МАТЕМАТИКА 2026. Т. 36. Вып. 1. С. 56–81.

УДК 517.977.1

© *Г. Г. Петросян, М. С. Сорока*

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С КАУЗАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В работе исследуется задача управляемости для систем функциональных включений с каузальными операторами и импульсными характеристиками в банаховых пространствах. Основным результатом работы является глобальная теорема существования траекторий для систем, описываемых функциональными включениями с импульсными характеристиками. Доказательство основано на теории топологической степени для уплотняющих многозначных отображений. В качестве приложений основного результата получены обобщенные теоремы существования для систем двух важных классов: полулинейных дифференциальных включений первого порядка и полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $0 < q < 1$.

Ключевые слова: система включений, каузальный оператор, функциональное включение, мера некомпактности, неподвижная точка, топологическая степень, импульсные характеристики.

DOI: 10.35634/vm260104

Введение

Современное моделирование в теории управляемых систем и математической физике опирается на теорию дифференциальных уравнений и включений. В последние годы значительный интерес приобрели их обобщения — а именно, функциональные уравнения и включения с каузальными операторами (см. [1,2] и ссылки в них).

Понятие каузального оператора в смысле А. Н. Тихонова [3] представляет собой базовый инструмент для единого подхода к исследованию широкого класса задач. Оно позволяет изучать дифференциальные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения, функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием, интегральные уравнения Вольтерра, уравнения нейтрального типа и другие (см., например, [4–8]). Большое количество работ посвящено исследованию различных типов уравнений и включений с каузальными операторами, описанию качественных свойств их решений, а также изучению разнообразных приложений (см. [9–12]).

Например, статья [13] посвящена исследованию краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка с каузальным оператором и интегральным граничным условиям Римана–Стилтьеса:

$$\begin{cases} -u''(t) = Q(u)(t), \qquad t \in [0,1]; \\ \alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) = 0; \\ \alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = \displaystyle\int_0^1 u(t)\, d\mu(t). \end{cases}$$

Для получения достаточных условий существования решений авторы сначала формулируют новый принцип сравнения. Далее на основе теоремы о неподвижной точке доказывают существование и единственность решения.

Каузальные операторы широко применяются для исследования эволюционных задач различных классов (см. [14–16]). В работе [15] авторы, с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке, в вещественном сепарабельном банаховом пространстве E, исследуют существование решения дробного эволюционного уравнения с каузальным оператором Q следующего вида:

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = Au(t) + (Qu)(t) & \text{для п. в.} \;\; t \in [0, b]; \\ u|_{[-\sigma,0]} = \psi \in C([-\sigma, 0]; E). \end{cases}$$

Исследованию нелокальных задач, описываемых многозначными возмущениями m-диссипативных эволюционных уравнений с многозначными членами, зависящими от каузальных операторов, посвящена работа [16].

Работа [17] посвящена изучению в конечномерном пространстве дифференциального включения

$$u'(t) \in F(u)(t)$$

с каузальным многозначным оператором F. С помощью метода негладких направляющих функций, авторами были доказаны теоремы существования решений задачи Коши для данного включения, как в случае, когда многозначный оператор является замкнутым выпуклым, так и в случае невыпуклой полунепрерывной снизу правой части.

Отметим статью [18], в которой авторами в банаховом пространстве была рассмотрена обобщенная граничная задача для управляемой системы с обратной связью, описываемая дифференциальным включением

$$D^q x(t) \in Ax(t) + F(x)(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T],$$

с дробной производной и каузальным оператором F.

В статье [19] исследована задача управляемости для функционального включения с каузальными операторами $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$ и импульсными функциями следующего вида:

$$y(t) \in \mathcal{G}(t)\Big(\psi(0) + \sum_{t_k<t} I_k\big(y(t_k)\big)\Big) + \mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y)(t) + \mathcal{S} \circ Bu(t), \quad t \in [0, T],$$
$$y(t) = \psi(t), \quad t \in (-\infty, 0],$$
$$I_k y(t_k) = y(t_k^+) - y(t_k), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Настоящая работа развивает данное направление, исследуя задачу управляемости для систем функциональных включений с каузальными операторами и импульсными характеристиками в банаховых пространствах. Основной результат — глобальная теорема о существовании решений, доказательство которой основано на теории топологической степени для уплотняющих многозначных отображений. В качестве приложений основного результата приведены обобщенные теоремы существования для двух важных классов систем: полулинейных дифференциальных включений первого порядка и полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $0 < q < 1$.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Мера некомпактности

Обозначим через $\mathcal{E}$ банахово пространство и введем следующие обозначения:

- $P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} \colon A \neq \varnothing\}$ — совокупность всех непустых подмножеств $\mathcal{E}$;
- $Pb(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) \colon A$ ограничено$\}$;
- $Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) \colon A$ выпукло$\}$;
- $C(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) \colon A$ замкнуто$\}$;

- $Cv(\mathcal{E}) = Pv(\mathcal{E}) \cap C(\mathcal{E})$;
- $K(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E})\colon A$ компактно$\}$;
- $Kv(\mathcal{E}) = Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})$.

Определение 1.1 (см. [20]). Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ частично упорядоченное множество. Функция $\beta\colon Pb(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ *называется мерой некомпактности* в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется:

$$\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

(a) *монотонной*, если для любых Ω_0, $\Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$ из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$;

(b) *несингулярной*, если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$;

(c) *инвариантной относительно объединения с компактным множеством*, если $\beta(\Omega \cup K) = \beta(\Omega)$ для любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ и относительно компактного множества $K \subset \mathcal{E}$;

(d) *вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется:

(e) *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для любых Ω_0, $\Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$;

(f) *правильной*, если $\beta(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности Ω.

Примером вещественной меры некомпактности в пространстве $\mathcal{E}$, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является *мера некомпактности Хаусдорфа*:

$$\chi_{\mathcal{E}}(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

1.2. Многозначные отображения

Пусть X — метрическое пространство, а Y — нормированное пространство. Нам потребуются следующие утверждения (см., например, [21,22]).

Определение 1.2. Многозначное отображение $\mathcal{F}\colon X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху в точке $x \in X$, если для всякого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $\mathcal{F}(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $\mathcal{F}(U(x)) \subset V$.

Определение 1.3. Многозначное отображение $\mathcal{F}\colon X \to P(Y)$ называется замкнутым, если его график $G_{\mathcal{F}} = \big\{(x,y)\colon x \in X,\ y \in \mathcal{F}(x)\big\}$ является замкнутым подмножеством в $X \times Y$.

Определение 1.4. Многозначное отображение $\mathcal{F}\colon X \to P(Y)$ называется квазикомпактным, если его сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Определение 1.5. Для заданного $p \geqslant 1$ многозначное отображение $G\colon [0,T] \to K(Y)$ называется:

- L^p-интегрируемым, *если оно допускает L^p-интегрируемое сечение по Бохнеру, т. е. существует функция $g \in L^p([0,T];Y)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$*;

- L^p-интегрально ограниченным, *если существует функция $\xi \in L^p([0,T];Y)$ такая, что $\|G(t)\|_Y \leqslant \xi(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$*.

Определение 1.6. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];\mathcal{E})$ называется L^p-полукомпактной, если она L^p-интегрально ограничена, т. е. $\|\xi_n(t)\|_{\mathcal{E}} \leqslant v(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$ и для всех $n = 1, 2, \ldots$, где $v \in L^p[0,T]$, и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в $\mathcal{E}$ для п. в. $t \in [0,T]$.

Лемма 1.1 (см. [21, предложение 4.2.1]). *Всякая L^p-полукомпактная последовательность является слабо компактной в $L^1([0,T];\mathcal{E})$.*

Определение 1.7. Многозначное отображение $\mathcal{F}\colon X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности β (или β-уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполняется:

$$\beta(\mathcal{F}(\Omega)) \ngeqslant \beta(\Omega).$$

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ — непустое замкнутое выпуклое множество, V — непустое ограниченное открытое подмножество $\mathcal{D}$, β — монотонная несингулярная мера некомпактности в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}\colon \overline{V} \to Kv(\mathcal{D})$ — полунепрерывное сверху β-уплотняющее отображение такое, что $x \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x \in \partial V$, где $\overline{V}$ и ∂V обозначают замыкание и границу множества V в относительной топологии $\mathcal{D}$. Тогда определена (относительная) топологическая степень $\deg_{\mathcal{D}}(i - \mathcal{F}, \overline{V})$ соответствующего векторного поля $i - \mathcal{F}$, удовлетворяющая стандартным свойствам (см., например, [21,22]). В частности, условие $\deg_{\mathcal{D}}(i - \mathcal{F}, \overline{V}) \neq 0$ влечет за собой то, что множество неподвижных точек $\operatorname{Fix}\mathcal{F} = \{x\colon x \in \mathcal{F}(x)\}$ является непустым подмножеством V. Применение теории топологической степени приводит к следующему принципу неподвижной точки, который будет использован далее.

