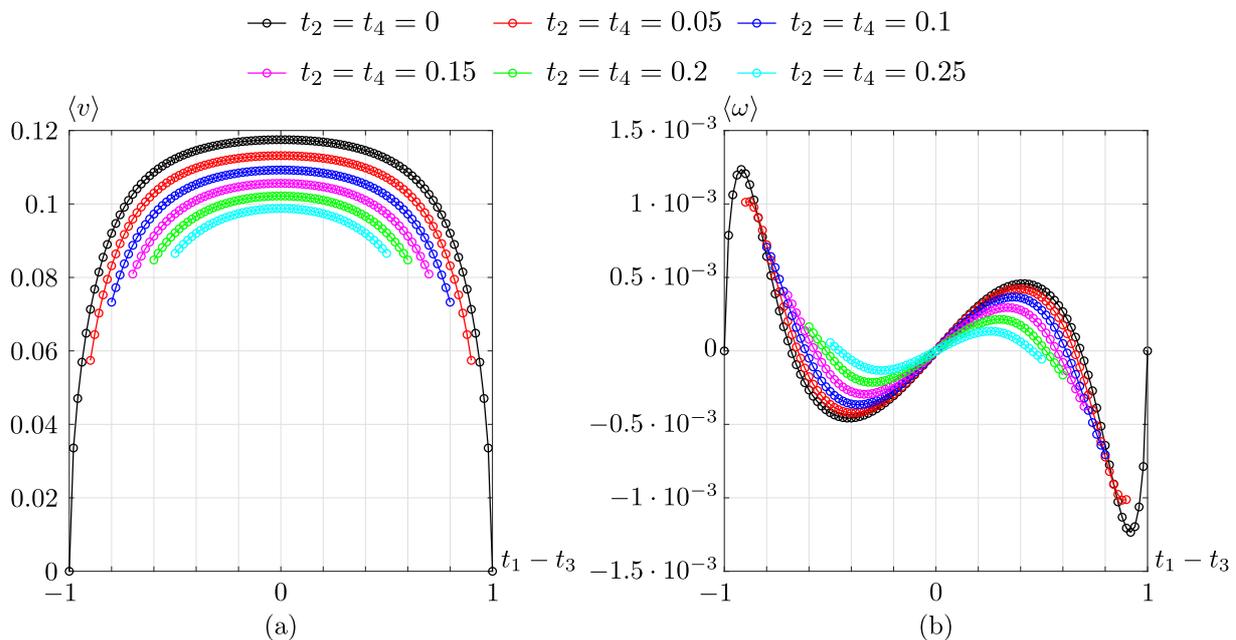


Рис. 4. (а) Величина средней поступательной скорости $\langle v \rangle$ и (б) величина средней угловой скорости $\langle \omega \rangle$ в зависимости от $t_1 - t_3$. Предельное значение угловой скорости вращения ротора: $\Omega_{\max} = 10$

На рис. 6 показаны зависимости фазовых переменных v_1 , v_2 , ω от времени для предельного цикла, возникающего в системе при $\Omega_{\max} = 10$, $t_1 = t_3 = 0.45$, $t_2 = t_4 = 0.05$. Данному предельному циклу соответствует неподвижная точка отображения за период:

$$v_1 \approx 0.113296, \quad v_2 \approx 0.030518, \quad \omega \approx -0.435829.$$

При этом реализуется в среднем направленное движение со скоростью $\langle v \rangle \approx 0.113155$, см. рис. 7.

На рис. 8 показаны зависимости фазовых переменных v_1 , v_2 , ω от времени для предельного цикла, возникающего в системе при $\Omega_{\max} = 10$, $t_1 = 0.25$, $t_3 = 0.65$, $t_2 = t_4 = 0.05$. Данному предельному циклу соответствует неподвижная точка отображения за период:

$$v_1 \approx 0.109843, \quad v_2 \approx 0.027639, \quad \omega \approx -0.438046.$$

При этом реализуется движение вблизи окружности радиуса $R \approx 260.051$ со средней поступательной скоростью $\langle v \rangle \approx 0.109803$ и средней угловой скоростью $\langle \omega \rangle = -0.000422$, см. рис. 9. Таким образом, реализуется поворот робота направо.

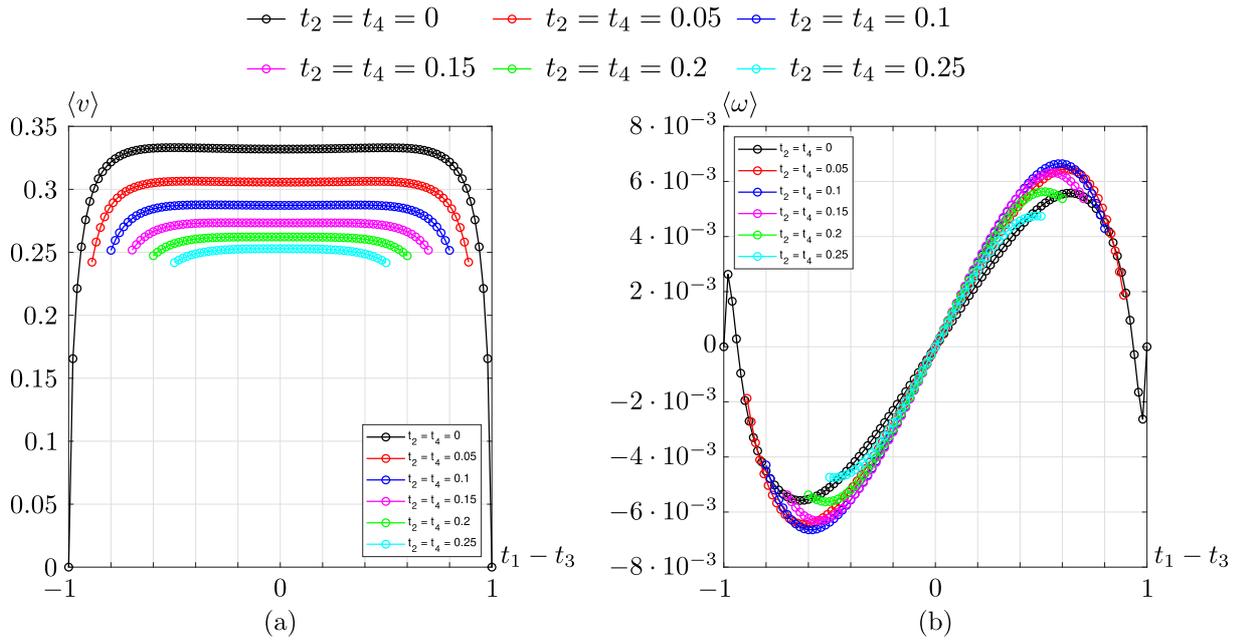


Рис. 5. (а) Величина средней поступательной скорости $\langle v \rangle$ и (б) величина средней угловой скорости $\langle \omega \rangle$ в зависимости от $t_1 - t_3$. Предельное значение угловой скорости вращения ротора: $\Omega_{\max} = 50$

