

УДК 517.977, 514.172.2

© П. Д. Лебедев, А. А. Успенский

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТИ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ МИНИМАКСНОГО РЕШЕНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВА ТИПА**

Исследованы дифференциальные свойства минимаксного решения в одном классе плоских задач Дирихле для уравнения Беллмана. Класс задач определяется замкнутыми невыпуклыми телесными краевыми множествами, границы которых содержат псевдовершины — особые точки, связанные с сингулярностью минимаксного решения. Дифференциальные свойства решения зависят от порядка гладкости границы краевого множества в псевдовершинах и от мощности значений оператора метрической проекции на это множество. В работе разграничены ситуации, когда оператор имеет одноточечные значения и когда количество проекций больше одной. Средствами теории альфа-множеств с привлечением опорных шаров Ефимова–Стечкина исследованы особенности характеристической функции невыпуклого множества. Найдены формулы для ее предельных значений, которые в достаточно общем случае способствуют построению чебышёвского слоя краевого множества — области, примыкающей к краевому множеству, в которой минимаксное решение дифференцируемо. Приведен пример и его содержательная интерпретация с точки зрения оптимального управления.

Ключевые слова: уравнение Беллмана, минимаксное решение, альфа-множество, опорный шар, метрическая проекция, биссектриса множества, опорный шар, чебышёвский слой, управление.

DOI: [10.35634/vm260102](https://doi.org/10.35634/vm260102)**Введение**

Сфера приложений уравнений гамильтонова типа как особых представителей уравнений в частных производных первого порядка (УЧППП) достаточно обширна и включает в себя, в частности, механику, геометрическую оптику, сейсмологию, оптимальное управление, дифференциальные игры, экономику. Классическое (дифференцируемое) решение краевых задач для уравнения этого типа в общем случае не существует на всем множестве рассмотрения. С целью построения содержательного решения УЧППП, адекватно отражающего моделируемые процессы в конкретной области приложения, вводятся обобщенные решения на выбранных классах функций. Важно подчеркнуть, что существуют концепции обобщенных решений не только на множествах с хорошими свойствами (например, на множествах непрерывных либо кусочно-гладких функций), но и на множестве разрывных функций [1]. Получил широкое распространение подход к построению обобщенного решения УЧППП, основанный на рассмотрении соответствующего уравнения второго порядка с параметром малости при старшей производной и последующим построением решения УЧППП путем предельного перехода по этому параметру малости на множестве решений возмущенной задачи. Эта процедура изложена, например, в той же работе [1] для модельной задачи газовой динамики. В исследовании [2] по сути тот же подход, реализованный для уравнения эйконала, именовался методом коротковолновой аппроксимации. С конца прошлого века за указанным подходом к построению обобщенного решения УЧППП закрепилось название метода исчезающей вязкости [3].

Настоящая работа следует концепции минимаксного решения УЧППП [4], в основе которой лежат конструкции теории позиционных дифференциальных игр [5]. При этом активно используются негладкий анализ [6] и теория альфа-множеств [7]. Отличительной

чертой минимаксного подхода, существенно раздвигающей сферу приложения его результатов, является обоснование в рамках этого подхода возможности построения обобщенного решения УЧППП при ослабленных условиях на гладкость краевых условий и при наличии особенностей дифференциальных операторов.

В работе изучены вопросы конструктивного построения минимаксного решения уравнения гамильтонова типа в двумерном евклидовом пространстве. Решение имеет смысл функции оптимального результата для соответствующей задачи управления по быстродействию и является супердифференцируемой функцией [6], которая, стало быть, при локальном рассмотрении либо гладкая, либо негладкая и вогнутая.

Основной результат работы связан с доказательством утверждений о предельных соотношениях для характеристической функции невыпуклого множества, позволяющих выявить у него чебышёвский слой — область гладкости минимаксного решения соответствующей краевой задачи.

§ 1. Объект исследования

Рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения Беллмана — уравнения гамильтонова типа, изучаемого, в частности, в теории оптимального управления:

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \langle \nu, Du(x) \rangle + 1 = 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $Du(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ — градиент функции $u = u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ — скалярное произведение векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$, $\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ — норма вектора $a = (a_1, \dots, a_n)$. Краевое условие (1.2) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого телесного [8] множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

Классическое (дифференцируемое) решение уравнения (1.1) для случая краевого множества с гладкой границей существует локально вблизи замкнутого множества M и в общем случае не может быть гладким образом продолжено на сколько-нибудь большую область. Решение задачи (1.1), (1.2) понимается в минимаксном (обобщенном) смысле. Под минимаксным решением краевой задачи понимается непрерывная функция $u = u(x)$, определенная на замыкании множества $\mathbb{R}^n \setminus M$, удовлетворяющая краевому условию (1.2), в точках гладкости — уравнению (1.1), а в точках негладкости — паре дифференциальных неравенств (см. [9]).

Важно заметить, что в рассматриваемой задаче (1.1), (1.2) известен класс функций [9], которому принадлежит минимаксное решение:

$$u(x) = \rho(x, M).$$

Здесь $\rho(x, M) = \inf_{m \in M} \|x - m\|$ — евклидово расстояние от точки x до множества M . Также известна и отслежена [10] связь минимаксного решения задачи (1.1), (1.2) с фундаментальным (обобщенным) решением задачи Дирихле основного уравнения геометрической оптики — уравнением эйконала для среды с постоянным коэффициентом преломления [2]. Разработаны и реализованы подходы к построению эйконала для различных случаев краевых множеств (см., например, [11]).

Несмотря на негладкость, присущую минимаксному решению задачи (1.1), (1.2), тем не менее в довольно общем случае существует окрестность краевого множества, в которой минимаксное решение является дифференцируемым. Отыскание таких окрестностей

и составляет предмет настоящего исследования, базирующего на обобщениях выпуклого множества.

§ 2. Основные определения, понятия, класс краевых множеств, предварительные результаты

Минимаксное решение задачи (1.1), (1.2) есть евклидово расстояние до замкнутого, необязательно компактного, множества. Свойства этой функции могут быть выявлены безотносительно к рассматриваемой краевой задаче. Основной инструментарий для этого содержится в понятиях и конструкциях теории альфа-множеств [7]. Приведем определения основных элементов этой теории.

Введем обозначения:

co X — выпуклая оболочка множества $X \subset \mathbb{R}^n$;

$\langle h_*, h^* \rangle$ — скалярное произведение векторов h_* и h^* из \mathbb{R}^n ;

$\|h_*\| = \langle h_*, h_* \rangle^{\frac{1}{2}}$, — стандартная норма вектора h_* в евклидовом пространстве;

$(h_* \wedge h^*) = \arccos \frac{\langle h_*, h^* \rangle}{\|h_*\| \|h^*\|} \in [0, \pi]$ — угол между векторами h_* и h^* из \mathbb{R}^n ;

$\text{con } X = \{h = \lambda x : \lambda \geq 0, x \in X\}$ — конус в \mathbb{R}^n , натянутый на множество X , с вершиной в нуле.

Под проекцией $p \in \mathbb{R}^n$ точки $z \in \mathbb{R}^n$ на множество $X \subset \mathbb{R}^n$ понимаем ближайшую к z точку из X в евклидовой метрике. Множество всех проекций точки z на множество X обозначим $\Omega_X(z)$. Отметим, что множество $\Omega_X(z)$ может быть несчетным для невыпуклого замкнутого множества, пустым для открытого множества X , а также может быть одноэлементным в случае замкнутого выпуклого множества X . Если $z \in X$, то $\Omega_X(z) = \{z\}$.