Теорема 1.1 (см. [21, теорема 3.3.4]). *Пусть $V \subset \mathcal{D}$ — ограниченная открытая окрестность точки $a \in V$ и $\mathcal{F}\colon \overline{V} \to Kv(\mathcal{D})$ — полунепрерывное сверху β-уплотняющее многозначное отображение, где β — монотонная несингулярная мера некомпактности в $\mathcal{E}$, удовлетворяющая граничному условию $x - a \notin \lambda\big(\mathcal{F}(x) - a\big)$ для всех $x \in \partial V$ и $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда* $\operatorname{Fix}\mathcal{F} \neq \emptyset$.

1.3. Каузальные многозначные операторы

Пусть $\mathcal{E}$ — сепарабельное банахово пространство. Через $L^p([0,T];\mathcal{E})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим банахово пространство всех суммируемых по Бохнеру функций $f\colon [0,T] \to \mathcal{E}$ с обычной нормой.

Для каждого подмножества $\mathcal{N} \subset L^p([0,T];\mathcal{E})$ и $\tau \in (0,T)$ определим сужение $\mathcal{N}$ на $[0,\tau]$ как $\mathcal{N}\big|_{[0,\tau]} = \big\{f\big|_{[0,\tau]}\colon f \in \mathcal{N}\big\}$.

Разобьем отрезок $[0,T]$ точками $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$, $m \geqslant 1$. Для функции $c\colon [0,T] \to \mathcal{E}$ определим

$$c(t_k^+) = \lim_{\xi \to 0+} c(t_k + \xi), \qquad c(t_k^-) = \lim_{\xi \to 0-} c(t_k + \xi),$$

где $k = 1, \ldots, m$.

Будем предполагать, что функция $z\colon [0,T] \to \mathcal{E}$ принадлежит пространству $\mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E})$, если она непрерывна на $J := [0,T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$ и для нее существуют левый и правый пределы $z(t_k^+)$ и $z(t_k^-)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, причем $z(t_k^-) = z(t_k)$.

Пространство $\mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E})$, наделенное нормой

$$\|z\|_{\mathcal{PC}} = \sup_{t \in J} \|z(t)\|_{\mathcal{E}},$$

является банаховым пространством, а классическое пространство непрерывных функций $C([0,T],\mathcal{E})$ — его замкнутое подпространство.

Пусть $t_0 = 0$ и $t_{m+1} = T$. Тогда для $z \in \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E})$ обозначим через $\widehat{z}_k \in C([t_k, t_{k+1}]; E)$, $k = 0, \dots, m$, функции, заданные как: $\widehat{z}_k(t) = z_k(t)$, $t \in (t_k, t_{k+1}]$; $\widehat{z}_k(t_k) = z_k(t_k^+)$. Более того, для множества $D \subset \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E})$ обозначим через $\widehat{D}_k$, $k = 0, \dots, m$, множества $\widehat{D}_k = \{\widehat{z}_k \colon z \in D\}$.

Легко проверить следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Множество $D \subset \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E})$ относительно компактно в $\mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда множества $\widehat{D}_k$, $k = 0, \dots, m$, относительно компактны в $C([t_k, t_{k+1}];\mathcal{E})$.*

Последнее утверждение вместе с теоремой Арцела–Асколи дает следующий критерий относительной компактности множества в пространстве $\mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E})$.

Лемма 1.3. *Для того чтобы множество $D \subset \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E})$ являлось относительно компактным в пространстве $\mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E})$ необходимо и достаточно, чтобы D являлось равностепенно непрерывным на каждом промежутке (t_k, t_{k+1}), $k = 0, \dots, m$, и множества $D(t) = \{z(t) \colon z \in D\}$ были относительно компактными в $\mathcal{E}$ для всех $t \in J$.*

Определение 1.8. Многозначное отображение $\mathcal{Q}\colon \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E}) \multimap L^p([0,T];\mathcal{E})$ называется каузальным многозначным оператором, если для каждого $\tau \in (0,T)$ и для любых $u, v \in \mathcal{PC}([0,T];\mathcal{E})$ условие $u\big|_{[0,\tau]} = v\big|_{[0,\tau]}$ влечет $\mathcal{Q}(u)\big|_{[0,\tau]} = \mathcal{Q}(v)\big|_{[0,\tau]}$.

Приведем примеры каузальных многозначных операторов.

Пример 1.1. Предположим, что многозначное отображение $F\colon J \times \mathcal{E} \to Kv(\mathcal{E})$ удовлетворяет следующим условиям:

(F$_1$) для каждого $\phi \in \mathcal{E}$ многозначная функция $F(\cdot, \phi)\colon J \to Kv(\mathcal{E})$ допускает измеримое сечение;

(F$_2$) для п. в. $t \in J$ многозначное отображение $F(t, \cdot)\colon \mathcal{E} \to Kv(\mathcal{E})$ является полунепрерывным сверху;

(F$_3$) существует функция $\alpha \in L^p_+[0,T]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, такая, что

$$\|F(t,\phi)\|_{\mathcal{E}} := \sup\big\{\|z\|_{\mathcal{E}} \colon z \in F(t,\phi)\big\} \leqslant \alpha(t)\big(1 + \|\phi\|_{\mathcal{E}}\big)$$

для п. в. $t \in J$ и $\phi \in \mathcal{E}$.

Из условий (F$_1$)–(F$_3$) следует, что многозначное отображение

$$\mathcal{P}_F\colon \mathcal{PC}([0;T];\mathcal{E}) \to P\big(L^p([0,T];\mathcal{E})\big), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

заданное следующим образом

$$\mathcal{P}_F(x) = \big\{f \in L^p([0,T];\mathcal{E}) \colon f(t) \in F(t, x(t)) \ \text{ для п. в. } t \in J\big\},$$

корректно определено (см. [21, пункт 1.3.3] или [22, пункт 1.5.3]). Очевидно, что многозначный оператор $\mathcal{P}_F$ является каузальным.

Пример 1.2. Пусть $E_1, \dots, E_n$ — сепарабельные банаховы пространства. Введем в рассмотрение банахово пространство

$$E = E_1 \times \dots \times E_n$$

с нормой

$$\|x\|_E = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|_{E_i},$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$. Предположим, что многозначное отображение $F\colon J \times E \to Kv(E)$ имеет вид $F(t,x) = F_1(t,x) \times \ldots \times F_n(t,x)$, и каждый многозначный оператор $F_i\colon J \times E \to Kv(E_i)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяет следующим условиям:

($\mathbf{F}_{1i}$) для каждого $x \in E$ многозначная функция $F_i(\cdot, x)\colon J \to Kv(E_i)$ допускает измеримое сечение;

($\mathbf{F}_{2i}$) для п. в. $t \in J$ многозначное отображение $F_i(t, \cdot)\colon E \to Kv(E_i)$ является полунепрерывным сверху;

($\mathbf{F}_{3i}$) существуют функции $\alpha_i \in L_+^{p_i}[0, T]$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, такие, что

$$\|F_i(t, \phi_i)\|_{E_i} \leqslant \alpha_i(t)\big(1 + \|\phi_i\|_{E_i}\big)$$

для п. в. $t \in J$ и $\phi_i \in E_i$.

Чтобы сформулировать условие регулярности для многозначных отображений F_i, введем в пространстве E векторную меру некомпактности Хаусдорфа $\mathcal{X}$.

Пусть для ограниченного множества $\Omega \subset E$:

$$\mathcal{X}(\Omega) = \big(\chi_1(\Omega_1), \ldots, \chi_n(\Omega_n)\big)^T \in \mathbb{R}_+^n,$$

где χ_i — мера некомпактности Хаусдорфа в E_i, Ω_i обозначает проекцию множества Ω на E_i, $i = 1, \ldots, n$.