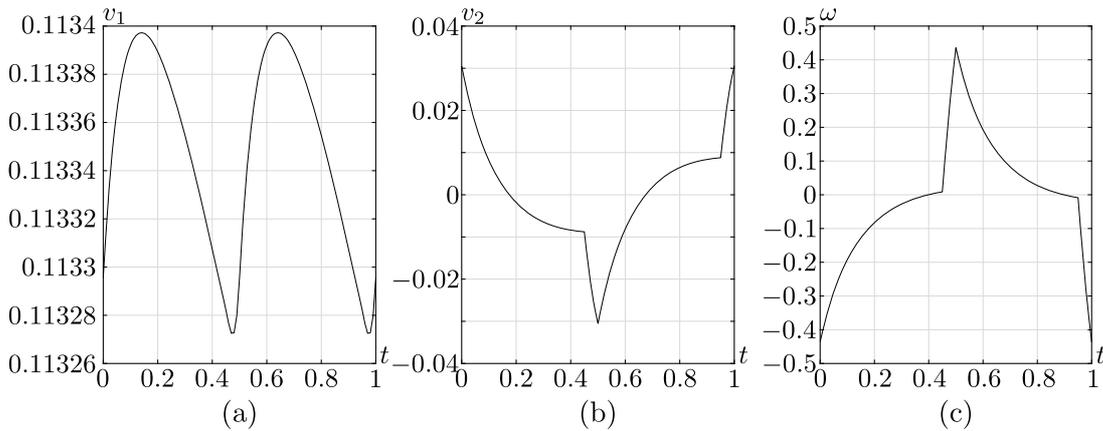


Рис. 6. Зависимость фазовых переменных: (а) v_1 ; (б) v_2 ; (с) ω от времени на предельном цикле, возникающем при $\Omega_{\max} = 10, t_1 = t_3 = 0.45, t_2 = t_4 = 0.05$

Отметим, что при $\Omega_{\max} = 10, t_1 = 0.65, t_3 = 0.25, t_2 = t_4 = 0.05$ возникает движение аналогичное, показанному на рис. 9, но с поворотом налево.

Описанные в данном параграфе режимы движения фактически реализуют элементарные маневры, соответствующие направленному продвижению и поворотам. Таким образом, можно предположить, что переключая управление с симметричного ($t_1 = t_3 = 0.45, t_2 = t_4 = 0.05$) на несимметричное ($t_1 = 0.25, t_3 = 0.65, t_2 = t_4 = 0.05$) после некоторого переходного процесса будет осуществляться поворот направо. При обратном переключении с несимметричного управления на симметричное, также после переходного процесса, робот будет двигаться в среднем направленно.

Далее исследуем переходные процессы, сопровождающие переключение управления с симметричного на несимметричное и обратно.

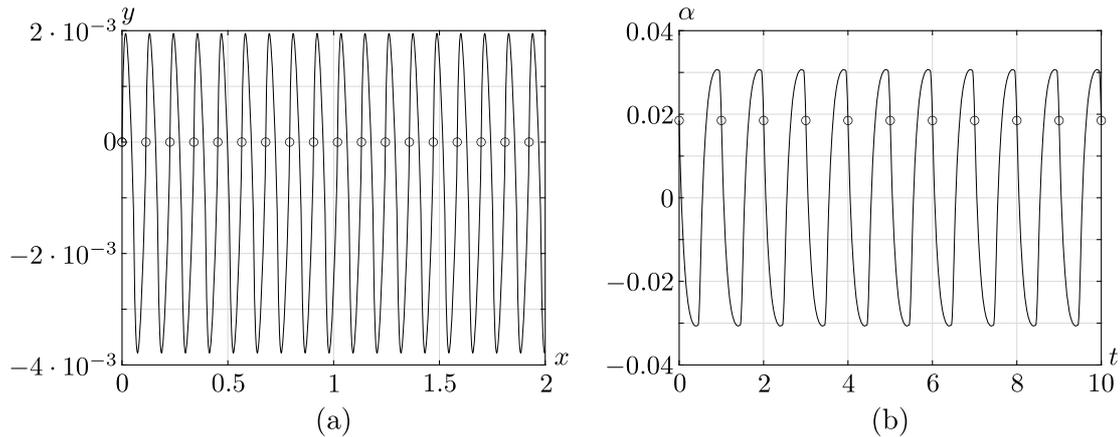


Рис. 7. (a) Траектория движения робота и (b) зависимость угла поворота α от времени при $\Omega_{\max} = 10$, $t_1 = t_3 = 0.45$, $t_2 = t_4 = 0.05$. Начальные условия: $X(0) = Y(0) = 0$, $\alpha(0) = 0.018526567212873$. Маркерами отмечены положение робота и его ориентация в конце каждого периода

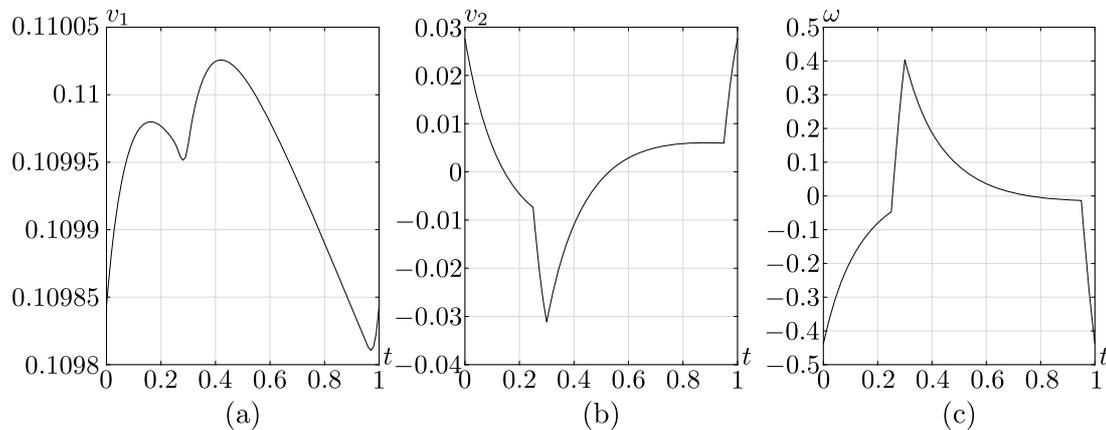


Рис. 8. Зависимость фазовых переменных: (a) v_1 ; (b) v_2 ; (c) ω от времени на предельном цикле, возникающем при $\Omega_{\max} = 10$, $t_1 = 0.25$, $t_3 = 0.65$, $t_2 = t_4 = 0.05$

2.2. Переходные процессы между предельными циклами. Для численного изучения переходных процессов, возникающих при изменении управляющего воздействия рассмотрим ряд примеров. Зафиксируем следующие параметры управляющего воздействия: $\Omega_{\max} = 10$ и $t_2 = t_4 = 0.05$, а для реализации элементарных маневров выберем следующие значения t_1 и t_3 .