Определение 2.1 (см. [12]). Пусть M — замкнутое множество в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n и $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$. Через $H_M(z) = \text{con}(\text{co } \Omega_M(z) \setminus \{z\})$ обозначим конус, натянутый на множество $\text{co}(\Omega_M(z) \setminus \{z\}) = \{z^* - z : z^* \in \text{co } \Omega_M(z)\}$. Определим функцию $\alpha(z) = \max_{h_*, h^* \in H_M(z)} (h_* \wedge h^*) \in [0, \pi]$. Полагаем $\alpha_M = \sup_{z \in \mathbb{R}^n \setminus M} \alpha(z) \in [0, \pi]$. Множество M назовем альфа-множеством с числом $\alpha = \alpha_M$.

В дальнейшем функцию $\alpha = \alpha(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$, будем называть характеристической функцией множества M .

Сосредоточимся на плоском случае и опишем подробнее те условия, которым удовлетворяет множество $M \subset \mathbb{R}^2$.

Граница $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$ задается непрерывным отображением $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ числового отрезка $T = [\check{t}, \hat{t}]$, $-\infty < \check{t} < \hat{t} < +\infty$, $\gamma(\check{t}) = \gamma(\hat{t})$, или же числовой прямой $T = \mathbb{R}$, на плоскость, которое может иметь конечное число точек разрыва производных начальных порядков от координатных функций.

Примем обозначения: $\det(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ — определитель второго порядка, построенный на векторах $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $O_0(t_0, \delta) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \setminus \{t_0\}$ — выколота окрестность точки $t_0 \in T$ радиуса $\delta > 0$. Пусть $K = \{1, 2, 3\}$. Конкретизируем дифференциальные свойства кривой Γ — границы множества M . Выделим совокупность кривых Γ , для которых выполняются следующие условия:

- (Г₁) $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ имеет непрерывную производную k -го порядка всюду на $T \subseteq \mathbb{R}$, кроме конечной совокупности $T_k \subset T$ точек $t_0 \in T_k$, в которых односторонние производные k -го порядка (левая $\gamma^{(k)}(t_0 - 0)$ и правая $\gamma^{(k)}(t_0 + 0)$ не равны друг другу, $\gamma^{(k)}(t_0 - 0) \neq \gamma^{(k)}(t_0 + 0)$, здесь $k \in K$;
- (Г₂) $\gamma'(t) \neq 0$, $t \in T \setminus T_1$.

Обозначим $\{\Gamma\}_T$ объединение двух совокупностей кривых Γ без точек самопересечения. Первую совокупность составляют кривые с указанными дифференциальными свойствами (Γ_1) , (Γ_2) . Условие (Γ_1) фиксирует наличие точек с разрывами производных соответствующего порядка от координатных функций. Это особые точки, которые могут породить непустые подмножества из $\text{supp } \alpha = \{z \in \mathbb{R}^2 \setminus M : \alpha(z) \neq 0\}$ (черта над множеством символизирует его замыкание). Условие (Γ_2) — это условие регулярности кривой в точках дифференцируемости. Вторую совокупность составляют регулярные кривые, которые минимум трижды дифференцируемы во всех точках из T . Известно (см., например, [13]), что у таких кривых точки со стационарной кривизной также могут породить непустые подмножества из $\text{supp } \alpha$.

Нам потребуется построить носитель $\text{supp } \alpha$ характеристической функции $\alpha = \alpha(z)$ если не на всем $\mathbb{R}^2 \setminus M$, то хотя бы в некоторой окрестности целевого множества, размер которой зависит от свойств M . Заметим, что геометрия $\text{supp } \alpha$ в значительной степени определяется дифференциальными свойствами кривой Γ . В самом общем случае носитель характеристической функции представляет собой объединение нуль- и одномерных многообразий (см., например, [9]).

Построение $\text{supp } \alpha$ требует нахождения решений уравнения, рассматриваемого на границе множества M :

$$Q(t_1, t_2) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $Q = Q(t_1, t_2)$ — симметрическая функция двух переменных в плоскости параметров $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, ее конкретизация приведена ниже. Пусть $t_0 \in T$ и $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ — параметры малости. Под решениями уравнения (2.1) понимаются локальные диффеоморфизмы [14, гл. 1], определенные с одной стороны от точки рассмотрения. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, определенный уравнением (1.1), полунепрерывен слева в точке $t_1 = t_0$ и отображает левую полуокрестность точки $t_1 = t_0$ в ее правую полуокрестность, если выполняются условия:

$$(A_1) \quad t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0;$$

$$(A_2) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0.$$

Условия (A_1) , (A_2) также выделяют неподвижные точки отображения $t_2 = t_2(t_1)$. Существование таких точек и их определяющих локальных диффеоморфизмов показано на примерах множеств с разным порядком гладкости их границ [13].

Определение 2.2. Псевдовершиной замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$ называется точка

$$x^{(0)} = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} (x_1^*, x_2^*),$$

где $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2(t_1)), x_2^*(t_1, t_2(t_1)))$ — однопараметрическое подмножество решений $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2), x_2^*(t_1, t_2))$ системы уравнений

$$\begin{cases} (x_1^* - \gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1) - (x_2^* - \gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1) = 0, \\ (x_1^* - \gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2) - (x_2^* - \gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

определяемое локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, который задается уравнением

$$Q(t_1, t_2) \triangleq \rho^2(\gamma(t_1), (x_1^*, x_2^*)) - \rho^2(\gamma(t_2), (x_1^*, x_2^*)) = 0 \quad (2.3)$$

и удовлетворяет условиям (A_1) , (A_2) . Здесь, $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^2$.

Уравнение (2.3) конкретизирует (2.1).

Определение псевдовершины допускает переформулировку в терминах обратного к $t_2 = t_2(t_1)$ локального диффеоморфизма $t_1 = t_1(t_2)$ (см. [11]). В силу этого $t_2 = t_2(t_1)$ и $t_1 = t_1(t_2)$ называем локальными диффеоморфизмами, порождающими псевдовершину $x^{(0)} \in \Gamma$. Поскольку значимая часть уравнения (2.1) является симметричной относительно своих переменных, то в случае, когда локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$, $\delta_1 > 0$, является его решением, обратный ему локальный диффеоморфизм $t_1 = t_1(t_2)$, $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)$, $\delta_2 > 0$, также является решением уравнения (2.1) (см. [15]). Условия полунепрерывности обеспечивают существование у их графиков общей предельной точки $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$, что позволяет доопределить функции, приняв $t_1(t_0) \triangleq t_0$, $t_2(t_0) \triangleq t_0$.

В дальнейшем потребуются скалярные характеристики псевдовершины, геометрический смысл которых пояснен в [11].

Определение 2.3. Левая односторонняя производная

$$\lambda \triangleq t_2'(t_0 - 0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0}$$

называется левым маркером псевдовершины $x^{(0)} \in \Gamma$, здесь $t_2 = t_2(t_1)$ — локальный диффеоморфизм, порождающий псевдовершину $x^{(0)}$.

Определение 2.4. Правая односторонняя производная

$$\mu \triangleq t_1'(t_0 + 0) = \lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{t_1(t_2) - t_0}{t_2 - t_0}$$

называется правым маркером псевдовершины $x^{(0)} \in \Gamma$, здесь $t_1 = t_1(t_2)$ — локальный диффеоморфизм, порождающий псевдовершину $x^{(0)}$.