Теперь предположим, что многозначная нелинейность F удовлетворяет следующему условию $\mathcal{X}$-регулярности:

($\mathbf{F}_{4i}$) существуют функции $\mu_i \in L_+^{\infty}[0, T]$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$ выполняется:

$$\mathcal{X}\big(F(t, \Omega)\big) \leqslant \mathcal{M}(t)\mathcal{X}(\Omega) \ \text{ п. в. } t \in J,$$

где матрица $\mathcal{M}(t)$ имеет вид:

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n(t) \end{pmatrix}.$$

Из условий ($\mathbf{F}_{1i}$)–($\mathbf{F}_{3i}$) следует, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ многозначное отображение $\mathcal{P}_{F_i}\colon \mathcal{PC}\big([0, T]; E_i\big) \to Cv\big(L^{p_i}([0, T]; E_i)\big)$, заданное следующим образом

$$\mathcal{P}_{F_i}(x) = \big\{f_i \in L^{p_i}([0, T]; E_i)\colon f_i(t) \in F_i(t, x(t)) \ \text{ для п. в. } t \in J\big\},$$

корректно определено, и каждый многозначный оператор $\mathcal{P}_{F_i}$ является каузальным.

Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{PC}\big([0, T]; E_1\big) \times \mathcal{PC}\big([0, T]; E_2\big) \times \cdots \times \mathcal{PC}\big([0, T]; E_n\big)$. Рассмотрим каузальные операторы $\mathcal{Q}_i\colon \mathcal{C} \to Cv\big(L^{p_i}\big([0, T]; E_i\big)\big)$, $i = 1, \ldots, n$, в том смысле, что для каждого $\tau \in (0, T)$ и для любых $u, v \in \mathcal{C}$ условие $u\big|_{[0,\tau]} = v\big|_{[0,\tau]}$ влечет $\mathcal{Q}_i(u)\big|_{[0,\tau]} = \mathcal{Q}_i(v)\big|_{[0,\tau]}$.

Пусть $\mathcal{Q}_i$ удовлетворяют следующим условиям:

($\mathcal{Q}_{1i}$) $\mathcal{Q}_i$ являются слабо замкнутыми в следующем смысле: условия

$$\big\{x^\eta\big\}_{\eta=1}^\infty \subset \mathcal{C}, \qquad \big\{f_i^\eta\big\}_{\eta=1}^\infty \subset L^{p_i}([0, T]; E_i), \quad 1 \leqslant p_i \leqslant \infty, \qquad f_i^\eta \in \mathcal{Q}_i(x^\eta), \quad \eta \geqslant 1,$$

$$x^\eta \to x^0, \qquad f_i^\eta \overset{L^1}{\rightharpoonup} f_i^0$$

влекут $f_i^0 \in \mathcal{Q}_i(x^0)$, $i = 1, \ldots, n$;

($\mathcal{Q}_{2i}$) существуют функции $\alpha_i \in L^\infty_+[0,T]$ такие, что

$$\|\mathcal{Q}_i(x)(t)\|_{E_i} \leqslant \alpha_i(t)\big(1+\|x_i(t)\|_{E_i}\big) \text{ для п. в. } t \in J,$$

для всех $x_i \in \mathcal{PC}([0,T];E_i)$;

($\mathcal{Q}_{3i}$) существуют функции $\omega_i\colon J \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такие, что

(ω_1) для всех $x \in \mathbb{R}_+$ $\omega_i(\cdot,x) \in L^{p_i}_+[0,T]$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$;

(ω_2) для п. в. $t \in J$ функции $\omega_i(t,\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывны, не убывают и квазиоднородны в смысле $\omega_i(t,\lambda x) \leqslant \lambda\omega_i(t,x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \geqslant 0$;

(ω_3) для ограниченного множества $\Delta \subset \mathcal{C}$ выполняется

$$\chi_i\big(\mathcal{Q}_i(\Delta)(t)\big) \leqslant \omega_i\big(t,\varphi_i\big(\Delta_i(s)\big)\big) \text{ для п. в. } t \in J,$$

где множество $\Delta_i(s) = \big\{y_i(s)\colon y_i \in \Delta_i\big\} \subset E_i$ и $\varphi_i\big(\Delta_i(s)\big) = \sup\limits_{s\in[0,t]} \chi_i\big(\Delta_i(s)\big)$ — модуль послойной некомпактности в $\mathcal{PC}([0,T];E_i)$.

Заметим, что условие (ω_2) означает, что $\omega_i(t,0)=0$ для п. в. $t \in J$ и в качестве примера таких функций можно рассмотреть $\omega_i(t,x) = k_i(t)\cdot x$, где $k_i(\cdot) \in L^{p_i}_+[0,T]$.

Рассмотрим линейные операторы $\mathcal{S}_i\colon L^{p_i}([0,T];E_i) \to \mathcal{PC}([0,T];E_i)$, $i=1,\ldots,n$, которые являются каузальными в том смысле, что для каждого $\tau \in (0,T)$ и $f_i, g_i \in L^{p_i}([0,T];E_i)$ условие $f_i(t) = g_i(t)$ для п. в. $t \in [0,\tau]$ влечет $(\mathcal{S}_i f_i)(t) = (\mathcal{S}_i g_i)(t)$ для всех $t \in [0,\tau]$.

Следуя [21, пункт 5.1], наложим следующие условия на операторы $\mathcal{S}_i$, $i=1,\ldots,n$:

($\mathcal{S}_{1i}$) для $1 \leqslant p_i < \infty$ существуют $D_i \geqslant 0$ такие, что

$$\|\mathcal{S}_i f_i(t) - \mathcal{S}_i g_i(t)\|^{p_i}_{E_i} \leqslant D_i \int_0^t \|f_i(s)-g_i(s)\|^{p_i}_{E_i}\,ds$$

для всех $f_i, g_i \in L^{p_i}([0,T];E_i)$ и $t \in J$;
если $p_i = \infty$, то существуют $D_i^1 \geqslant 0$ такие, что

$$\|\mathcal{S}_i f_i(t) - \mathcal{S}_i g_i(t)\|_{E_i} \leqslant D_i^1 \int_0^t \|f_i(s)-g_i(s)\|_{E_i}\,ds$$

для всех $f_i, g_i \in L^\infty([0,T];E_i)$ и $t \in J$.

($\mathcal{S}_{2i}$) для произвольных компактных множеств $K_i \subset E_i$ и последовательностей $\big\{f_{in}\big\}_{n=1}^\infty \subset L^{p_i}([0,T];E_i)$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, таких, что $\big\{f_{in}(t)\big\}_{n=1}^\infty \subset K_i$ для всех $t \in J$, слабая сходимость $f_{in} \overset{L^1}{\rightharpoonup} f_{i0}$ влечет $\mathcal{S}_i f_{in} \to \mathcal{S}_i f_{i0}$ в $\mathcal{PC}([0,T];E_i)$.

Также предположим, что $\mathcal{S}_i$ удовлетворяет соотношению:

($\mathcal{S}_{3i}$) $(\mathcal{S}_i f_i)(0) = 0$ для каждой функции $f_i \in L^{p_i}([0,T];E_i)$.

Заметим, что из условия ($\mathcal{S}_{1i}$) следует, что операторы $\mathcal{S}_i$ удовлетворяют условию Липшица:

($\mathcal{S}'_{1i}$) $\|\mathcal{S}_i f_i - \mathcal{S}_i g_i\|_C \leqslant D_i\|f_i - g_i\|_{L^1}$.

Рассмотрим следующие важные примеры.

(i) Пусть замкнутые линейные операторы $A_i\colon D(A_i) \subset E_i \to E_i$ порождают C_0-полугруппы $\big\{e^{A_i t}\big\}_{t\in[0,T]}$. Операторы $\mathcal{L}_i\colon L^1([0,T];E_i) \to C([0,T];E_i)$, определенные как

$$\mathcal{L}_i f(t) = \int_0^t e^{A_i(t-s)} f(s)\,ds,$$

являются частными случаями операторов $\mathcal{S}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Заметим, что при $A_i = 0$ мы получаем, как частный случай, обычный интегральный оператор $\mathcal{L}_i^I\colon L^1([0,T];E_i) \to C([0,T];E_i)$,

$$\mathcal{L}_i^I f(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$$

(ii) Пусть $A_i\colon D(A_i) \subset E_i \to E_i$ — замкнутые линейные операторы, порождающие C_0-полугруппы $\{U_i(t)\}_{t\in[0,T]}$. Операторы $G_i\colon L^{p_i}([0,T];E_i) \to C([0,T];E_i)$, $p_i > 1/q_i$, определенные следующим образом

$$G_i f(t) = \int_0^t (t-s)^{q_i-1}\mathcal{T}_i(t-s)f(s)\,ds, \quad 0 < q_i < 1,$$

где

$$\mathcal{T}_i(t) = q_i\int_0^\infty \theta\xi_{q_i}(\theta)U_i(t^{q_i}\theta)\,d\theta, \qquad \xi_{q_i}(\theta) = \frac{1}{q_i}\theta^{-1-\frac{1}{q_i}}\Psi_{q_i}(\theta^{-1/q_i}), \tag{1.1}$$

$$\Psi_{q_i}(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-q_in-1}\frac{\Gamma(nq_i+1)}{n!}\sin(n\pi q_i), \quad \theta\in\mathbb{R}^+,$$

являются частными случаями операторов $\mathcal{S}_i$.