1. Направленное движение. Значения t_1 , t_3 и неподвижная точка отображения, соответствующая предельному циклу:

$$t_1 = t_3 = 0.45, \quad (2.1)$$

$$v_1^{fw} = 0.113296, \quad v_2^{fw} = 0.030518, \quad \omega^{fw} = -0.435829. \quad (2.2)$$

2. Поворот налево. Значения t_1 , t_3 и неподвижная точка отображения, соответствующая предельному циклу:

$$t_1 = 0.65, \quad t_3 = 0.25, \quad (2.3)$$

$$v_1^l = 0.109963, \quad v_2^l = 0.031129, \quad \omega^l = -0.403153. \quad (2.4)$$

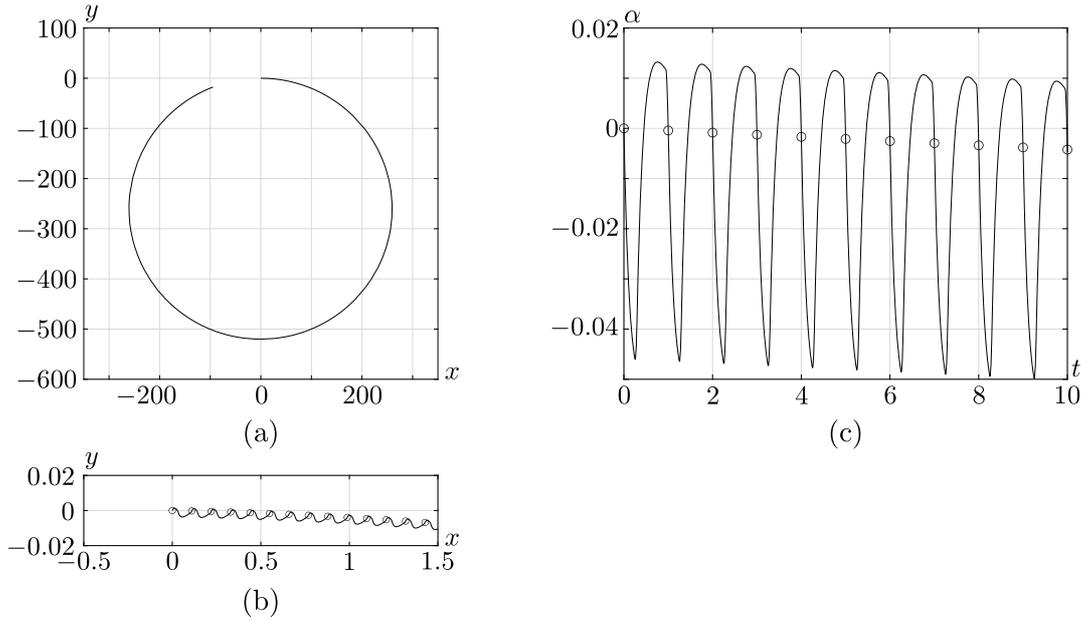


Рис. 9. (a) Траектория движения робота; (b) ее увеличенный фрагмент; (c) зависимость угла поворота α от времени при $\Omega_{\max} = 10$, $t_1 = 0.25$, $t_3 = 0.65$, $t_2 = t_4 = 0.05$. Начальные условия: $X(0) = Y(0) = 0$, $\alpha(0) = 0$. Маркерами отмечены положение робота и его ориентация в конце каждого периода

3. Поворот направо. Значения t_1 , t_3 и неподвижная точка отображения, соответствующая предельному циклу:

$$t_1 = 0.25, \quad t_3 = 0.65, \tag{2.5}$$

$$v_1^r = 0.109843, \quad v_2^r = 0.027639, \quad \omega^r = -0.438046. \tag{2.6}$$

Далее будем с управления (2.1) переключаться на управление (2.3) на N_1 периодов. При этом начнется переходный процесс от неподвижной точки (2.2) к неподвижной точке (2.4). После N_1 периодов переключимся обратно на управление (2.1), при этом начнется обратный переходный процесс к неподвижной точке (2.2), соответствующей прямолинейному движению. В зависимости от количества периодов N_1 значение угла α изменится на некоторую величину $\Delta\alpha$. Аналогично можно рассмотреть переходный процесс от неподвижной точки (2.8) к неподвижной точке (2.12). Зависимости v_1 , v_2 , ω и $\Delta\alpha$ для описанных переходных процессов от номера периода n показаны на рис. 10 и 11 для поворотов налево и направо соответственно при различных N_1 .

Из рис. 10 и 11 видно, что для изменения ориентации робота на угол $\Delta\alpha$ необходимо выбрать величину N_1 подходящим образом и определить количество периодов N_2 необходимых для завершения обратного переходного процесса. В качестве критерия для вычисления N_2 использовалось условие:

$$\max \left(\left| \frac{v_1 - v_1^{fw}}{v_1^{fw}} \right|, \left| \frac{v_2 - v_2^{fw}}{v_2^{fw}} \right|, \left| \frac{\omega - \omega^{fw}}{\omega^{fw}} \right| \right) < 10^{-4}.$$

Зависимости $\Delta\alpha$ и N_2 от количества периодов N_1 показана на рис. 12.

