

MSC2020: 34D08, 93C15

© *P. S. Ivanov, Yu. V. Petrov*

ON THE QUESTION OF THE OPTIMIZATION OF PERMUTATIONS IN THE PROBLEM WITH DYNAMIC CONSTRAINTS

We consider the discrete Schrödinger operator on a perturbed by the decreasing potential graph with vertices at the two intersecting lines. We investigate spectral properties of this operator and the scattering problem for the above operator in the case of a small potential and also in the case when both a potential and velocity of a quantum particle are small. Asymptotic formulas for the probabilities of the particle propagation in all possible directions are obtained. In addition, we investigate the spectral properties of the discrete Schrödinger operator for the infinite band with zero boundary conditions. The scattering pattern is described. Simple formulas for transmission and reflection coefficients near boundary points of the subbands (this corresponds to small velocities of quantum particles) for small potentials are obtained.

Keywords: linear systems with delay, reducibility, Lyapunov exponents, Lyapunov invariants.

DOI: 10.35634/vmXXXXXX

Introduction

We consider a differential inclusion

$$\dot{x} \in F(f^t \sigma, x), \quad \sigma \in \Sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (0.1)$$

where $F(\sigma, x)$ is a compact set in \mathbb{R}^n and Σ is a compact metric space. System (0.1) generates the topological flow ... as it was noted by N. N. Krasovskii [1, Chapter 3]. The works [2–4, 6–9] are ...

§ 1. Notations and definitions

Let \mathbb{R}^n be an n -dimensional Euclidean space and ...

Consider the system

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 dA(t, s)x(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \quad (1.1)$$

We identify system (1.1) with ...

$$\dot{y}(t) = \int_{-r}^0 dB(t, s)y(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \quad (1.2)$$

Remark 1.1. We note that system $\dot{y}(t) = \int_{-r}^0 y(t+s) dB(t, s)$ is ...

§ 2. Invariants sets

Definition 2.1 (see [5], [7, p. 110]). We say that \mathfrak{X}_0 is *regular* if ...

Lemma 2.1 (see [10, p. 123]). *Let \mathfrak{X}_0 be the ...*

P r o o f. We show that □

P r o o f. We show that □

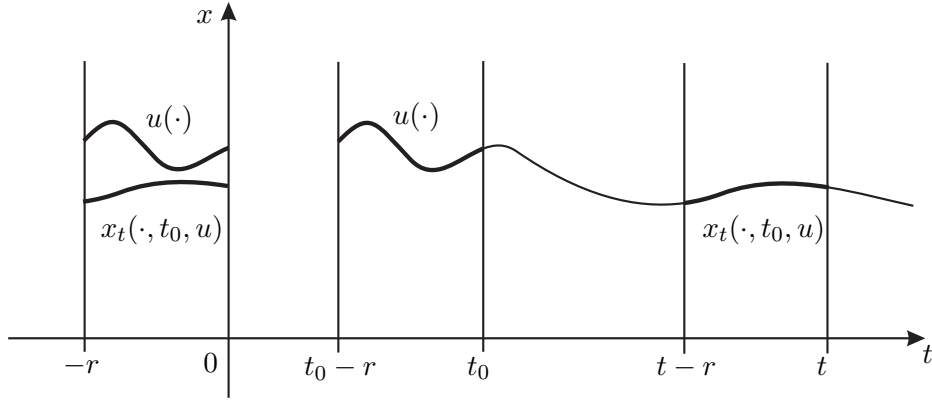


Fig. 1. Motion generated by solution of equation (1.1)

§ 3. λ -Reducibility theorem

Theorem 3.1 (about triangulation). *If \mathbb{S}^p is completely regular then:*

- there exists a system B and Lyapunov transformation $x = L(t)y$ such that ...;*
- in the set $\{B\}$ of all systems kinematically similar to the system (A, \mathbb{S}^p) there exists a system $\dot{y} = C(t)y$ such that ...*

§ 4. Proof of theorem 3.1

1. We fix some basis in the space
 2. Take a continuous function
 3. We construct the function $t \rightarrow \tilde{B}(t)$ so that
- Then we have

$$|\hat{Y}(t, 0)| \leq \alpha |V(t)Z(t)| = \dots = \alpha |Z(t)| \leq \alpha \sqrt{r} \|U_t\|_{\mathbb{R}^p \rightarrow \mathfrak{S}}, \quad (4.1)$$

... Thus, the formula is true. Q.E.D. □

Table 1. Results of the numerical experiment

№	Время T , с	x_0	J	\tilde{J}	$(J - \tilde{J})/J$
1	0.01	$(-0.0005; 0.1)$	1.0000	1.0000	5.92e-13
2	1	$(0.1542; -0.6945)$	1.0000	0.9998	1.36e-4
3	1	$(-0.4312; 0.2701)$	0.9961	0.9997	-0.0036
4	5	$(-0.3696; 1.5540)$	1.0233	0.9983	0.0244
5	7	$(2.2886; -0.1012)$	1.6104	0.9977	0.3805

Theorem 4.1. *Let X be Banach space. Then ...*

Lemma 4.1. *Suppose that*

Proposition 4.1. *Let ...*

Assertion 4.1. *Let ...*

Corollary 4.1. *For any continuous map ... there exist a ...*

Hypothesis 4.1. *Theorem 4.1 is true.*

Definition 4.1. A group is called *abelian* if

Remark 4.1. Note that ...