Лемма 1.4 (см. [21, лемма 4.2.1], [23, лемма 3.4]). *Операторы $\mathcal{L}_i$ и G_i удовлетворяют условиям $(\mathcal{S}_{1i})$–$(\mathcal{S}_{3i})$.*

§ 2. Основные результаты

Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — сепарабельные банаховы пространства и $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. Рассмотрим задачу управляемости для систем функциональных включений с многозначными каузальными операторами $\mathcal{Q}_i\colon \mathcal{C} \to Cv\big(L^{p_i}([0,T];E_i)\big)$ и линейными каузальными операторами $\mathcal{S}_i\colon L^{p_i}([0,T];E_i) \to C([0,T];E_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, следующего вида:

$$\begin{cases} x_1(t) \in \mathcal{G}_1(t)x_1^0 + \sum\limits_{t_k<t}\mathcal{G}_1(t-t_k)I_{k1}\big(x_1(t_k)\big) + \mathcal{S}_1\circ\mathcal{Q}_1(x)(t) + \mathcal{S}_1\circ\mathcal{B}_1u(t), & t\in J;\\ x_2(t) \in \mathcal{G}_2(t)x_2^0 + \sum\limits_{t_k<t}\mathcal{G}_2(t-t_k)I_{k2}\big(x_2(t_k)\big) + \mathcal{S}_2\circ\mathcal{Q}_2(x)(t) + \mathcal{S}_2\circ\mathcal{B}_2u(t), & t\in J;\\ \ldots \\ x_n(t) \in \mathcal{G}_n(t)x_n^0 + \sum\limits_{t_k<t}\mathcal{G}_n(t-t_k)I_{kn}\big(x_n(t_k)\big) + \mathcal{S}_n\circ\mathcal{Q}_n(x)(t) + \mathcal{S}_n\circ\mathcal{B}_nu(t), & t\in J; \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}$, $I_{ki}\colon E_i \to E_i$ — импульсные функции, функция управления $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ рассматривается в пространстве $L^\infty([0,T];\mathcal{U})$, $\mathcal{U} := \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}_i$ — банаховы пространства управлений, $\mathcal{B}_i\colon \mathcal{U} \to E_i$ — линейные ограниченные операторы, $i = 1, \ldots, n$, и оператор-функции $\mathcal{G}_i(\cdot)$ заданы следующим соотношением

$$\mathcal{G}_i(t) = \int_0^\infty \xi_{q_i}(\theta)U_i(t^{q_i}\theta)\,d\theta, \quad i = 1, \ldots, n,$$

в котором $\xi_{q_i}(\cdot)$ определены по формуле (1.1), а $U_i(\cdot)$ — C_0-полугруппы.

Будем рассматривать систему в предположении, что она удовлетворяет начальным условиям

$$x_1(0) = x_1^0 \in E_1, \quad x_2(0) = x_2^0 \in E_2, \quad \ldots, \quad x_n(0) = x_n^0 \in E_n; \tag{2.2}$$

и импульсным воздействиям

$$x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - I_{ki}x_i(t_k), \quad k = 1, \dots, m. \tag{2.3}$$

Определим в пространстве $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_n$ норму следующим образом:

$$\|u\|_{\mathcal{U}} = \max_{i=1,\dots,n} \|u_i\|_{\mathcal{U}_i}.$$

Сделаем стандартное предположение о разрешимости соответствующей линейной задачи. Будем полагать, что соответствующие линейные задачи разрешимы, то есть линейные операторы управления $W_i\colon L^\infty([0,T];\mathcal{U}) \to E_i$ следующего вида

$$W_i u = \psi_i \circ \mathcal{S}_i \circ \mathcal{B}_i(u)(t),$$

где линейные операторы $\psi_i\colon C([0,T];E_i) \to E_i$ определены как $\psi_i x_i = x_i(T)$, имеют правые обратные ограниченные операторы W_i^{-1}, $i = 1, \dots, n$. Для формулировки следующего условия, накладываемого на операторы W_i^{-1}, $i = 1, \dots, n$, введем в пространстве $\mathcal{U}$ векторную меру некомпактности Хаусдорфа $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}$, определенную для ограниченного множества $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$ как

$$\mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}) = \left(\chi_1^{\mathcal{U}}(\mathcal{O}_1), \dots, \chi_n^{\mathcal{U}}(\mathcal{O}_n)\right)^T \in \mathbb{R}_+^n,$$

где $\chi_i^{\mathcal{U}}$ — мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве $\mathcal{U}_i$, а $\mathcal{O}_i$ обозначает проекцию множества $\mathcal{O}$ на $\mathcal{U}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Будем предполагать, что операторы W_i^{-1}, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условию $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}$-регулярности:

(W) существуют функции $\phi_i \in L_+^\infty[0,T]$, $i = 1, \dots, n$, такие, что для любого ограниченного множества $\Omega_i \subset E_i$ выполнено

$$\mathcal{X}_{\mathcal{U}}\big(W_i^{-1}(\Omega_i)(t)\big) \leqslant \Phi(t)\mathcal{X}(\Omega) \ \text{ п. в. } \ t \in [0,T],$$

где матрица $\Phi(t)$ имеет вид:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \phi_n(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть M_i', M_i'' — положительные числа, такие, что

$$\|\mathcal{B}_i\| \leqslant M_i', \qquad \|W_i^{-1}\| \leqslant M_i''. \tag{2.4}$$

Предположим, что импульсные функции I_{ki}, $k = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям:

(I_1) функции $I_{ki}\colon E_i \to E_i$ вполне непрерывны;

(I_2) функции $I_{ki}\colon E_i \to E_i$ глобально ограничены, т. е. существуют числа $N_i > 0$ такие, что $\|I_{ki}x_i\|_{E_i} \leqslant N_i$ для всех $x_i \in E_i$.

Лемма 2.1 (см. [24]). *Операторные функции $\mathcal{G}_i$ и $\mathcal{T}_i$ обладают следующими свойствами для всех $i = 1, \dots, n$:*

(1) *для всех $t \in [0,T]$, $\mathcal{G}_i(t)$ и $\mathcal{T}_i(t)$ являются ограниченными линейными операторами, т. е. для всех $x_i \in E_i$:*

$$\|\mathcal{G}_i(t)x_i\|_{E_i} \leqslant M_i\|x_i\|_{E_i}, \qquad \|\mathcal{T}_i(t)x_i\|_{E_i} \leqslant \frac{M_i}{\Gamma(q_i)}\|x_i\|_{E_i}, \tag{2.5}$$

где $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|U_i(t)\| = M_i$.

(2) *операторные функции* $\mathcal{G}_i(\cdot)$ *и* $\mathcal{T}_i(\cdot)$ *сильно непрерывны, т. е. функции* $t \in [0,T] \to \mathcal{G}_i(t)x_i$ *и* $t \in [0,T] \to \mathcal{T}_i(t)x_i$ *непрерывны для всех* $x_i \in E_i$.

Определение 2.1. Функция $x \in \mathcal{C}$, $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, называется интегральным решением задачи (2.1)–(2.3), если она удовлетворяет условиям:

(1) функции $x_i \in \mathcal{PC}([0,T]; E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, и удовлетворяют включениям (2.1);

(2) $x_1(0) = x_1^0, \ldots, x_n(0) = x_n^0$;

(3) $I_{ki}x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k)$, $k = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$.

Теперь задачу управляемости можно сформулировать следующим образом: для заданных начальных условий $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ и заданных $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in E$, мы рассматриваем существование интегрального решения $x \in \mathcal{C}$, $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, задачи (2.1)–(2.3) и управления $u \in \mathcal{U}$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$, такого, что каждое

$$x_i(T) = \xi_i. \tag{2.6}$$

Пару (x, u) будем называть решением задачи (2.1)–(2.3), (2.6).