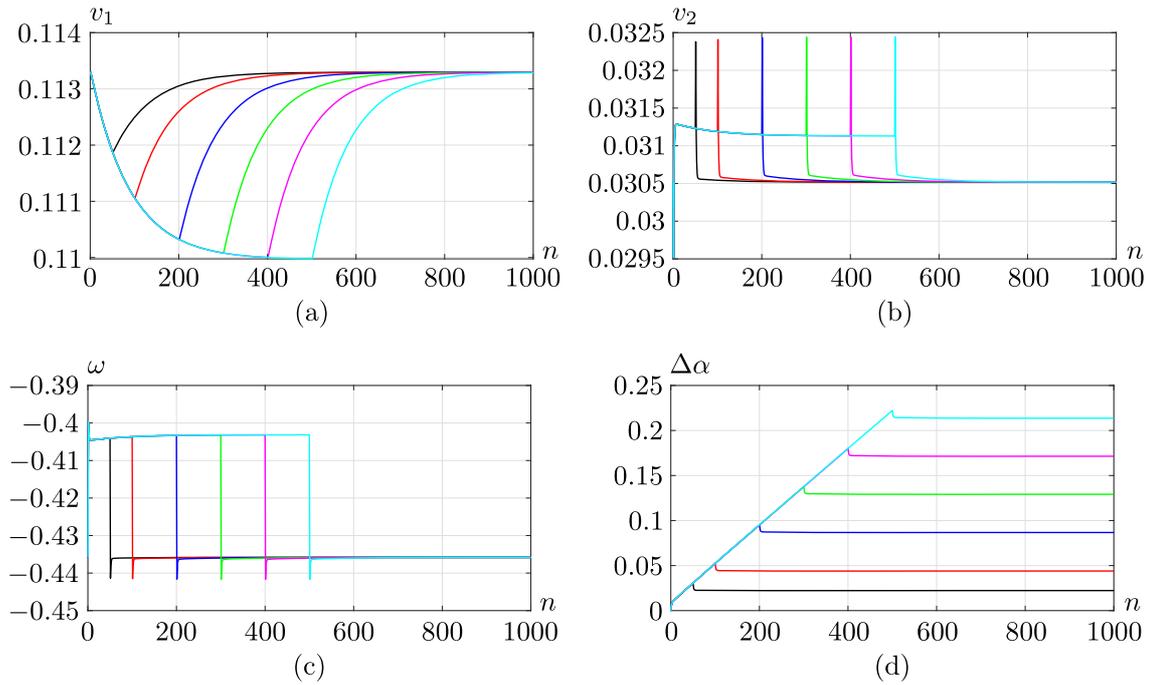


Рис. 10. Зависимости: (a) v_1 ; (b) v_2 ; (c) ω ; (d) $\Delta\alpha$ от номера периода n для различных N_1 при осуществлении поворота налево. Значения параметров управления $\Omega_{\max} = 10$, $t_2 = t_4 = 0.05$ и (2.1), (2.3) и неподвижные точки (2.2), (2.4)

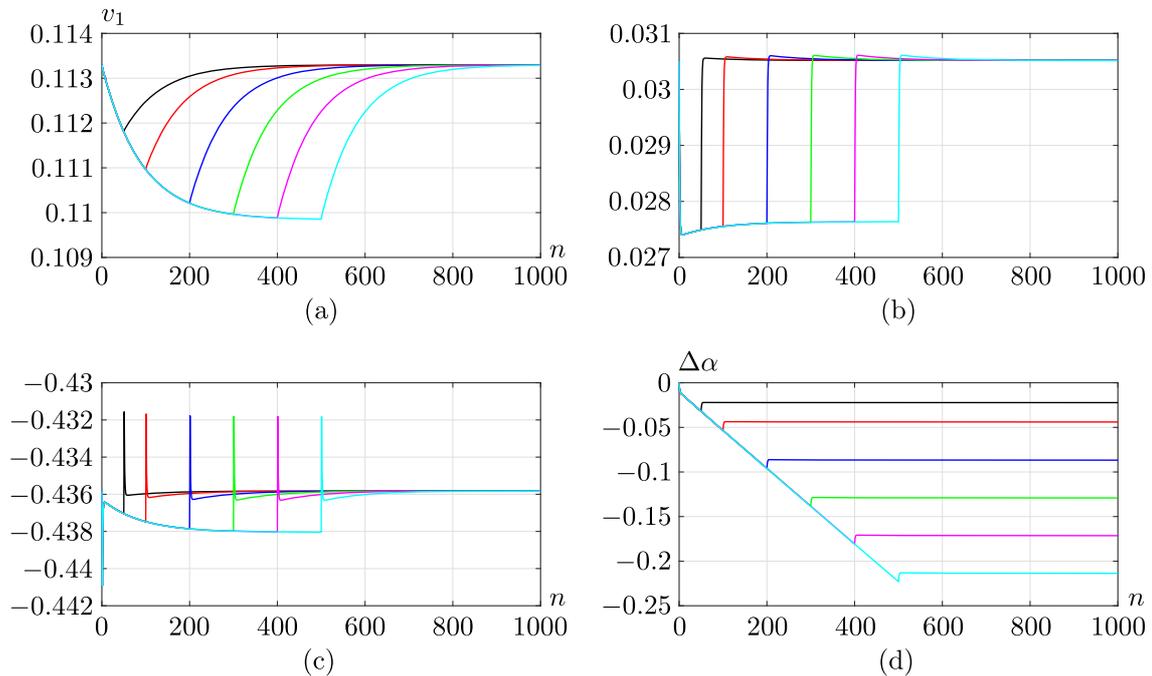


Рис. 11. Зависимости: (a) v_1 ; (b) v_2 ; (c) ω ; (d) $\Delta\alpha$ от номера периода n для различных N_1 при осуществлении поворота направо. Значения параметров управления $\Omega_{\max} = 10$, $t_2 = t_4 = 0.05$ и (2.1), (2.5) и неподвижные точки (2.2), (2.6)

Зависимости, аналогичные показанным на рис. 10, 11, 12 могут быть построены и для других параметров управления. Например, для $\Omega_{\max} = 50$ и $t_2 = t_4 = 0.05$ будем использовать следующие значения t_1, t_3 и соответствующие им неподвижные точки отображения.