При этом односторонние маркеры взаимнообратны:

$$\mu = \lambda^{-1}. \tag{2.4}$$

Также отметим, что $\lambda \leq 0$, ибо $t_2'(t_1) < 0$, $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$, $\delta_1 > 0$. Поэтому в силу (2.4) $\mu \leq 0$. Здесь также возможен случай несобственного значения одного из маркеров, а именно, возможно существование пар односторонних маркеров вида $(\lambda, \mu) = (0, -\infty)$ и $(\lambda, \mu) = (-\infty, 0)$ [16].

Обозначим $\text{card } \Omega_M(z)$ мощность множества $\Omega_M(z)$ проекций точки z на множество M .

Определение 2.5 (см. [11]). Биссектрисой множества $M \subset \mathbb{R}^2$ называется

$$L(M) = \{z \in \mathbb{R}^2: \text{card } \Omega_M(z) > 1\}.$$

Биссектриса $L = L(M)$ множества M наряду с функцией $\alpha = \alpha(z)$ является еще одной характеристикой множества. Биссектриса состоит из точек, в которых нарушается гладкость евклидова расстояния до M [6, с. 241]. Биссектрису следует отнести к множествам симметрии, изучаемых, в частности, в теории особенностей гладких отображений [17, гл. 7]. В качестве другого представителя множеств симметрии, которое в противовес биссектрисе строится внутри множества, можно указать «скелет» множества, применяемый в задачах распознавания образов [18].

Определение 2.6 (см. [11]). Ветвью $L(x^{(0)})$ биссектрисы L множества M , где $x^{(0)}$ — псевдовершина M , называется множество точек $z = (z_1, z_2) = z(t_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (z_1 - \gamma_1(t_1))\gamma'_1(t_1) + (z_2 - \gamma_2(t_1))\gamma'_2(t_1) = 0, \\ (z_1 - \gamma_1(t_2))\gamma'_1(t_2) + (z_2 - \gamma_2(t_2))\gamma'_2(t_2) = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $t_2 = t_2(t_1)$ — локальный диффеоморфизм, порождающий псевдовершину $x^{(0)}$.

Система уравнений (2.5) является сопряженной к системе (2.2). Ее решениями являются точки $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$, имеющие не менее двух различных проекций на M . В силу определения носителя характеристической функции $L(x^{(0)}) \subset \text{supp } \alpha$.

Подчеркнем, что биссектрису и ее ветви нужно рассматривать как важные конструктивные элементы при исследовании проблемы существования у множества чебышёвского слоя. Гладкость границы, даже минимальная (см. [16]), обеспечивает удаленность ее ветвей от множества на строго положительную величину, что фиксирует факт существования у множества чебышёвского слоя. В свою очередь, наличие у невыпуклого множества чебышёвского слоя позволяет отнести его к грех-регулярным множествам [19] — классу замкнутых множеств, у которых метрическая проекция однозначна и непрерывна при подходящем расширении множества.

Определение 2.7. Конечный односторонний предел $\bar{x} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} z(t_1)$ решений системы (2.5) называется крайней точкой биссектрисы. Если означенный предел равен бесконечности или не существует, то говорят, что псевдовершина $x^{(0)} = \gamma(t_0)$ не порождает крайнюю точку биссектрисы.

Далее дополним конструкции теории альфа-множеств понятием из работы [8], посвященной изучению свойств чебышёвских множеств.

Определение 2.8. Замкнутый шар $\bar{E}_r(z) \triangleq \{z^* \in \mathbb{R}^n : \|z - z^*\| \leq r\}$ называется опорным к множеству $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $z^{(0)} \in M$, если внутри шара $\bar{E}_r(z)$ нет точек M и $z^{(0)}$ лежит на границе $\bar{E}_r(z)$.

§3. Основной теоретический результат

Ранее была доказана теорема о вычислении значений характеристической функции $\alpha = \alpha(z)$ в точках биссектрисы множества.

Теорема 3.1 (см. [20]). Пусть $L(x^{(0)})$ — ветвь биссектрисы L замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \partial M \in \{\Gamma\}_T$, определяемой вектор-функцией $\gamma = \gamma(t)$, где $x^{(0)} = \gamma(t_0)$ — псевдовершина M , порожденная локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$, $\delta_1 > 0$, и выполняется условие

$$\det(\gamma'(t), \gamma'(\tau)) \neq 0, \quad t \in O_0(t_0, \delta), \quad \tau \in O_0(t_0, \delta), \quad \delta > 0, \quad t \neq \tau.$$

Тогда для точек $z(t_1) = (x_1, x_2) \in L(x^{(0)})$, $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$, $\delta_1 > 0$, имеет место формула вычисления значений характеристической функции

$$\alpha(z(t_1)) = 2 \arctg \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle} \right|. \quad (3.1)$$

Для дальнейшего анализа примем обозначения для приращений, связывающих три точки t_0, t_1, t_2 из T , где $t_1 < t_0 < t_2$:

$$\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0, \quad \Delta_2 = t_2 - t_0 > 0, \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

В случае, когда точки t_0, t_1, t_2 связаны в силу диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1), t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0), \delta_1 > 0$, т.е. $-\Delta_1 = t_1 - t_0 < 0$ — приращение независимой переменной, а $\Delta_2 = t_2(t_1) - t_2(t_0) = t_2(t_1) - t_0 > 0$ — приращение диффеоморфизма, то в силу определения 2.3 справедливы равенства для левого маркера псевдовершины:

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -\lambda, \quad \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta_1} = 1 - \lambda. \quad (3.2)$$

Аналогично для случая когда точки t_0, t_1, t_2 связаны в силу диффеоморфизма $t_1 = t_1(t_2), t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2), \delta_2 > 0$, т.е. $\Delta_2 = t_2 - t_0 > 0$ — приращение независимой переменной, а $-\Delta_1 = t_1(t_2) - t_1(t_0) = t_1(t_2) - t_0 < 0$ — приращение диффеоморфизма, то в силу определения 2.4 справедливы равенства для правого маркера псевдовершины:

$$\lim_{\Delta_2 \downarrow 0} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -\mu, \quad \lim_{\Delta_2 \downarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta_2} = 1 - \mu.$$

Для вектор-функции $\gamma(t)$ и ее производных, вычисленных в центральном узле t_0 , для краткости будем опускать обозначение аргумента, при этом для односторонних производных уберем обозначения $t_0 - 0$ и $t_0 + 0$, опустив соответствующий знак минус или плюс в нижний индекс: $\gamma' \triangleq \gamma'(t_0), \gamma'' \triangleq \gamma''(t_0), \gamma''_- \triangleq \gamma''(t_0 - 0), \gamma''_+ \triangleq \gamma''(t_0 + 0)$, и т.д.

Основной результат настоящего исследования заключается в отыскании формул для предельного значения сужения характеристической функции $\alpha = \alpha(z)$ на ветвь биссектрисы. Это значение зависит от дифференциальных свойств границы множества в его псевдовершине. Для сужения сохраним обозначение характеристической функции.

Теорема 3.2. Пусть $L(x^{(0)})$ — ветвь биссектрисы L замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \partial M \in \{\Gamma\}_T$, определяемой вектор-функцией $\gamma = \gamma(t)$, где $x^{(0)} = \gamma(t_0)$ — псевдовершина M , порожденная локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1), t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0), \delta_1 > 0$. Далее, пусть $\Omega_M(z(t_1)) = \{\gamma(t_1), \gamma(t_2(t_1))\}$ — множество проекций точки $z(t_1), z(t_1) \in L(x^{(0)}), t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0), \delta_1 > 0$, и выполняются условия:

- (1) существует крайняя точка $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ ветви биссектрисы $L(x^{(0)})$;
- (2) $\det(\gamma'(t), \gamma'(\tau)) \neq 0, t \in O_0(t_0, \delta), \tau \in O_0(t_0, \delta), \delta > 0, t \neq \tau$.