Рассмотрим многозначные операторы $\Gamma_i\colon \mathcal{C} \multimap \mathcal{PC}([0,T]; E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, определенные следующим образом

$$\Gamma_i(x)(t) = \mathcal{G}_i(t)x_i^0 + \sum_{t_k<t} \mathcal{G}_i(t-t_k)I_{ki}\big(x_i(t_k)\big) + \mathcal{S}_i \circ \mathcal{Q}_i(x)(t) +$$
$$+ \mathcal{S}_i \circ \mathcal{B}_i W_i^{-1}\Big(\xi_i - \mathcal{G}_i(T)x_i^0 - \sum_{t_k<t} \mathcal{G}_i(T-t_k)I_{ki}\big(x_i(t_k)\big) - \psi_i \circ \mathcal{S}_i \circ \mathcal{Q}_i(x)(t)\Big).$$

Нам потребуются следующие свойства операторов $\mathcal{S}_i$ и $\mathcal{Q}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку для каждого $1 < p_i \leqslant \infty$ $L^{p_i}([0,T]; E_i) \subset L^1([0,T]; E_i)$, мы можем сформулировать модификацию теоремы 5.1.1 из [21] в следующем виде.

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathcal{S}_i\colon L^{p_i}([0,T]; E_i) \to C([0,T]; E_i)$ — *операторы, удовлетворяющие условиям* $(\mathcal{S}_{1i})$ *и* $(\mathcal{S}_{2i})$. *Тогда для каждой* L^{p_i}*-полукомпактной последовательности* $\{f_{in}\}_{n=1}^{\infty} \subset$ $\subset L^{p_i}([0,T]; E_i)$, *последовательность* $\{\mathcal{S}_i f_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ *относительно компактна в* $C([0,T]; E_i)$ *и, кроме того, слабая сходимость* $f_{in} \overset{L^1}{\rightharpoonup} f_{i0}$ *подразумевает, что* $\mathcal{S}_i f_{in} \to \mathcal{S}_i f_{i0}$ *в* $C([0,T]; E_i)$.

Теорема 2.1 (см. [19]). *Пусть многозначные операторы* $\mathcal{Q}_i$ *удовлетворяют условиям* $(\mathcal{Q}_{1i})$–$(\mathcal{Q}_{3i})$, *а операторы* $\mathcal{S}_i$ *удовлетворяют условиям* $(\mathcal{S}_{1i})$, $(\mathcal{S}_{2i})$, $i = 1, \ldots, n$.

Тогда $\mathcal{S}_i \circ \mathcal{Q}_i\colon \mathcal{C} \multimap C([0,T]; E_i)$ — *полунепрерывные сверху отображения с компактными значениями.*

Для доказательства того факта, что $\mathcal{S}_i \circ \mathcal{Q}_i$ являются уплотняющими относительно соответствующей меры некомпактности нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 2.3 (см. [19]). *Пусть последовательность функций* $\{f_{in}\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{p_i}([0,T]; E_i)$ *является* L^{p_i}*-интегрально ограниченной и существуют функции* $\upsilon_i \in L_+^{p_i}([0,T]; E_i)$ *такие, что*

$$\chi_i\big(\{f_{in}(t)\}_{n=1}^{\infty}\big) \leqslant \upsilon_i(t) \ \ \textit{для п. в.} \ \ t \in [0,T].$$

Если операторы $\mathcal{S}_i$ *удовлетворяют условиям* $(\mathcal{S}_{1i})$ *и* $(\mathcal{S}_{2i})$, *тогда для* $1 \leqslant p_i < \infty$ *выполнено*

$$\chi_i\big(\{\mathcal{S}_i f_{in}(t)\}_{n=1}^{\infty}\big) \leqslant \left(4^{p_i} D_i \int_0^t \upsilon_i^{p_i}(s)\, ds\right)^{1/p_i},$$

и для $p_i = \infty$

$$\chi_i\big(\{\mathcal{S}_i f_{in}(t)\}_{n=1}^{\infty}\big) \leqslant 2D_i^1 \int_0^t \upsilon_i(s)\, ds,$$

где D_i, D_i^1 — *константы из условия* $(\mathcal{S}_{1i})$.

Рассмотрим меру некомпактности ν в пространстве $\mathcal{C}$ со значениями в конусе $\mathbb{R}^{2n}_+$:

$$\nu(\Delta) = \big(\nu_1(\Delta_1), \ldots, \nu_n(\Delta_n)\big),$$

где $\Delta_i \subset \mathcal{PC}([0,T];E_i)$ — проекция множества Δ на E_i,

$$\nu_i(\Delta_i) = \big(\gamma_i(\Omega_i), \mathrm{mod}_C(\Omega_i)\big), \quad i = 1, \ldots, n,$$

mod_C — модуль равностепенной непрерывности

$$\mathrm{mod}_C(\Omega_i) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{y\in\Omega_i} \max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|_{E_i},$$

γ_i — затухающий модуль послойной некомпактности

$$\gamma_i(\Omega_i) = \sup_{t\in[0,T]} e^{-L_i t}\chi_i\big(\Omega_i(t)\big).$$

Константы $L_i > 0$ выбраны так, что

$$\max\Big\{\max_{i=1,\ldots,n}\{l_{1i}\}, \max_{i=1,\ldots,n}\{l_{2i}\}\Big\} < 1,$$

где

$$l_{1i} = 4D_i^{1/p_i}\big(1 + 4D_i^{1/p_i}M_i'\phi_i\|\psi_i\|T^{1/p_i}\big) \sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t e^{-p_iL_i(t-s)}\omega_i^{p_i}(s,1)\,ds\right)^{1/p_i},$$

$$l_{2i} = 2D_i^1\big(1 + 2D_i^1M_i'\phi_i\|\psi_i\|T\big) \sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t e^{-L_i(t-s)}\omega_i(s,1)\,ds\right),$$

где D_i, D_i^1 — константы из условия $(\mathcal{S}_{1i})$, ω_i — функции из условия $(\mathcal{Q}_{3i})$, $\phi_i = \sup\limits_{t\in[0,T]} \phi_i(t)$ из условия (W).

Очевидно, что мера некомпактности ν — монотонная, несингулярная и алгебраически полуаддитивная. Из теоремы Арцела–Асколи следует, что она также является регулярной.

Наша цель — изучить многозначный оператор $\Gamma\colon \mathcal{C} \multimap \mathcal{C}$, заданный по формуле:

$$\Gamma(x) = \Gamma_1(x) \times \ldots \times \Gamma_n(x).$$

Очевидно, что если функция x — неподвижная точка многозначного оператора Γ, то пара (x,u) — решение задачи (2.1)–(2.3), (2.6).

Теорема 2.2. *Пусть каузальные многозначные операторы $\mathcal{Q}_i\colon \mathcal{C} \to Cv\big(L^{p_i}([0,T];E_i)\big)$ удовлетворяют условиям $(\mathcal{Q}_{2i})$ и $(\mathcal{Q}_{3i})$, а каузальные операторы $\mathcal{S}_i\colon L^{p_i}([0,T];E_i) \to \mathcal{PC}([0,T];E_i)$ удовлетворяют условиям $(\mathcal{S}_{1i})$–$(\mathcal{S}_{3i})$. Тогда при выполнении условий (I_1), (I_2), (W) многозначный оператор Γ является ν-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset \mathcal{C}$ — ограниченное множество такое, что

$$\nu\big(\Gamma(\Omega)\big) \geqslant \nu(\Omega). \tag{2.7}$$

Покажем, что множество Ω относительно компактно. Выражение (2.7) означает, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ выполняется

$$\nu_i\big(\Gamma_i(\Omega)\big) \geqslant \nu_i(\Omega_i), \tag{2.8}$$

где Ω_i обозначает проекцию множества Ω на E_i, $i = 1, \ldots, n$.