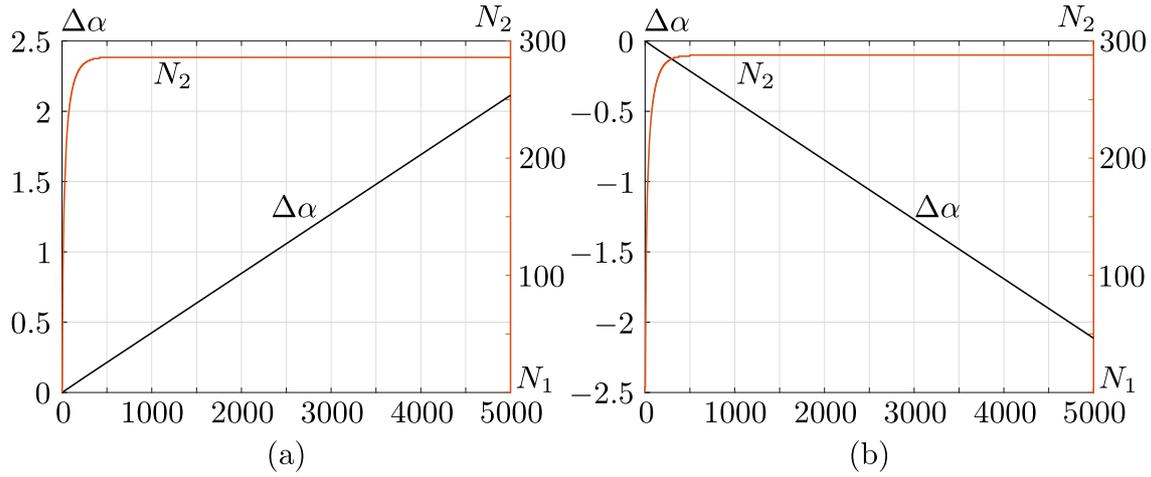


Рис. 12. Зависимости $\Delta\alpha$ и N_2 от количества периодов N_1 при повороте: (а) налево; (б) направо. Значения параметров управления $\Omega_{\max} = 10$, $t_2 = t_4 = 0.05$ и (2.1), (2.3), (2.5) и неподвижные точки (2.2), (2.4), (2.6)

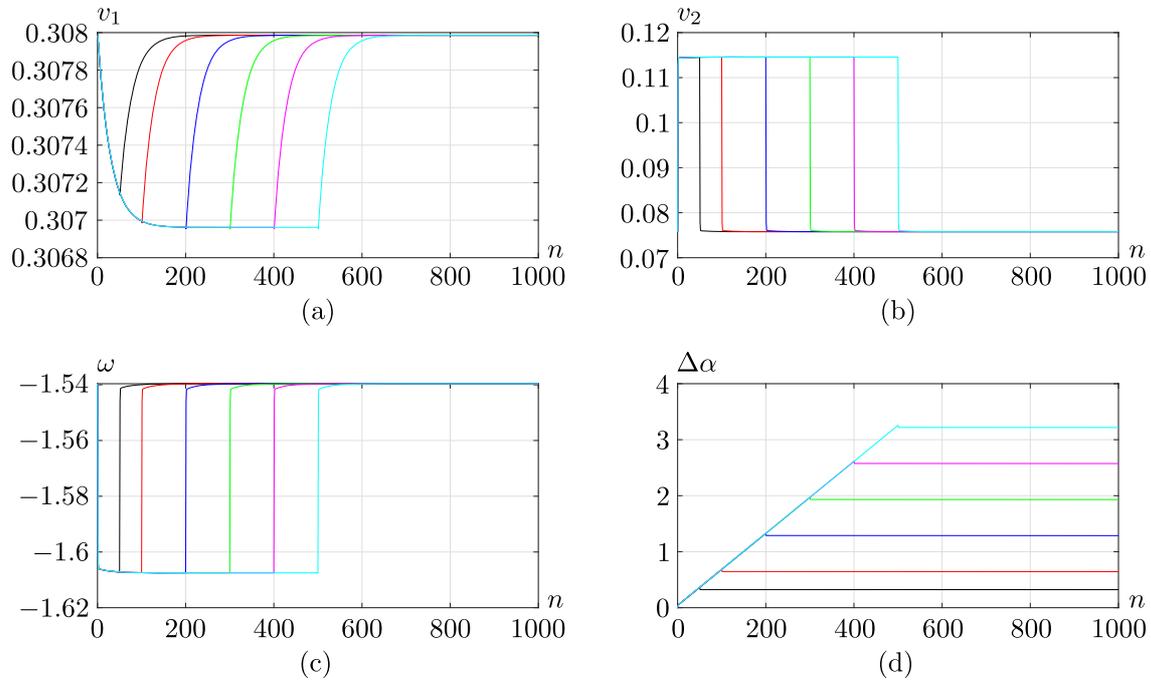


Рис. 13. Зависимости: (а) v_1 ; (б) v_2 ; (с) ω ; (д) $\Delta\alpha$ от номера периода n для различных N_1 при осуществлении поворота налево. Значения параметров управления $\Omega_{\max} = 50$, $t_2 = t_4 = 0.05$ и (2.7), (2.9) и неподвижные точки (2.2), (2.10).

1. Направленное движение. Значения t_1, t_3 и неподвижная точка отображения, соответствующая предельному циклу:

$$t_1 = t_3 = 0.45, \tag{2.7}$$

$$v_1^{fw} = 0.307986, \quad v_2^{fw} = 0.075781, \quad \omega^{fw} = -1.539614. \tag{2.8}$$

2. Поворот налево. Значения t_1, t_3 и неподвижная точка отображения, соответствующая

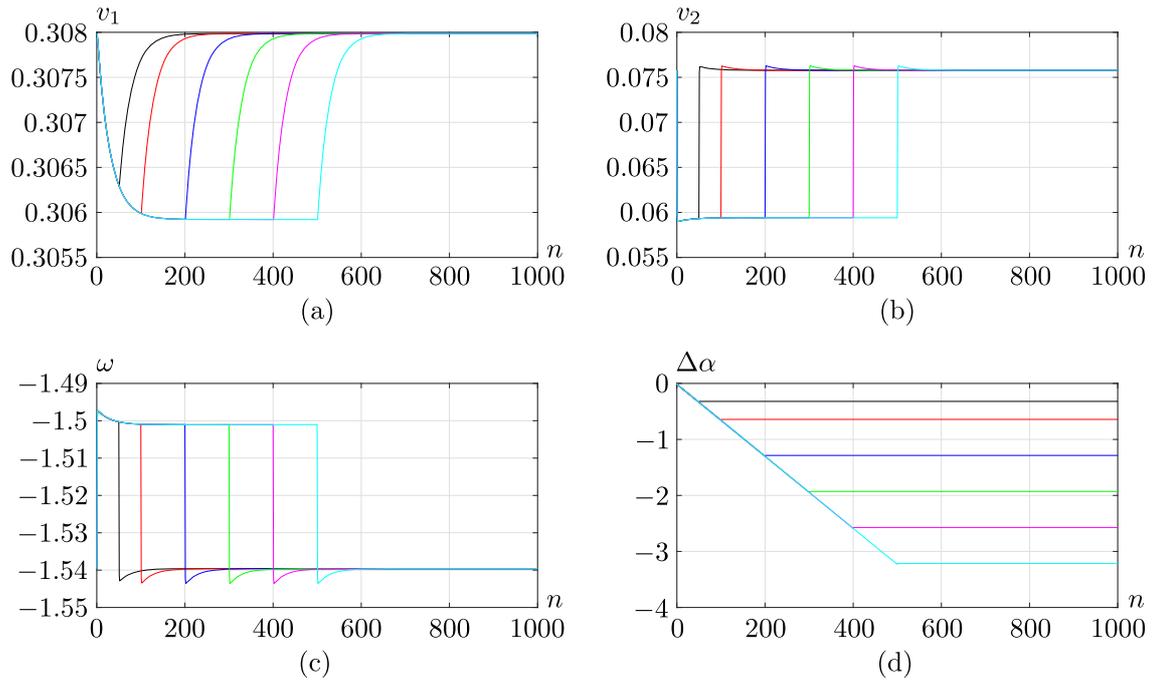


Рис. 14. Зависимости: (а) v_1 ; (б) v_2 ; (с) ω ; (д) $\Delta\alpha$ от номера периода n для различных N_1 при осуществлении поворота направо. Значения параметров управления $\Omega_{\max} = 50$, $t_2 = t_4 = 0.05$ и (2.7), (2.11) и неподвижные точки (2.8), (2.12)