Тогда существует предел

$$\alpha_0 \triangleq \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \alpha(z(t_0 - \Delta_1)), \quad (3.3)$$

при этом

$$\alpha_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{|\det(\gamma'_+, \gamma'_-)|}{\|\gamma'_-\| \|\gamma'_+\| + \langle \gamma'_+, \gamma'_- \rangle}, \quad \text{когда } t_0 \in T_1, \quad \|\gamma'_-\| \|\gamma'_+\| + \langle \gamma'_+, \gamma'_- \rangle > 0, \quad (3.4)$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \text{когда } t_0 \in \{T_2, T_3\}. \quad (3.5)$$

Доказательство. По условию крайняя точка ветви биссектрисы существует, это значит, что существует конечный предел

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} z(t_0 - \Delta_1) = \bar{x} \in \operatorname{supp} \alpha.$$

Таким образом, предел в (3.3) ищется на замыкании ветви биссектрисы. Находясь в условиях теоремы 3.1, воспользуемся формулой (3.1) значений характеристической функции в точках $t_1 = t_0 - \Delta_1$ ветви биссектрисы:

$$\alpha(z(t_0 - \Delta_1)) = 2 \operatorname{arctg} \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} \right|. \quad (3.6)$$

Далее применим технику струй [21, гл. 3], раскладывая компоненты правой части равенства (3.6) в точке $t = t_0$. Разложения осуществляются как влево в направлении от $t = t_0$ до $t = t_1$, так и вправо в направлении от $t = t_0$ до $t = t_2$. Отметим, что здесь точки (узлы) связаны неравенством $t_1 < t_0 < t_2$. Разложения формируем сначала при произвольных допустимых приращениях $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$. Затем при предельном переходе полагаем их связанными в силу диффеоморфизма, то есть, считая $-\Delta_1 = t_1 - t_0 < 0$ независимым приращением в узле $t_0 \in T$, полагаем, что $\Delta_2 = t_2(t_1) - t_0 > 0$ — приращение функции $t_2 = t_2(t_1)$ в этом узле. Указанная зависимость обеспечивает сходимость $\Delta_2 \downarrow 0$, когда $\Delta_1 \downarrow 0$.

Случай 1. Пусть $t_0 \in T_1$, т. е. псевдовершина $x^{(0)} = \gamma(t_0)$ является точкой излома границы множества. По условию (Г₁) $\gamma'_- \neq \gamma'_+$.

Разложим разность вектор-функции в крайних узлах в кусочно-гладком случае:

$$\begin{aligned} \gamma(t_2) - \gamma(t_1) &= (\gamma(t_2) - \gamma(t_0)) + (\gamma(t_0) - \gamma(t_1)) = (\gamma + \gamma'_+ \Delta_2 + o(\Delta_2) - \gamma) + \\ &+ (\gamma - \gamma + \gamma'_- \Delta_1 + o(\Delta_1)) = \gamma'_+ \Delta_2 + \gamma'_- \Delta_1 + o(\Delta_{12}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь и ниже $o(\delta)$ обозначает функцию, имеющую более высокий порядок малости относительно $\delta > 0$, $\Delta_{12} = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$, $\varepsilon(\delta) \downarrow 0$, когда $\delta \downarrow 0$.

Подставим (3.7) в (3.6), вынесем $\Delta_1 > 0$ за знак определителя в числителе и за знак скалярного произведения в знаменателе, после сокращения на него получим

$$\begin{aligned} &\frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} = \\ &= \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma'_+ \Delta_2 + \gamma'_- \Delta_1 + o(\Delta_{12}))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma'_+ \Delta_2 + \gamma'_- \Delta_1 + o(\Delta_{12}) \rangle} = \\ &= \frac{\Delta_1 \det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma'_+ \frac{\Delta_2}{\Delta_1} + \gamma'_- + \varepsilon(\Delta_{12}))}{\Delta_1 \langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma'_+ \frac{\Delta_2}{\Delta_1} + \gamma'_- + \varepsilon(\Delta_{12}) \rangle} = \\ &= \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma'_+ \frac{\Delta_2}{\Delta_1} + \gamma'_- + \varepsilon(\Delta_{12}))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma'_+ \frac{\Delta_2}{\Delta_1} + \gamma'_- + \varepsilon(\Delta_{12}) \rangle}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу, используя классические свойства определителей, а также формулы (3.2) для левого маркера и предельное равенство $\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)) = \gamma'_+$:

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} = \\ &= \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma'_+ \frac{\Delta_2}{\Delta_1} + \gamma'_- + \varepsilon(\Delta_{12}))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma'_+ \frac{\Delta_2}{\Delta_1} + \gamma'_- + \varepsilon(\Delta_{12}) \rangle} = \frac{\det(\gamma'_+, -\gamma'_+ \lambda + \gamma'_-)}{\langle \gamma'_+, -\gamma'_+ \lambda + \gamma'_- \rangle} = \\ &= \frac{-\lambda \det(\gamma'_+, \gamma'_+) + \det(\gamma'_+, \gamma'_-)}{-\lambda \langle \gamma'_+, \gamma'_+ \rangle + \langle \gamma'_+, \gamma'_- \rangle} = \frac{\det(\gamma'_+, \gamma'_-)}{-\lambda \|\gamma'_+\|^2 + \langle \gamma'_+, \gamma'_- \rangle}. \end{aligned}$$

Значение левого маркера известно [22], оно равно взятому с противоположным знаком отношению дифференциала длины левой дуги кривой к дифференциалу длины ее правой дуги, когда дуги стянуты в точку $t = t_0$:

$$\lambda = -\frac{\|\gamma'_-\|}{\|\gamma'_+\|}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} &= \frac{\det(\gamma'_+, \gamma'_-)}{-\lambda \|\gamma'_+\|^2 + \langle \gamma'_+, \gamma'_- \rangle} = \\ &= \frac{\det(\gamma'_+, \gamma'_-)}{\frac{\|\gamma'_-\|}{\|\gamma'_+\|} \|\gamma'_+\|^2 + \langle \gamma'_+, \gamma'_- \rangle} = \frac{\det(\gamma'_+, \gamma'_-)}{\|\gamma'_-\| \|\gamma'_+\| + \langle \gamma'_+, \gamma'_- \rangle}. \end{aligned}$$

Здесь по условию теоремы $\|\gamma'_-\| \|\gamma'_+\| + \langle \gamma'_+, \gamma'_- \rangle > 0$. Из последнего равенства следует справедливость формулы (3.4).