Применяя лемму 2.1 и условия (I_1), (I_2), утверждение теоремы достаточно доказать для выражения

$$\mathcal{S}_i \circ \mathcal{Q}_i + \mathcal{S}_i \circ \mathcal{B}_i W_i^{-1}\Big(\xi_i - \mathcal{G}_i(T)x_i^0 - \sum_{t_k<t} \mathcal{G}_i(T-t_k) I_{ki}\big(x_i(t_k)\big) - \psi_i \circ \mathcal{S}_i \circ \mathcal{Q}_i\Big).$$

Неравенство (2.8) означает, что

$$\gamma_i\bigg(\Big\{\mathcal{S}_i \circ \mathcal{Q}_i(\Omega_i) + \mathcal{S}_i \circ \mathcal{B}_i W_i^{-1}\Big(\xi_i - \mathcal{G}_i(T)x_i^0 - \sum_{t_k<t} \mathcal{G}_i(T-t_k) I_{ki}\big(x_i(t_k)\big) - \\ - \psi_i \circ \mathcal{S}_i \circ \mathcal{Q}_i(\Omega_i)\Big)\Big\}\bigg) \geqslant \gamma_i(\Omega_i). \tag{2.9}$$

Применяя условие ($\mathcal{Q}_{3i}$) и используя свойства функций ω_i, мы получаем для п. в. $t \in J$

$$\chi_i\Big(\big\{f_i(t) \colon f_i \in \mathcal{Q}_i(\Omega_i)\big\}\Big) \leqslant \omega_i\Big(t, \sup_{s\in[0,t]} \chi_i\big(\{y_i(s) \colon y_i \in \Omega_i\}\big)\Big) = \\ = \omega_i\Big(t, \chi_i\big(\{y_i \colon y_i \in \Omega_i\}\big)\Big) = \omega_i\Big(t, e^{L_i t} e^{-L_i t} \varphi_i\big(\{y_i \colon y_i \in \Omega_i\}\big)\Big) \leqslant \\ \leqslant \omega_i\big(t, e^{L_i t}\gamma_i(\Omega_i)\big) \leqslant \omega_i\big(t, e^{L_i t}\big) \cdot \gamma_i(\Omega_i).$$

Сначала мы рассмотрим случай $1 \leqslant p_i < \infty$. Согласно лемме 2.3 для каждого $t \in J$ выполнено:

$$\chi_i\Big(\big\{\mathcal{S}_i f_i(t) \colon f_i \in \mathcal{Q}_i(\Omega_i)\big\}\Big) \leqslant \bigg(4^{p_i} D_i \int_0^t \omega_i^{p_i}(s, e^{L_i s})\, ds \cdot \gamma_i^{p_i}(\Omega_i)\bigg)^{1/p_i} \leqslant \\ \leqslant 4 D_i^{1/p_i} \bigg(\int_0^t e^{p_i L_i s} \omega_i^{p_i}(s,1)\, ds\bigg)^{1/p_i} \cdot \gamma_i(\Omega_i).$$

Заметим, что из условия (W) следует, что

$$\chi_i^{\mathcal{U}}\big(W_i^{-1}(\Omega_i)(t)\big) \leqslant \phi_i(t)\chi_i(\Omega_i) \;\; \text{для п. в.} \;\; t \in J.$$

Далее

$$\chi_i\bigg(\Big\{\mathcal{B}_i W_i^{-1}\Big(\xi_i - \mathcal{G}_i(T)x_i^0 - \sum_{t_k<t} \mathcal{G}_i(T-t_k) I_{ki}\big(x_i(t_k)\big) - \psi_i \circ \mathcal{S}_i f_i(t)\Big) \colon f_i \in \mathcal{Q}_i(\Omega_i)\Big\}\bigg) \leqslant \\ \leqslant M_i' \phi_i \chi_i\Big(\big\{\psi_i \circ \mathcal{S}_i f_i(t) \colon f_i \in \mathcal{Q}_i(\Omega_i)\big\}\Big) \leqslant \\ \leqslant 4 M_i' \phi_i \|\psi_i\| D_i^{1/p_i} \bigg(\int_0^t e^{p_i L_i s} \omega^{p_i}(s,1)\, ds\bigg)^{1/p_i} \cdot \gamma_i(\Omega_i),$$

где $\phi_i = \sup\limits_{t\in J} \phi_i(t)$.

Снова применяя лемму 2.3, мы имеем для каждого $t \in J$:

$$\chi_i\bigg(\Big\{\mathcal{S}_i \circ \mathcal{B}_i W_i^{-1}\big(\xi_i - \mathcal{G}_i(T)x_i^0 - \sum_{t_k<t} \mathcal{G}_i(T-t_k) I_{ki}\big(x_i(t_k)\big) - \psi_i \circ \mathcal{S}_i f_i(t)\big) \colon f_i \in \mathcal{Q}_i\,(\Omega_i)\Big\}\bigg) \leqslant \\ \leqslant \bigg(4^{p_i} D_i \int_0^t \big(4 M_i' \phi_i \|\psi_i\| D_i^{1/p_i}\big)^{p_i} \bigg(\int_0^\tau e^{p_i L_i s} \omega^{p_i}(s,1)\, ds\bigg) d\tau \cdot \gamma_i^{p_i}(\Omega_i)\bigg)^{1/p_i} \leqslant \\ \leqslant 16 D_i^{2/p_i} M_i' \phi_i \|\psi_i\| T^{1/p_i} \bigg(\int_0^t e^{p_i L_i s} \omega_i^{p_i}(s,1)\, ds\bigg)^{1/p_i} \cdot \gamma_i(\Omega_i).$$

Таким образом,

$$\gamma_i\biggl(\Bigl\{\mathcal{S}_i\circ\mathcal{Q}_i(\Omega_i)+$$
$$+\,\mathcal{S}_i\circ\mathcal{B}_iW_i^{-1}\Bigl(\xi_i-\mathcal{G}_i(T)x_i^0-\sum_{t_k<t}\mathcal{G}_i(T-t_k)I_{ki}\bigl(x_i(t_k)\bigr)-\psi_i\circ\mathcal{S}_i\circ\mathcal{Q}_i(\Omega_i)\Bigr)\Bigr\}\biggr)\leqslant$$
$$\leqslant 4D_i^{1/p_i}\bigl(1+4D_i^{1/p_i}M_i'\phi_i\|\psi_i\|T^{1/p_i}\bigr)\biggl(\int_0^t e^{p_iL_is}\omega_i^{p_i}(s,1)\,ds\biggr)^{1/p_i}\gamma_i(\Omega_i).$$

Неравенство (2.9) и последнее неравенство дают следующее

$$\gamma_i(\Omega_i)\leqslant 4D_i^{1/p_i}\bigl(1+4D_i^{1/p_i}M_i'\phi_i\|\psi_i\|T^{1/p_i}\bigr)\sup_{t\in J}\biggl(\int_0^t e^{-p_iL_i(t-s)}\omega_i^{p_i}(s,1)\,ds\biggr)^{1/p_i}\gamma_i(\Omega_i)=$$
$$=l_{1i}\cdot\gamma_i(\Omega_i),$$

следовательно $\gamma_i(\Omega_i)=0$.

Рассмотрим случай, когда $p_i=\infty$. По лемме 2.3 для всех $t\in J$ выполнено:

$$\chi_i\Bigl(\bigl\{\mathcal{S}_if_i(t)\colon f_i\in\mathcal{Q}_i(\Omega_i)\bigr\}\Bigr)\leqslant 2D_i^1\int_0^t\omega_i\bigl(s,e^{L_is}\bigr)\,ds\cdot\gamma_i(\Omega_i)\leqslant 2D_i^1\int_0^t e^{L_is}\omega_i(s,1)\,ds\cdot\gamma_i(\Omega_i);$$
$$\chi_i\biggl(\Bigl\{\mathcal{B}_iW_i^{-1}(\xi_i-\mathcal{G}_i(T)x_i^0-\sum_{t_k<t}\mathcal{G}_i(T-t_k)I_{ki}\bigl(x_i(t_k)\bigr)-\psi_i\circ\mathcal{S}_if_i(t))\colon f_i\in\mathcal{Q}_i(\Omega_i)\Bigr\}\biggr)\leqslant$$
$$\leqslant M_i'\phi_i\chi_i\Bigl(\bigl\{\psi_i\circ\mathcal{S}_if_i(t)\colon f_i\in\mathcal{Q}_i(\Omega_i)\bigr\}\Bigr)=M_i'\phi_i\|\psi_i\|\chi_i\Bigl(\bigl\{\mathcal{S}_if_i(t)\colon f_i\in\mathcal{Q}_i(\Omega_i)\bigr\}\Bigr)\leqslant$$
$$\leqslant M_i'\phi_i\|\psi_i\|_{E_i}2D_i^1\int_0^t e^{L_is}\omega_i(s,1)\,ds\cdot\gamma_i(\Omega_i),$$

где $\phi_i=\sup\limits_{t\in J}\phi_i(t)$.