предельному циклу:

$$t_1 = 0.75, \quad t_3 = 0.15, \quad (2.9)$$

$$v_1^l = 0.306962, \quad v_2^l = 0.114570, \quad \omega^l = -1.607500. \quad (2.10)$$

3. Поворот направо. Значения t_1, t_3 и неподвижная точка отображения, соответствующая предельному циклу:

$$t_1 = 0.15, \quad t_3 = 0.75, \quad (2.11)$$

$$v_1^r = 0.305922, \quad v_2^r = 0.059408, \quad \omega^r = -1.501048. \quad (2.12)$$

Переходные процессы для неподвижных точек отображения (2.8), (2.10), (2.12) и изменение угла $\Delta\alpha$ показаны на рис. 13 и 14. Зависимости $\Delta\alpha$ и N_2 от количества периодов N_1 показаны на рис. 15.

Таким образом, для управления движением робота достаточно выбрать три элементарных маневра (предельных цикла), задающие направленное движение, поворот налево и поворот направо. Для выбранных маневров рассчитать зависимости $\Delta\alpha(N_1)$ и $N_2(N_1)$, с помощью которых для заданного угла поворота $\Delta\alpha^*$ будем определять количество периодов $N_1 + N_2$, необходимых для осуществления маневра.

§3. Пример управления движением робота

Поскольку уравнения движения периодически зависят от времени, то при реализации алгоритма управления будем рассматривать отображение за период:

$$\Pi: (v_1, v_2, \omega, X, Y, \alpha) \Big|_{t=nT} \rightarrow (v_1, v_2, \omega, X, Y, \alpha) \Big|_{t=(n+1)T}.$$

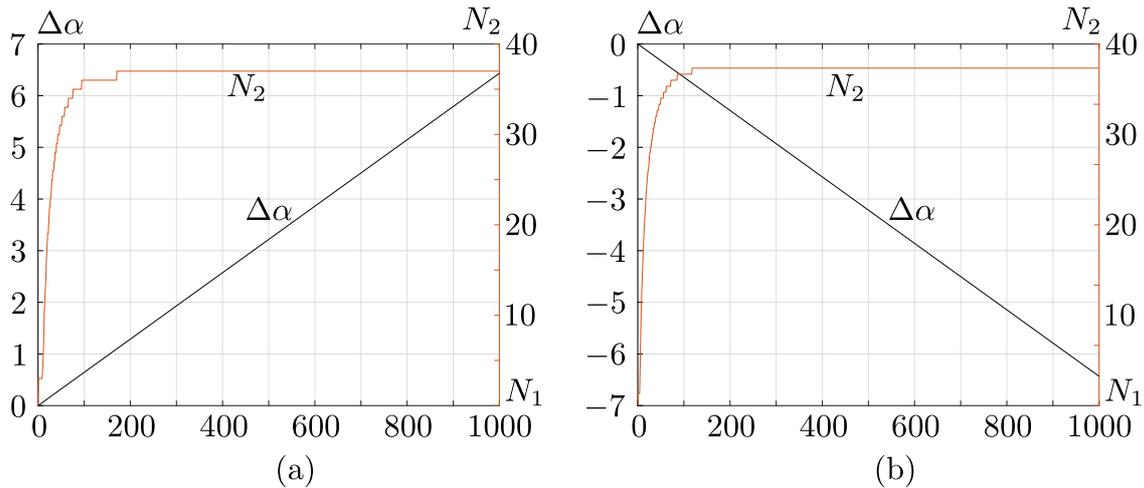


Рис. 15. Зависимости $\Delta\alpha$ и N_2 от количества периодов N_1 при повороте: (а) налево; (б) направо. Значения параметров управления $\Omega_{\max} = 50, t_2 = t_4 = 0.05$ и (2.7), (2.9), (2.11) и неподвижные точки (2.8), (2.10), (2.12)

Кроме того, введем обозначение для курса движения робота за один период:

$$\sigma^n = \arg(X^{n+1} - X^n + i(Y^{n+1} - Y^n)).$$

Для изменения курса движения на величину $\Delta\alpha$ будем использовать, описанные в предыдущем разделе маневры и переходные процессы.

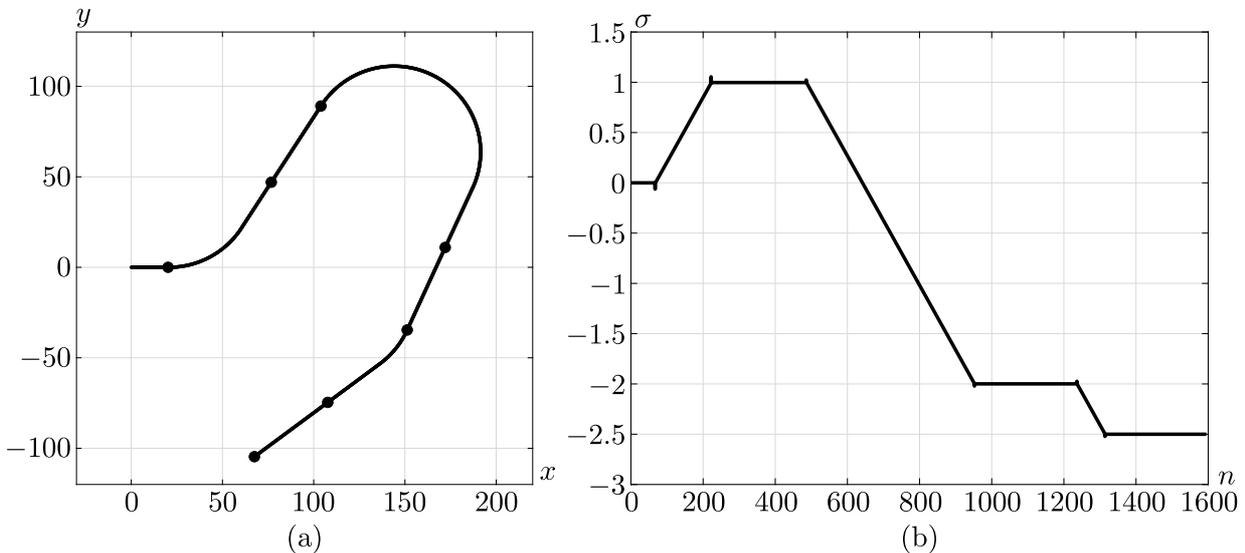


Рис. 16. а) Траектория движения робота, маркерами отмечены моменты переключения, б) зависимость курса σ от номера периода.