Случай 2. Пусть $t_0 \in T_2$. Осуществим односторонние разложения до второго порядка включительно разности вектор-функции в крайних узлах:

$$\begin{aligned} \gamma(t_2) - \gamma(t_1) &= (\gamma(t_2) - \gamma(t_0)) + (\gamma(t_0) - \gamma(t_1)) = \\ &= (\gamma + \gamma' \Delta_2 + \frac{1}{2} \gamma''_+ \Delta_2^2 + o(\Delta_2^2) - \gamma) + (\gamma - \gamma + \gamma' \Delta_1 - \frac{1}{2} \gamma''_- \Delta_1^2 + o(\Delta_1^2)) = \\ &= \gamma' \Delta_2 + \frac{1}{2} \gamma''_+ \Delta_2^2 + \gamma' \Delta_1 - \frac{1}{2} \gamma''_- \Delta_1^2 + o(\Delta_{12}^2) = \gamma' \Delta + \frac{1}{2} (\gamma''_+ \Delta_2^2 - \gamma''_- \Delta_1^2) + o(\Delta_{12}^2) = \\ &= \Delta (\gamma' + \gamma''_+ \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \gamma''_- \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} + o(\Delta_{12})). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Разложим производные в крайних узлах:

$$\gamma'(t_1) = \gamma' - \Delta_1 \gamma''_- + o(\Delta_1), \quad \gamma'(t_2) = \gamma' + \Delta_2 \gamma''_+ + o(\Delta_2). \quad (3.9)$$

Найдем представление для дроби в (3.6), используя формулы (3.8), (3.9). Числитель

$$\begin{aligned} &\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1)) = \\ &= \det\left(\gamma' + \Delta_2 \gamma''_+ + o(\Delta_2), \Delta\left(\gamma' + \gamma''_+ \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \gamma''_- \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} + o(\Delta_{12})\right)\right) = \\ &= \Delta \left(\det(\gamma', \gamma') + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_+) - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_-) + \Delta_2 \det(\gamma''_+, \gamma') + o(\Delta_{12}) \right) = \\ &= \Delta \left(\left(\frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \Delta_2 \right) \det(\gamma', \gamma''_+) - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12}) \right). \end{aligned}$$

Знаменатель

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t_2), \gamma(t_2) - \gamma(t_1) \rangle &= \Delta \left\langle \gamma' + \Delta_2 \gamma''_+ + o(\Delta_2), \gamma' + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \gamma''_+ - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \gamma''_- + o(\Delta_{12}) \right\rangle = \\ &= \Delta \left(\|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12}) \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} =$$

$$\begin{aligned}
& \Delta \left(\left(\frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \Delta_2 \right) \det(\gamma', \gamma''_+) - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12}) \right) \\
&= \frac{\Delta \left(\left(\frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \Delta_2 \right) \det(\gamma', \gamma''_+) - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12}) \right)}{\Delta \left(\|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12}) \right)} = \\
&= \frac{\left(\frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \Delta_2 \right) \det(\gamma', \gamma''_+) - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12})}{\|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12})}.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $\Delta_1 \downarrow 0$ предел числителя равен нулю, а предел знаменателя равен $\|\gamma'\|^2 \neq 0$. Стало быть,

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} 2 \operatorname{arctg} \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} \right| = 2 \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

Отсюда следует справедливость формулы (3.5) для случая $t_0 \in T_2$.

Случай 3. Пусть $t_0 \in T_3$. Воспользуемся представлением дроби для случая 2, приняв по условиям случая 3, что $\gamma'' = \gamma''_- = \gamma''_+$ и то, что $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} = \\
&= \frac{\left(\frac{\Delta_2^2}{2\Delta} - \Delta_2 \right) \det(\gamma', \gamma''_+) - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \det(\gamma', \gamma''_-) + o(\Delta_{12})}{\|\gamma'\|^2 + \Delta_2 \langle \gamma''_+, \gamma' \rangle + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_+ \rangle - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta} \langle \gamma', \gamma''_- \rangle + o(\Delta_{12})} = \frac{-\frac{\Delta}{2} \det(\gamma', \gamma'') + o(\Delta_{12})}{\|\gamma'\|^2 + \frac{3\Delta_2 - \Delta_1}{2} \langle \gamma', \gamma'' \rangle + o(\Delta_{12})}.
\end{aligned}$$

Здесь числитель дроби стремится к нулю, когда Δ_{12} стремится к нулю, а предел знаменателя равен $\|\gamma'\|^2 > 0$, потому

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \left| \frac{-\frac{\Delta}{2} \det(\gamma', \gamma'') + o(\Delta_{12})}{\|\gamma'\|^2 + \frac{3\Delta_2 - \Delta_1}{2} \langle \gamma', \gamma'' \rangle + o(\Delta_{12})} \right| = 0.$$

Стало быть,

$$\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} 2 \operatorname{arctg} \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_0 - \Delta_1)), \gamma(t_2(t_0 - \Delta_1)) - \gamma(t_0 - \Delta_1) \rangle} \right| = 2 \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

Отсюда следует справедливость формулы (3.5) для случая $t_0 \in T_3$. \square

§ 4. Чебышёвский слой и пример его построения

Пусть $Z(M) = \{z \in \mathbb{R}^2: \operatorname{card} P_M(z) = 1\}$, $O_r(M) = \{z \in \mathbb{R}^n: \rho(z, M) < r\}$, где $r > 0$. Множество $M \subset \mathbb{R}^2$ обладает чебышёвским слоем величины $r > 0$, если $O_r(M) \subset Z(M)$ (см. [23]). Заметим, что у невыпуклого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ биссектриса $L \neq \emptyset$. Другими словами, невыпуклое замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ не является множеством единственности [24], поскольку существуют точки $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$, в которых мощность $\operatorname{card} P_M(z) > 1$. В силу определения биссектрисы для выделения чебышёвского слоя невыпуклого множества требуется найти его окрестность, которая с биссектрисой не пересекается.

Теоремы 3.1 и 3.2 позволяют исследовать невыпуклые замкнутые плоские множества $M \subset \mathbb{R}^2$ на наличие чебышёвского слоя и в случае конечного числа псевдовершин находить его величину.

Рассмотрим пример относительно простой ситуации, когда невыпуклое множество имеет две псевдовершины.

Пример 4.1. Кривая $\Gamma = \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$, где

$$\gamma_1(t) = t, \quad (4.1)$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} t^2, & t \in (-\infty, 0], \\ t^4, & t \in (0, +\infty). \end{cases} \quad (4.2)$$

Кривая Γ делит плоскость на две части. В задаче (1.1), (1.2) примем в качестве искомого краевого множества M ту часть, что лежит не выше Γ . Множество M невыпуклое и имеет две псевдовершины: $x^{(0)} = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) = (0, 0)$, когда $t_0 = 0$, и $\hat{x}^{(0)} = (\gamma_1(\hat{t}_0), \gamma_2(\hat{t}_0)) = (56^{-1/6}, 56^{-2/3})$, когда $\hat{t}_0 = 56^{-1/6}$. Обозначим $X^{(0)} = \{x^{(0)}, \hat{x}^{(0)}\}$ — совокупность псевдовершин.

Дальнейший анализ особенностей множества M опирается на результаты параграфа 3 настоящей статьи и ранее полученные авторами результаты.

Отметим, что дифференциальные свойства границы краевого множества в псевдовершинах разные. Псевдовершина $x^{(0)} = \gamma(t_0)$, $t_0 \in T_2$, имеет дефект гладкости по производным второго порядка, односторонние кривизны $\Gamma = \partial M$ в этой точке

$$k(t_0 - 0) = \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0 - 0))}{\|\gamma'(t_0)\|^3} = 2, \quad k(t_0 + 0) = \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0 + 0))}{\|\gamma'(t_0)\|^3} = 0, \quad (4.3)$$

здесь $k(t_0 - 0) \neq k(t_0 + 0)$.