Применяя лемму 2.3, мы получаем для всех $t\in J$:

$$\chi_i\biggl(\Bigl\{\mathcal{S}\circ\mathcal{B}_iW_i^{-1}(\xi_i-\mathcal{G}_i(T)x_i^0-\sum_{t_k<t}\mathcal{G}_i(T-t_k)I_{ki}\bigl(x_i(t_k)\bigr)-\psi_i\circ\mathcal{S}_if_i(t))\colon f_i\in\mathcal{Q}_i(\Omega_i)\Bigr\}\biggr)\leqslant$$
$$\leqslant 2D_i^1\int_0^t M_i'\phi_i\|\psi_i\|\biggl(2D_i^1\int_0^t e^{L_is}\omega_i(s,1)\,ds\cdot\gamma_i(\Omega_i)\biggr)\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant 4(D_i^1)^2M_i'\phi_i\|\psi_i\|T\int_0^t e^{L_is}\omega_i(s,1)\,ds\cdot\gamma_i(\Omega_i).$$

Из неравенства (2.9) и последнего неравенства вытекает следующее

$$\gamma_i(\Omega_i)\leqslant\bigl(2D_i^1+4(D_i^1)^2M_i'\phi_i\|\psi_i\|T\bigr)\sup_{t\in J}\biggl(\int_0^t e^{-L_i(t-s)}\omega_i(s,1)\,ds\biggr)\gamma_i(\Omega_i)=l_{2i}\cdot\gamma_i(\Omega_i),$$

следовательно $\gamma_i(\Omega_i)=0$.

Теперь покажем, что множество Ω_i равностепенно непрерывно. Возьмем последовательности $\bigl\{y_{in}\bigr\}_{n=1}^{\infty}\subset\Omega_i$, $n\geqslant 1$, и $\bigl\{f_{in}\bigr\}_{n=1}^{\infty}$, $f_{in}\in\mathcal{Q}_i(y_{in})$. Из условий $(\mathcal{Q}_{2i})$ и $(\mathcal{Q}_{3i})$ следует, что последовательность $\bigl\{f_{in}\bigr\}_{n=1}^{\infty}$ является L^{p_i}-полукомпактной, и, следовательно, по лемме 2.2 последовательность $\bigl\{\mathcal{S}_if_{in}\bigr\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактна. Следовательно

$$\operatorname{mod}_C\Bigl(\bigl\{\mathcal{S}_if_{in}\bigr\}_{n=1}^{\infty}\Bigr)=0.$$

Из условий ограниченности и линейности операторов B_i, W_i^{-1}, ψ_i получаем, что

$$\operatorname{mod}_{\mathcal{C}}\Bigg(\Big\{\mathcal{S}_i\circ\mathcal{B}_iW_i^{-1}\Big(\xi_i-\mathcal{G}_i(T)x_i^0-\sum_{t_k<t}\mathcal{G}_i(T-t_k)I_{ki}\big(x_i(t_k)\big)-\psi_i\circ\big\{\mathcal{S}_if_{in}\big\}_{n=1}^{\infty}\Big)\Big\}\Bigg)=0.$$

Таким образом,

$$\nu_i\Bigg(\Big\{\mathcal{S}_i\circ\mathcal{Q}_i(\Omega_i)+\\ +\mathcal{S}_i\circ\mathcal{B}_iW_i^{-1}\big(\xi_i-\mathcal{G}_i(T)x_i^0-\sum_{t_k<t}\mathcal{G}_i(T-t_k)I_{ki}\big(x_i(t_k)\big)-\psi_i\circ\mathcal{S}_i\circ\mathcal{Q}_i(\Omega_i)\big)\Big\}\Bigg)=(0,0),$$

но тогда из неравенства (2.7) следует, что $\nu_i(\Omega_i)=(0,0)$.

Из этого вытекает, что

$$\nu(\Omega)=(0,0),$$

следовательно, множество Ω относительно компактно. □

Для доказательства основной теоремы работы нам понадобится следующее утверждение, представляющее собой лемму Беллмана–Гронуолла.

Лемма 2.4 (см. [25, п. 1.2]). *Пусть $h(t)$, $u(t)$ и $v(t)$ — неотрицательные интегрируемые на $[a,b]$ функции, удовлетворяющие неравенству:*

$$v(t)\leqslant u(t)+\int_a^t h(s)v(s)\,ds,\quad t\in[a,b].$$

Тогда имеет место неравенство:

$$v(t)\leqslant u(t)+\int_a^t \exp\Big(\int_a^s h(\theta)\,d\theta\Big)h(s)u(s)\,ds,\quad t\in[a,b].$$

Теорема 2.3. *Пусть каузальные многозначные операторы $\mathcal{Q}_i\colon\mathcal{C}\to Cv\big(L^{p_i}([0,T];E_i)\big)$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, удовлетворяют условиям ($\mathcal{Q}_{1i}$)–($\mathcal{Q}_{3i}$), а линейные каузальные операторы $\mathcal{S}_i\colon L^{p_i}([0,T];E_i)\to\mathcal{PC}([0,T];E_i)$ удовлетворяют условиям ($\mathcal{S}_{1i}$)–($\mathcal{S}_{3i}$). Тогда при выполнении условий (I_1), (I_2), (W) множество Σ всех решений задачи* (2.1)–(2.3), (2.6) *является непустым компактным множеством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что множество всех решений $x\in\mathcal{C}$ однопараметрического включения

$$x\in\lambda\Gamma(x),\quad \lambda\in(0,1],\tag{2.10}$$

является априори ограниченным.

Возьмем любое i, $i=1,\dots,n$, и разделим доказательство на три случая: $p_i=1$, $1<p_i<\infty$, $p_i=\infty$, $i=1,\dots,n$.

Пусть $p_i = 1$. Если функция $x_i \in \mathcal{PC}([0,T];E_i)$ удовлетворяет условию (2.10), тогда применяя условие (I_2) и оценки (2.4), (2.5) для каждого $t \in J$, мы имеем:

$$
\begin{aligned}
\|x_i(t)\|_{E_i} &\leqslant \|\mathcal{G}_i(t)x_i^0\|_{E_i} + \Big\|\sum_{t_k<t}\mathcal{G}_i(t-t_k)I_{ki}\big(x_i(t_k)\big)\Big\|_{E_i} + D_i\int_0^t \|f_i(s)\|_{E_i}\,ds + \\
&+ D_iM_i'M_i''\int_0^t \|\xi_i - \mathcal{G}_i(T)x_i^0\|_{E_i}\,ds + D_iM_i'M_i''\int_0^t\Big\|\sum_{t_k<t}\mathcal{G}_i(T-t_k)I_{ki}\big(x_i(t_k)\big)\Big\|_{E_i}\,ds + \\
&+ D_iM_i'M_i''\int_0^t \|\psi_i\circ\mathcal{S}_i\circ\mathcal{Q}_i(x)(t)\|_{E_i}\,ds \leqslant \\
&\leqslant M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_imN_i + D_i\int_0^t\|f_i(s)\|_{E_i}\,ds + D_iM_i'M_i''T\big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i}\big) + \\
&+ D_iM_i'M_i''M_imN_iT + (D_i)^2M_i'M_i''\|\psi_i\|\int_0^t\|f_i(s)\|_{E_i}\,ds \leqslant \\
&\leqslant M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_imN_i + D_iM_i'M_i''T\big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i}\big) + D_iM_i'M_i''M_imN_iT + \\
&+ \big(D_i^2M_i'M_i''\|\psi_i\| + D_i\big)\int_0^t\|f_i(s)\|_{E_i}\,ds.
\end{aligned}
$$

где $f_i \in \mathcal{Q}_i(x)$. Из условия $(\mathcal{Q}_{2i})$ для f_i имеем:

$$\|f_i(s)\|_{E_i} \leqslant \alpha_i(s)\big(1 + \|x_i(s)\|_{E_i}\big).$$

Благодаря последнему, получим следующие оценки

$$
\begin{aligned}
\|x_i(t)\|_{E_i} &\leqslant M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_imN_i + D_iM_i'M_i''T\big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i}\big) + D_iM_i'M_i''M_imN_iT + \\
&+ \big(D_i^2M_i'M_i''\|\psi_i\| + D_i\big)\int_0^t \alpha_i(s)\big(1 + \|x_i(s)\|_{E_i}\big)\,ds \leqslant \\
&\leqslant M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_imN_i + D_iM_i'M_i''T\big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i}\big) + D_iM_i'M_i''M_imN_iT + \\
&+ \big(D_i^2M_i'M_i''\|\psi_i\| + D_i\big)\|\alpha_i\|_{L^\infty}T + \big(D_i^2M_i'M_i''\|\psi_i\| + D_i\big)\|\alpha_i\|_{L^\infty}\int_0^t\|x_i(s)\|_{E_i}\,ds.
\end{aligned}
$$