Для численного примера будет использовать управления $\Omega_{\max} = 50, t_2 = t_4 = 0.05$, (2.7), (2.9), (2.11), и следующую программу движения.

1. Движение прямо на расстояние 20 м.
2. Поворот налево на 1 рад.
3. Движение прямо на расстояние 50 м.
4. Поворот направо на 3 рад.

5. Движение прямо на расстояние 50 м.
6. Поворот направо на 0.5 рад.
7. Движение прямо на расстояние 50 м.

На рис. 16 показана траектория движения робота и зависимость курса σ от номера периода. Из рис. 16, *b* видно, что предложенный алгоритм управления обеспечивает поворот на угол, заданный программой движения.

Заключение

Численный анализ движения водного робота на основе уравнений (1.1), (1.2) позволяет установить параметры управляющего воздействия, обеспечивающие наибольшую скорость продвижения и поворота. Отметим обнаруженные в рамках рассмотренной модели закономерности.

1. Для симметричных управлений ($t_1 = t_3$, $t_2 = t_4$) с уменьшением промежутков t_2 , t_4 равноускоренного вращения ротора возрастает скорость продвижения.
2. Для несимметричных управлений ($t_1 \neq t_3$, $t_2 = t_4$) существуют значения t_1 и t_3 , обеспечивающие наиболее быстрый поворот налево или направо.

Отметим, что интересным является вопрос экспериментальной проверки предложенного алгоритма.

Финансирование. Работа Ветчанина Е. В. (введение, заключение и § 3) выполнена в Уральском математическом центре (соглашение №075-02-2022-889). Работа Мамаева И. С. (§§ 1-2) выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (грант №FZZN-2020-0011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. Artemova E. M., Vetchanin E. V. Control of the motion of a circular cylinder in an ideal fluid using a source // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 604–617. <https://doi.org/10.35634/vm200405>
3. Килин А. А., Караваев Ю. Л., Клековкин А. В. Кинематическая модель управления высокомагнетным мобильным сферороботом с внутренней омниколесной платформой // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 113–126. <https://doi.org/10.20537/nd1401008>
4. Килин А. А., Караваев Ю. Л. Кинематическая модель управления сферороботом с неуравновешенной омниколесной платформой // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 4. С. 497–511. <https://doi.org/10.20537/nd1404009>
5. Клековкин А. В. Моделирование движения безвинтового мобильного робота с неизменяемой формой оболочки управляемого с помощью вращения внутреннего ротора // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 645–656. <https://doi.org/10.35634/vm200408>
6. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. К теории управления моноциклом // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. № 4. С. 569–583. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9152980>
7. Artemova E. M., Karavaev Yu. L., Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of a spherical robot with variable moments of inertia and a displaced center of mass // Regular and Chaotic Dynamics. 2020. Vol. 25. Issue 6. P. 689–706. <https://doi.org/10.1134/S156035472006012X>
8. Artemova E. M., Kilin A. A. Dynamics and control of a three-link wheeled vehicle // 2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics (NIR). 2020. <https://doi.org/10.1109/NIR50484.2020.9290222>

9. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Dynamics of a Chaplygin sleigh with an unbalanced rotor: regular and chaotic motions // *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 98. Issue 3. P. 2277–2291. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05325-7>
10. Bizyaev I. A., Bolotin S. V., Mamaev I. S. Normal forms and averaging in an acceleration problem in nonholonomic mechanics // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021. Vol. 31. Issue 1. 013132. <https://doi.org/10.1063/5.0030889>
11. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kuznetsov S. P. The Chaplygin sleigh with friction moving due to periodic oscillations of an internal mass // *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 95. Issue 1. P. 699–714. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4591-5>
12. Borisov A. V., Kilin A. A., Karavaev Y. L., Klekovkin A. V. Stabilization of the motion of a spherical robot using feedbacks // *Applied Mathematical Modelling*. 2019. Vol. 69. P. 583–592. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.01.008>
13. Ivanova T. B., Kilin A. A., Pivovarova E. N. Controlled motion of a spherical robot with feedback. I // *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2018. Vol. 24. Issue 3. P. 497–510. <https://doi.org/10.1007/s10883-017-9387-2>
14. Ivanova T. B., Kilin A. A., Pivovarova E. N. Controlled motion of a spherical robot with feedback. II // *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2019. Vol. 25. Issue 1. P. 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10883-017-9390-7>
15. Karavaev Y. L., Klekovkin A. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A., Vetchanin E. V. A simple physical model for control of an propellerless aquatic robot // *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2022. Vol. 14. Issue 1. 011007. <https://doi.org/10.1115/1.4051240>
16. Kilin A. A., Pivovarova E. N. Motion control of the spherical robot rolling on a vibrating plane // *Applied Mathematical Modelling*. 2022. Vol. 109. P. 492–508. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.05.002>
17. Kilin A. A., Pivovarova E. N. Stability and stabilization of steady rotations of a spherical robot on a vibrating base // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2020. Vol. 25. Issue 6. P. 729–752. <https://doi.org/10.1134/S1560354720060155>
18. Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of rubber Chaplygin sphere under periodic control // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2020. Vol. 25. Issue 2. P. 215–236. <https://doi.org/10.1134/S1560354720020069>
19. Murray R. M., Sastry S. S. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1993. Vol. 38. Issue 5. P. 700–716. <https://doi.org/10.1109/9.277235>
20. Pollard B., Tallapragada P. An aquatic robot propelled by an internal rotor // *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 2016. Vol. 22. Issue 2. P. 931–939. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2016.2630998>
21. Putkaradze V., Rogers S. On the dynamics of a rolling ball actuated by internal point masses // *Meccanica*. 2018. Vol. 53. Issue 15. P. 3839–3868. <https://doi.org/10.1007/s11012-018-0904-5>
22. Vetchanin E. V., Mikishanina E. A. Vibrational stability of periodic solutions of the Liouville equations // *Nelineinaya Dinamika*. 2019. Vol. 15. Issue 3. P. 351–363. <https://doi.org/10.20537/nd190312>

Поступила в редакцию 20.10.2022

Принята к публикации 12.12.2022

Ветчанин Евгений Владимирович, д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2617-7512>

E-mail: eugene186@mail.ru

Мамаев Иван Сергеевич, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, Ижевский государственный университет имени М. Т. Калашникова, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3916-9367>

E-mail: mamaev@rcd.ru

Цитирование: Е. В. Ветчанин, И. С. Мамаев. Численный анализ периодических управлений водного робота неизменной формы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 644–660.