Другая псевдовершина $\hat{x}^{(0)} = \gamma(\hat{t}_0)$ имеет производные всех порядков, при этом кривизна на кривой $\Gamma = \partial M$ в этой точке стационарна, т. е. $k'(\hat{t}_0) = 0$, а значение кривизны

$$k(\hat{t}_0) = \frac{\det(\gamma'(\hat{t}_0), \gamma''(\hat{t}_0))}{\|\gamma'(\hat{t}_0)\|^3} = \frac{12 \cdot 56^{-1/3}}{(1 + 56^{-1/3})^{3/2}} = \frac{7\sqrt{2}}{9} \cdot 56^{1/6}. \quad (4.4)$$

Найдем крайние точки биссектрисы множества M . Псевдовершина $x^{(0)}$ порождает крайнюю точку $x = (x_1, x_2)$ биссектрисы [13, формулы (4.16), (4.17)]:

$$x_1 = \gamma_1(t_0) - \frac{\gamma_2'(t_0)(1 + (\gamma_2'(t_0))^2)}{\beta_1 \gamma_2''(t_0 - 0) + \beta_2 \gamma_2''(t_0 + 0)}, \quad x_2 = \gamma_2(t_0) + \frac{1 + (\gamma_2'(t_0))^2}{\beta_1 \gamma_2''(t_0 - 0) + \beta_2 \gamma_2''(t_0 + 0)},$$

$$\beta_1 = \frac{1}{1 - \lambda} \geq 0, \quad \beta_2 = -\frac{\lambda}{1 - \lambda} \geq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1.$$

Здесь левый маркер λ псевдовершины $x^{(0)}$ в ситуации разрыва в этой точке производных второго порядка теоретически может принимать одно из двух возможных значений — либо нуль, либо несобственное значение $-\infty$ (см. [16]). Численными методами устанавливается, что $\lambda = 0$. Тогда

$$x_1 = \gamma_1(t_0) - \frac{\gamma_2'(t_0)(1 + (\gamma_2'(t_0))^2)}{\gamma_2''(t_0 - 0)} = 0, \quad x_2 = \gamma_2(t_0) + \frac{1 + (\gamma_2'(t_0))^2}{\gamma_2''(t_0 - 0)} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, крайняя точка $x = (0, \frac{1}{2})$ биссектрисы является центром кривизны левой дуги кривой $\Gamma = \partial M$ в точке гладкой склейки $x^{(0)}$. Здесь

$$\|x - x^{(0)}\| = \frac{1}{|k(t_0 - 0)|} = \frac{1}{2}. \quad (4.5)$$

Псевдовершине $\widehat{x}^{(0)}$ отвечает крайняя точка $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ биссектрисы L , которая совпадает с центром кривизны $\Gamma = \partial M$ в точке $\widehat{x}^{(0)}$ [13, утверждение 1]:

$$\widehat{x}_1 = \gamma_1(\widehat{t}_0) - \frac{\|\gamma'(\widehat{t}_0)\|^2}{\det(\gamma'(\widehat{t}_0), \gamma''(\widehat{t}_0))} \gamma_2'(\widehat{t}_0) = \frac{4}{7} \cdot 56^{-1/6},$$

$$\widehat{x}_2 = \gamma_2(\widehat{t}_0) + \frac{\|\gamma'(\widehat{t}_0)\|^2}{\det(\gamma'(\widehat{t}_0), \gamma''(\widehat{t}_0))} \gamma_1'(\widehat{t}_0) = \frac{1}{8} \cdot 56^{1/3}.$$

Здесь

$$\|\widehat{x} - \widehat{x}^{(0)}\| = \frac{1}{|\widehat{k}(t_0)|} = \frac{9\sqrt{2}}{56^{-1/6}} = \frac{9}{14 \cdot 7^{1/6}}. \quad (4.6)$$

Каждой псевдовершине соответствует одномерное многообразие, входящее в биссектрису L , — ветвь L_1 с крайней точкой $x = (0, \frac{1}{2})$, порожденной псевдовершиной $x^{(0)}$, и ветвь L_2 с крайней точкой $\widehat{x} = (\frac{4}{7} \cdot 56^{-1/6}, \frac{1}{8} \cdot 56^{1/3})$, порожденной псевдовершиной $\widehat{x}^{(0)}$. Ветви L_1 и L_2 стыкуются в точке бифуркации $\check{x} \approx (0.0883, 0.8166)$ — единственной точке, имеющей три метрических проекции на множество M . Точка \check{x} является крайней точкой третьей ветви биссектрисы — ветви, состоящей из точек, наиболее удаленных от M (см. рис. 1). Диффеоморфизмы, параметризующие ветви биссектрисы, найдены численными методами (описание методов см., например, в [11]).

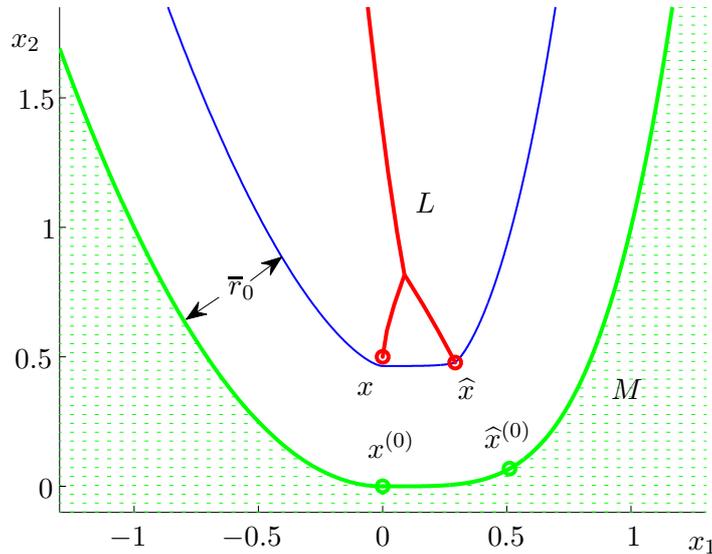


Рис. 1. Чебышёвский слой и биссектриса множества M

Подчеркнем, что точки биссектрисы являются центрами опорных по Ефимову–Стечкину шаров (см. [8, 20]). В рассматриваемом примере все опорные шары с центрами на L , кроме одного, имеют ровно две точки касания с M . Единственное исключение составляет опорный шар с центром в точке бифуркации \check{x} , который касается множества в трех точках.

Для каждой псевдовершины $\bar{x}^{(0)} \in \overline{X}^{(0)}$, опираясь на теорему 3.1 и теорему 2 из [25], найдем предел $r_0(\bar{x}^{(0)}) = \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} r(z(t_0 - \Delta_1))$ радиусов опорных шаров с центрами на отвечающей псевдовершине ветви биссектрисы, и предельное значение угловой величины

$\alpha_0(\bar{x}^{(0)}) = \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \alpha(z(t_0 - \Delta_1))$. Применяв формулы (4.3), (4.4) и (3.5), получим пары скалярных характеристик псевдовершин:

$$\left(r_0(x^{(0)}), \alpha_0(x^{(0)}) \right) = \left(\frac{1}{|k(t_0 - 0)|}, \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \alpha(z(t_0 - \Delta_1)) \right) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right), \quad (4.7)$$

$$z(t_0 - \Delta_1) \in L_1, \quad 0 < \Delta_1 \ll 1,$$

$$\left(r_0(\hat{x}^{(0)}), \alpha_0(\hat{x}^{(0)}) \right) = \left(\frac{1}{|k(\hat{t}_0)|}, \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \alpha(z(\hat{t}_0 - \Delta_1)) \right) = \left(\frac{1}{14 \cdot 7^{1/6}}, 0 \right), \quad (4.8)$$