Example 4.1. Consider the set of all points ... such that ...

Assumption 4.1. Suppose the function $\xi_i(t)$ is periodic.

Condition 4.1. The function $f(x)$ is nonnegative ...

Funding. The study of the first author was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the basic part, project no. 1.1234.2017/8.9. The study of the second author was funded by RFBR, project number 18-01-01234.

REFERENCES

1. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Topics in mathematical system theory*, New York: McGraw-Hill, 1969.
2. Stokes A. A Floquet theory for functional differential equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1962, vol. 48, no. 8, pp. 1330–1334. <https://doi.org/10.1073/pnas.48.8.1330>
3. Büttiker M., Imry Y., Landauer R., Pinhas S. Generalized many-channel conductance formula with application to small rings, *Physical Review B*, 1985, vol. 31, issue 10, pp. 6207–6215. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.31.6207>
4. Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. Engineering Fano resonances in discrete arrays, *Physical Review E*, 2005, vol. 72, issue 5, 056611. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.056611>
5. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight, *Topology Proceedings*, 1980, vol. 5, pp. 11–25. <http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf>
6. Ptitsyna N., Shipman S.P. A lattice model for resonance in open periodic waveguides, *arXiv: 1101.0170v1 [math-ph]*, 2010. <https://arxiv.org/abs/1101.0170v1>
7. Brockett R. On the control of Liouville equations, *Differential Equation and Topology: Abstracts of International Conference Dedicated to the Centennial Anniversary of Lev Semenovich Pontryagin*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2008, p. 7.
8. Danilov L.I. On almost periodic selections of multivalued maps, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2008, issue 2, pp. 34–41 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm080213>
9. Filippova T.F. *Problems of viability for differential inclusions*, Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Yekaterinburg, 1992. (In Russian).
10. Popova S.N. *Control over asymptotic invariants of linear systems*, Abstract of Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Yekaterinburg, 2004. (In Russian).

Received 01.02.2023

Accepted 01.02.2023

Petr Sidorovich Ivanov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>

E-mail: psi@usu.mat.com

Yurii Vladimirovich Petrov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>

E-mail: petrov@list.ru

Citation: P.S. Ivanov, Yu. V. Petrov. On the question of the optimization of permutations in the problem with dynamic constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 1–6.

П. С. Иванов, Ю. В. Петров

К вопросу о маршрутизации перемещений в задаче с динамическими ограничениями

Ключевые слова: линейные системы с последствием, приводимость, показатели Ляпунова, ляпуновские инварианты.

УДК 517.977

DOI: 10.35634/vmXXXXXX

Рассматривается дискретный оператор Шрёдингера на графе с вершинами на двух пересекающихся прямых, возмущенный убывающим потенциалом. Исследуются спектральные свойства этого оператора. Исследуется задача рассеяния для данного оператора в случае малого потенциала, а также в случае, когда малы как потенциал, так и скорость квантовой частицы. Получены асимптотические формулы для вероятностей распространения частицы во всех возможных направлениях. Кроме того, исследуются спектральные свойства дискретного оператора Шрёдингера для бесконечной полосы с нулевыми граничными условиями. Описана картина рассеяния. Получены простые формулы для вероятностей прохождения и отражения вблизи граничных точек подзон (это отвечает малым скоростям квантовой частицы) в случае малых потенциалов.

Финансирование. Исследования первого автора выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки, проект № 1.1234.2017/8.9. Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18–01–01234.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalman R., Falb P., Arbib M. Topics in mathematical system theory. New York: McGraw-Hill, 1969.
2. Stokes A. A Floquet theory for functional-differential equations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1962. Vol. 48. No. 8. P. 1330–1334. <https://doi.org/10.1073/pnas.48.8.1330>
3. Büttiker M., Imry Y., Landauer R., Pinhas S. Generalized many-channel conductance formula with application to small rings // Physical Review B. 1985. Vol. 31. Issue 10. P. 6207–6215. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.31.6207>
4. Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. Engineering Fano resonances in discrete arrays // Physical Review E. 2005. Vol. 72. Issue 5. 056611. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.056611>
5. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25. <http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf>
6. Ptitsyna N., Shipman S.P. A lattice model for resonance in open periodic waveguides // arXiv: 1101.0170v1 [math-ph]. 2010. <https://arxiv.org/abs/1101.0170v1>
7. Brockett R. On the control of Liouville equations // Differential Equation and Topology: Abstracts of International Conference Dedicated to the Centennial Anniversary of Lev Semenovich Pontryagin. Lomonosov Moscow State University. Moscow, 2008. P. 7.
8. Данилов Л.И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 34–41. <https://doi.org/10.20537/vm080213>
9. Филиппова Т.Ф. Задачи о выживаемости для дифференциальных включений: дис. ... д-ра физ.-матем. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1992.
10. Попова С.Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: автореф. дис. ... д-ра физ.-матем. наук. Екатеринбург, 2004.

Принята к публикации 01.02.2023

Иванов Петр Сидорович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>

E-mail: psi@usu.mat.com

Петров Юрий Владимирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>

E-mail: petrov@list.ru

Цитирование: П. С. Иванов, Ю. В. Петров. К вопросу о маршрутизации перемещений в задаче с динамическими ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 1–6.