E. V. Vetchanin, I. S. Mamaev

Numerical analysis of the periodic controls of an aquatic robot

Keywords: motion in a fluid, aquatic robot, control algorithm, limit cycles.

MSC2020: 70E60, 37N35

DOI: [10.35634/vm220410](https://doi.org/10.35634/vm220410)

A model governing the motion of an aquatic robot with a shell in the form of a symmetrical airfoil NACA0040 is considered. The motion is controlled by periodic oscillations of the rotor. It is numerically shown that for physically admissible values of the control parameters in the phase space of the system, there exists only one limit cycle. The limit cycle that occurs under symmetric control corresponds to the motion of the robot near a straight line. In the case of asymmetric controls, the robot moves near a circle. An algorithm for controlling the course of the robot motion is proposed. This algorithm uses determined limit cycles and transient processes between them.

Funding. The work of Vetchanin E.V. (Introduction, Conclusion and Section 3) was performed at the Ural Mathematical Center (Agreement No. 075-02-2022-889). Work of Mamaev I.S. (Sections 1 and 2) carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia (Grant No. FZZN-2020-0011).

REFERENCES

1. Arnold V.I. *Matematicheskie metody klassicheskoi mekhaniki* (Mathematical methods of classical mechanics), Moscow: Nauka, 1989.
2. Artemova E. M., Vetchanin E. V. Control of the motion of a circular cylinder in an ideal fluid using a source, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 4, pp. 604–617. <https://doi.org/10.35634/vm200405>
3. Kilin A. A., Karavaev Y. L., Klekovkin A. V. Kinematic control of a high manoeuvrable mobile spherical robot with internal omni-wheeled platform, *Nelineinaya Dinamika*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 113–126. <https://doi.org/10.20537/nd1401008>
4. Kilin A. A., Karavaev Y. L. The kinematic control model for a spherical robot with an unbalanced internal omniwheel platform, *Nelineinaya Dinamika*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 497–511. <https://doi.org/10.20537/nd1404009>
5. Klekovkin A. V. Simulation of the motion of a propellerless mobile robot controlled by rotation of the internal rotor, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 4, pp. 645–656. <https://doi.org/10.35634/vm200408>
6. Martynenko Yu. G., Formal'skii A. M. The theory of the control of a monocycle, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, vol. 69, issue 4, pp. 516–528. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2005.07.003>
7. Artemova E. M., Karavaev Yu. L., Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of a spherical robot with variable moments of inertia and a displaced center of mass, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, issue 6, pp. 689–706. <https://doi.org/10.1134/S156035472006012X>
8. Artemova E. M., Kilin A. A. Dynamics and control of a three-link wheeled vehicle, *2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics (NIR)*, 2020. <https://doi.org/10.1109/NIR50484.2020.9290222>
9. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Dynamics of a Chaplygin sleigh with an unbalanced rotor: regular and chaotic motions, *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 98, issue 3, pp. 2277–2291. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05325-7>
10. Bizyaev I. A., Bolotin S. V., Mamaev I. S. Normal forms and averaging in an acceleration problem in nonholonomic mechanics, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2021, vol. 31, issue 1, 013132. <https://doi.org/10.1063/5.0030889>

11. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kuznetsov S. P. The Chaplygin sleigh with friction moving due to periodic oscillations of an internal mass, *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 95, issue 1, pp. 699–714. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4591-5>
12. Borisov A. V., Kilin A. A., Karavaev Y. L., Klekovkin A. V. Stabilization of the motion of a spherical robot using feedbacks, *Applied Mathematical Modelling*, 2019, vol. 69, pp. 583–592. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.01.008>
13. Ivanova T. B., Kilin A. A., Pivovarova E. N. Controlled motion of a spherical robot with feedback. I, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2018, vol. 24, issue 3, pp. 497–510. <https://doi.org/10.1007/s10883-017-9387-2>
14. Ivanova T. B., Kilin A. A., Pivovarova E. N. Controlled motion of a spherical robot with feedback. II, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2019, vol. 25, issue 1, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10883-017-9390-7>
15. Karavaev Y. L., Klekovkin A. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A., Vetchanin E. V. A simple physical model for control of an propellerless aquatic robot, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2022, vol. 14, issue 1, 011007. <https://doi.org/10.1115/1.4051240>
16. Kilin A. A., Pivovarova E. N. Motion control of the spherical robot rolling on a vibrating plane, *Applied Mathematical Modelling*, 2022, vol. 109, pp. 492–508. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.05.002>
17. Kilin A. A., Pivovarova E. N. Stability and stabilization of steady rotations of a spherical robot on a vibrating base, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, issue 6, pp. 729–752. <https://doi.org/10.1134/S1560354720060155>
18. Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of rubber Chaplygin sphere under periodic control, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, issue 2, pp. 215–236. <https://doi.org/10.1134/S1560354720020069>
19. Murray R. M., Sastry S. S. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, vol. 38, issue 5, pp. 700–716. <https://doi.org/10.1109/9.277235>
20. Pollard B., Tallapragada P. An aquatic robot propelled by an internal rotor, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, vol. 22, issue 2, pp. 931–939. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2016.2630998>
21. Putkaradze V., Rogers S. On the dynamics of a rolling ball actuated by internal point masses, *Meccanica*, 2018, vol. 53, issue 15, pp. 3839–3868. <https://doi.org/10.1007/s11012-018-0904-5>
22. Vetchanin E. V., Mikishanina E. A. Vibrational stability of periodic solutions of the Liouville equations, *Nelineinaya Dinamika*, 2019, vol. 15, issue 3, pp. 351–363. <https://doi.org/10.20537/nd190312>

Received 20.10.2022

Accepted 12.12.2022

Evgenii Vladimirovich Vetchanin, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, 426034, Izhevsk, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2617-7512>

E-mail: eugene186@mail.ru

Ivan Sergeevich Mamaev, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, 426069, Izhevsk, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3916-9367>

E-mail: mamaev@rcd.ru

Citation: E. V. Vetchanin, I. S. Mamaev. Numerical analysis of the periodic controls of an aquatic robot, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 644–660.