$$z(t_0 - \Delta_1) \in L_2, \quad 0 < \Delta_1 \ll 1.$$

Пары (4.7) и (4.8) характеризуют ситуацию с точки зрения мощности множества метрических проекций соответствующих крайних точек биссектрисы на множество M . Поскольку в каждой паре (r_0, α_0) величина r_0 — это радиус опорного шара в крайней точке биссектрисы, а α_0 — угол в плоском конусе с вершиной в крайней точке биссектрисы, стороны которого определяются отрезками, соединяющими вершину с проекциями, то случай, когда $r_0 > 0, \alpha_0 = 0$, свидетельствует о слиянии проекций крайней точки биссектрисы. Таким образом, крайние точки $x = (0, \frac{1}{2})$ и $\hat{x} = (\frac{4}{7} \cdot 56^{-1/6}, \frac{1}{8} \cdot 56^{1/3})$ биссектрисы имеют единственные метрические проекции на M , которые совпадают с псевдовершинами $x^{(0)} = \gamma(t_0)$ и $\hat{x}^{(0)} = \gamma(\hat{t}_0)$ соответственно. Тем самым показано, что крайние точки не принадлежат биссектрисе:

$$x \notin L, \quad \hat{x} \notin L. \quad (4.9)$$

Из (4.5), (4.7) и (4.6), (4.8) следует, что

$$r_0(x^{(0)}) = \|x^{(0)} - x\| = \frac{1}{|k(t_0 - 0)|} = \frac{1}{2}, \quad (4.10)$$

$$r_0(\hat{x}^{(0)}) = \|\hat{x}^{(0)} - \hat{x}\| = \frac{1}{|k(\hat{t}_0)|} = \frac{9}{14 \cdot 7^{1/6}}. \quad (4.11)$$

Располагая равенствами (4.10) и (4.11), определим наименьшее из предельных значений радиусов опорных шаров, когда их центры, оставаясь на L , устремлены к крайним точкам соответствующих ветвей биссектрисы:

$$\bar{r}_0 = \min(r_0(x^{(0)}), r_0(\hat{x}^{(0)})) = \min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{9}{14 \cdot 7^{1/6}} \right\} = \frac{9}{14 \cdot 7^{1/6}} > 0. \quad (4.12)$$

Биссектриса L является множеством неединственности M . Из (4.9) и (4.12) следует, что для любого $r, 0 < r \leq \bar{r}_0$, пересечение $O_r(M) \cap L = \emptyset$. При этом в силу определения опорного шара с учетом (4.12) $O_r(M) \cap L \neq \emptyset$, когда $r > \bar{r}_0$. Это означает, что M имеет чебышёвский слой величины $r, 0 < r \leq \bar{r}_0$, причем $r = \bar{r}_0$ — величина наибольшего чебышёвского слоя этого множества.

Для рассматриваемой краевой задачи (1.1), (1.2) чебышёвский слой наибольшей величины $r = \bar{r}_0$ краевого множества M представляет собой примыкающую к M полосу ширины $\bar{r}_0 = \frac{9}{14 \cdot 7^{1/6}}$ и является множеством гладкости минимаксного решения — функции оптимального результата в задаче управления по быстрдействию с круговой вектограммой единичного радиуса для случая, когда M — целевое множество.

На рис. 1 кривая (4.1), (4.2) представлена жирной зеленой линией, множество $L(M)$ — красной линией и граница чебышёвского слоя радиуса r_0 — тонкой синей линией. На рис. 2 показан график решения задачи (1.1), (1.2).

Финансирование. Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00269, <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>.

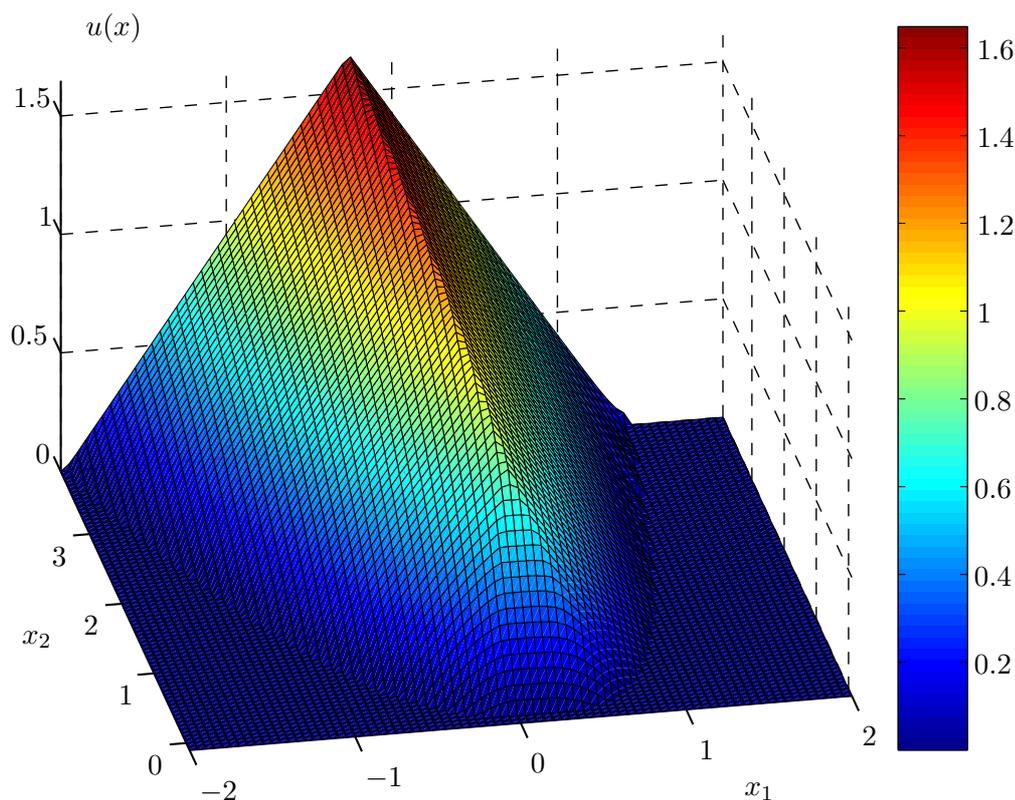


Рис. 2. График минимаксного решения $u(x)$ краевой задачи

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. Вып. 3 (75). С. 3–73. <https://www.mathnet.ru/rus/rm7611>
2. Кружков С. Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Математический сборник (новая серия). 1975. Т. 98 (140). № 3 (11). С. 450–493. <https://www.mathnet.ru/rus/sm3720>
3. Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 277. No. 1. P. 1–42. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8>
4. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. <https://zbmath.org/0298.90067>
6. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. <https://zbmath.org/0559.49001>
7. Ушаков В. Н., Успенский А. А. α -множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 95–120. <https://doi.org/10.20537/vm160109>
8. Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышёвские множества // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 127. № 2. С. 254–257. <https://zbmath.org/0095.08903>
9. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия // Прикладная математика и ин-

форматика: Труды факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Т. 27. М.: Диалог МГУ, 2007. С. 65–79.

<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32807121>

10. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Выявление сингулярности у обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 59–73. <https://doi.org/10.20537/vm180106>
11. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Численно-аналитическое построение обобщенного решения уравнения эйконала в плоском случае // Математический сборник. 2024. Т. 215. № 9. С. 99–124. <https://doi.org/10.4213/sm9500>
12. Ушаков В. Н., Ершов А. А. О соотношении между α -множествами и слабо выпуклыми множествами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30. № 4. С. 276–285. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-4-276-285>
13. Успенский А. А. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстрого действия // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 276–290. <https://www.mathnet.ru/rus/timm1100>
14. Брёкер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977.
15. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрого действия с круговой индикатрисой // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 4. С. 82–99. <https://www.mathnet.ru/rus/timm59>
16. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Построение сингулярных кривых для обобщенных решений уравнений типа эйконала в условиях разрыва кривизны границы краевого множества // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 282–293. <https://www.mathnet.ru/rus/timm1281>
17. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей. М.: Мир, 1988. <https://zbmath.org/0664.58001>
18. Местецкий Л. М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15268701>
19. Nacu F., Sofonea M. History-dependent operators and prox-regular sweeping processes // Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering. 2022. Vol. 2022. Article number: 5. <https://doi.org/10.1186/s13663-022-00715-w>
20. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Альфа-множества и их оболочки: аналитические взаимосвязи в плоском случае // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 204–217. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217>
21. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. <https://zbmath.org/0929.53001>
22. Успенский А. А., Лебедев П. Д. О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 171–185. <https://www.mathnet.ru/rus/timm536>
23. Карлов М. И. Чебышёвский слой многообразий в гильбертовом пространстве // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1997. Т. 219. С. 235–248. <https://www.mathnet.ru/rus/tm617>
24. Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи математических наук. 1973. Т. 28. Вып. 6 (174). С. 3–66. <https://www.mathnet.ru/rus/rm4976>
25. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Нахождение величины чебышёвского слоя плоского множества с помощью конструкций теории альфа-множеств и опорных шаров Ефимова–Стечкина // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31. № 3. С. 264–280. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2025-31-3-264-280>

Поступила в редакцию 13.01.2026

Принята к публикации 02.03.2026

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620077, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

E-mail: pleb@yandex.ru

Успенский Александр Александрович, д. ф.-м. н., зав. сектором, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620077, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

E-mail: uspen@imm.uran.ru

Цитирование: П. Д. Лебедев, А. А. Успенский. Аналитические методы построения области дифференцируемости минимаксного решения в одном классе краевых задач для уравнений гамильтона типа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 1. С. 23–41.

P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii

Analytical methods for constructing the domain of differentiability of the minimax solution in a class of boundary value problems for a Hamilton type equation

Keywords: Bellman equation, minimax solution, alpha set, supporting ball, metric projection, bisector of a set, support ball, Chebyshev layer, control.

MSC2020: 52A10, 49Q15

DOI: [10.35634/vm260102](https://doi.org/10.35634/vm260102)

The differential properties of the minimax solution are investigated in a class of plane Dirichlet problems for the Bellman equation. The class of problems is defined by closed non-convex solid boundary sets whose boundaries contain pseudovertices, which are singular points associated with the singularity of the minimax solution. The differential properties of the solution depend on the order of smoothness of the boundary of the boundary set at the pseudovertices and on the cardinality of the values of the metric projection operator onto this set. The paper distinguishes between situations where the operator has single-point values and when the number of projections is greater than one. Using tools from the theory of alpha sets and Efimov–Stechkin support balls, the features of the characteristic function of a non-convex set are investigated. Formulas for its limit values are found, which in a fairly general case facilitate the construction of a Chebyshev layer of the boundary set, which is a region adjacent to the boundary set in which the minimax solution is differentiable. An example and its meaningful interpretation from the point of view of optimal control are given.

Funding. The study of the second author was funded by Russian Science Foundation, project no. 25-11-00269, <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>.

REFERENCES

1. Oleĭnik O. A. Discontinuous solutions of non-linear differential equations, *Seventeen papers on analysis*, Providence: American Mathematical Society, 1963, pp. 95–172. <https://zbmath.org/0131.31803>
2. Kružkov S. N. Generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations of eikonal type. I. Formulation of the problems; existence, uniqueness and stability theorems; some properties of the solutions, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1975, vol. 27, issue 3, pp. 406–446. <https://doi.org/10.1070/SM1975v027n03ABEH002522>
3. Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8>
4. Subbotin A. I. *Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhäuser, 1995. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1>
5. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988. <https://link.springer.com/book/9781461283188>
6. Dem'yanov V. F., Vasil'ev L. V. *Nondifferentiable optimization*, New York: Springer, 1985. <https://link.springer.com/book/9781461382706>
7. Ushakov V. N., Uspenskii A. A. α -sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 95–120 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm160109>
8. Efimov N. V., Stechkin S. B. Some supporting properties of sets in Banach spaces as related to Chebyshev's sets, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1959, vol. 127, no. 2, pp. 254–257 (in Russian). <https://zbmath.org/0095.08903>
9. Lebedev P. D., Uspenskii A. A. Analytical and numerical construction of the optimal outcome function for a class of time-optimal problems, *Computational Mathematics and Modeling*, 2008, vol. 19, no. 4, pp. 375–386. <https://doi.org/10.1007/s10598-008-9007-9>

10. Uspenskii A. A., Lebedev P. D. Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 59–73 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm180106>
11. Lebedev P. D., Uspenskii A. A. Numerical-analytic construction of a generalized solution to the eikonal equation in the plane case, *Sbornik: Mathematics*, 2024, vol. 215, no. 9, pp. 1224–1248. <https://doi.org/10.4213/sm9500e>
12. Ushakov V. N., Ershov A. A. On the relation between α -sets and weakly convex sets, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 276–285 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-4-276-285>
13. Uspenskii A. A. Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. S239–S254. <https://doi.org/10.1134/S0081543815090163>
14. Bröcker Th. *Differentiable germs and catastrophes*, Cambridge: Cambridge University Press, 1975. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107325418>
15. Lebedev P. D., Uspenskii A. A. Transversality conditions for solution branches of a nonlinear equation in a time-optimal control problem with a circular indicatrix, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2008, vol. 14, no. 4, pp. 82–99 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/timm59>
16. Uspenskii A. A., Lebedev P. D. The construction of singular curves for generalized solutions of eikonal-type equations with a curvature break in the boundary of the edge set, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. S191–S202. <https://doi.org/10.1134/S0081543817050212>
17. Bruce J. W., Giblin P. J. *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 2012. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139172615>
18. Mestetskii L. M. *Nepreryvnaya morfologiya binarnykh izobrazhenii: figury, skelety, tsirkulyary* (Continuous morphology of binary images: Figures, skeletons, circulars), Moscow: Fizmatlit, 2009. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15268701>
19. Nacry F., Sofonea M. History-dependent operators and prox-regular sweeping processes, *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering*, 2022, vol. 2022, article number: 5. <https://doi.org/10.1186/s13663-022-00715-w>
20. Uspenskii A. A., Lebedev P. D. Alpha sets and their hulls: analytical relationships in the plane case, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2024, vol. 29, no. 146, pp. 204–217 (in Russian). <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217>
21. Arnol'd V. I. *Singularities of caustics and wave fronts*, Dordrecht: Springer, 1990. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3330-2>
22. Uspenskii A. A., Lebedev P. D. On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront evolution, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. S255–S270. <https://doi.org/10.1134/S0081543811020180>
23. Karlov M. I. Chebyshev layer of manifolds in a Hilbert space, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1997, vol. 219, pp. 231–244. <https://www.mathnet.ru/eng/tm617>
24. Vlasov L. P. Approximative properties of sets in normed linear spaces, *Russian Mathematical Surveys*, 1973, vol. 28, issue 6, pp. 1–66. <https://doi.org/10.1070/RM1973v028n06ABEH001624>
25. Uspenskii A. A., Lebedev P. D. Finding the value of the Chebyshev layer of a flat set using constructions of the theory of alpha sets and Efimov–Stechkin support balls, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 264–280. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2025-31-3-264-280>

Received 13.01.2026

Accepted 02.03.2026

Pavel Dmitrievich Lebedev, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620077, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

E-mail: pleb@yandex.ru

Alexandr Alexandrovich Uspenskii, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620077, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

E-mail: uspen@imm.uran.ru

Citation: P.D. Lebedev, A.A. Uspenskii. Analytical methods for constructing the domain of differentiability of the minimax solution in a class of boundary value problems for a Hamilton type equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 1, pp. 23–41.