Последнее выражение является неубывающей функцией по t, поэтому

$$
\begin{aligned}
\|x_i(t)\|_{E_i} &\leqslant M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_imN_i + D_iM_i'M_i''T\big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i}\big) + D_iM_i'M_i''M_imN_iT + \\
&+ \big(D_i^2M_i'M_i''\|\psi_i\| + D_i\big)\|\alpha_i\|_{L^\infty}T + \int_0^t\big(D_i^2M_i'M_i''\|\psi_i\| + D_i\big)\|\alpha_i\|_{L^\infty}\|x_i(s)\|_{E_i}\,ds.
\end{aligned}
$$

Это означает, что функция $v_i(t) = \|x_i(t)\|_{E_i}$ удовлетворяет оценке

$$
\begin{aligned}
v_i(t) &\leqslant M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_imN_i + D_iM_i'M_i''T\big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i}\big) + D_iM_i'M_i''M_imN_iT + \\
&+ \big(D_i^2M_i'M_i''\|\psi_i\| + D_i\big)\|\alpha_i\|_{L^\infty}T + \int_0^t\big(D_i^2M_i'M_i''\|\psi_i\| + D_i\big)\|\alpha_i\|_{L^\infty}v_i(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Применяя лемму 2.4, получаем априорную ограниченность:

$$v_i(t) = \|x_i(t)\|_{E_i} \leqslant H_ie^{K_i} = \gamma_i^1,$$

где

$$
\begin{aligned}
H_i &= M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_imN_i + D_iM_i'M_i''T\big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i}\big) + D_iM_i'M_i''M_imN_iT + \\
&+ \big(D_i^2M_i'M_i''\|\psi_i\| + D_i\big)\|\alpha_i\|_{L^\infty}T,\\
K_i &= \big(D_i^2M_i'M_i''\|\psi_i\| + D_i\big)\|\alpha_i\|_{L^\infty}.
\end{aligned}
$$

Тогда $\|x_i\|_{\mathcal{PC}} = \sup\limits_{t\in J} \|x_i(t)\|_{E_i} \leqslant \gamma_i^1$.

Рассмотрим случай, когда $1 < p_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{gathered}
\|x_i(t)\|_{E_i} \leqslant M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i + \left(D_i \int_0^t \|f_i(s)\|_{E_i}^{p_i}\, ds\right)^{1/p_i} + \\
+ D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' T^{1/p_i} \big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i\big) + \\
+ D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' \left(\int_0^t \big\|\psi_i \circ \mathcal{S}_i \circ \mathcal{Q}_i(x)(t)\big\|_{E_i}^{p_i}\, ds\right)^{1/p_i} \leqslant \\
\leqslant M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i + \left(D_i \int_0^t \big\|f_i(s)\big\|_{E_i}^{p_i}\, ds\right)^{1/p_i} + \\
+ D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' T^{1/p_i} \big(\|\xi_i\| + M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i\big) + \\
+ D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' \|\psi_i\|_{E_i} T^{1/p_i} \left(D_i \int_0^t \big\|f_i(s)\big\|_{E_i}^{p_i}\, ds\right)^{1/p_i} = \\
= M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i + D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' T^{1/p_i} \big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i\big) + \\
+ \big(1 + D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' \|\psi_i\| T^{1/p_i}\big) \left(D_i \int_0^t \alpha_i^{p_i}(s)\big(1 + \|x_i(s)\|_{E_i}\big)^{p_i}\, ds\right)^{1/p_i} \leqslant \\
\leqslant M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i + D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' T^{1/p_i} \big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i\big) + \\
+ \big(1 + D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' \|\psi_i\| T^{1/p_i}\big) D_i^{1/p_i} \|\alpha_i\|_{L^\infty} T^{1/p_i} + \\
+ \big(1 + D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' \|\psi_i\| T^{1/p_i}\big) \left(D_i \int_0^t \alpha_i^{p_i}(s)\big(1 + \|x_i(s)\|_{E_i}\big)^{p_i}\, ds\right)^{1/p_i}.
\end{gathered}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
c_i^0 = M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i + D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' T^{1/p_i} \big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i\big) + \\
+ \big(1 + D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' \|\psi_i\| T^{1/p_i}\big) D_i^{1/p_i} \|\alpha_i\|_{L^\infty} T^{1/p_i}, \\
h_i(s) = \big(1 + D_i^{1/p_i} M_i' M_i'' \|\psi_i\| T^{1/p_i}\big)^{1/p_i} D_i^{1/p_i} \alpha_i(s).
\end{gathered}$$

Тогда получим:

$$\|x_i(t)\|_{E_i} \leqslant c_i^0 + \left(\int_0^t h_i^{p_i}(s) \|x_i(s)\|_{E_i}^{p_i}\, ds\right)^{1/p_i}.$$

Пусть $v_i(t) = \|x_i(t)\|_{E_i}^{p_i}$, тогда из последнего неравенства получаем оценку:

$$v_i(t) \leqslant 2^{p_i} \big(c_i^0\big)^{p_i} + 2^{p_i} \int_0^t h_i^{p_i}(s) v_i(s)\, ds.$$

Применяя теперь к последнему неравенству лемму 2.4, получаем

$$v_i(t) = \|x_i(t)\|_{E_i}^{p_i} \leqslant 2^{p_i} \big(c_i^0\big)^{p_i} \left(1 + \int_0^t \exp\left(2^{p_i} \int_0^s h_i^{p_i}(\theta)\, d\theta\right) h_i^{p_i}(s)\, ds\right).$$

Тогда получаем окончательную оценку для $1 < p_i < \infty$:

$$\|x_i(t)\|_{E_i} \leqslant 2c_i^0 \sqrt[p_i]{1 + \int_0^t \exp\left(2^{p_i} \int_0^s h_i^{p_i}(\theta)\, d\theta\right) h_i^{p_i}(s)\, ds} = \gamma_i^2.$$

Тогда $\|x_i\|_{\mathcal{PC}} = \sup\limits_{t\in J} \|x_i(t)\|_{E_i} \leqslant \gamma_i^2$.

Для случая $p_i = \infty$, $i = 1, \ldots, n$, аналогично случаю $p_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, справедлива следующая оценка:

$$\|x_i\|_{\mathcal{PC}} \leqslant H_i^1 e^{K_i^1} = \gamma_i^3,$$

где

$$H_i^1 = M_i\|x_i^0\|_{E_i} + M_i m N_i + D_i^1 M_i' M_i'' T\big(\|\xi_i\|_{E_i} + M_i\|x_i^0\|_{E_i}\big) + D_i^1 M_i' M_i'' M_i m N_i T + \\ + D_i^1\big(1 + D_i^1 M_i' M_i'' \|\psi_i\|\big)\|\alpha_i\|_{L^\infty} T,$$
$$K_i^1 = D_i^1 \|\alpha_i\|_{L^\infty}\big(1 + D_i^1 M_i' M_i'' \|\psi_i\|\big).$$

Выберем

$$\gamma_1 = \max_{i=1,\ldots,n} \gamma_i^1, \qquad \gamma_2 = \max_{i=1,\ldots,n} \gamma_i^2, \qquad \gamma_3 = \max_{i=1,\ldots,n} \gamma_i^3$$

и $R \geqslant \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, тогда можно гарантировать, что множество $V \subset \mathcal{C}$, заданное как

$$V = \big\{x \in \mathcal{C}\colon \|x\|_{\mathcal{C}} := \max_{i=1,\ldots,n} \|x_i\|_{\mathcal{PC}([0,T];E_i)} < R\big\},$$

содержит все решения включения (2.10). Таким образом, многозначный оператор Γ удовлетворяет на ∂V условию теоремы 1.1 с $a = 0$, следовательно, множество его неподвижных точек непусто и компактно. $\square$

§ 3. Частные случаи

3.1. Задача управляемости для системы полулинейных дифференциальных включений первого порядка

Рассмотрим следующую систему полулинейных дифференциальных включений в сепарабельном банаховом пространстве $E = E_1 \times \ldots \times E_n$:

$$\begin{cases} y_1'(t) \in A_1 y_1(t) + F_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) + \mathcal{B}_1 u(t), & t \in J; \\ \ldots \\ y_n'(t) \in A_n y_n(t) + F_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) + \mathcal{B}_n u(t), & t \in J, \end{cases} \tag{3.1}$$

с начальными условиями

$$y_1(0) = y_1^0 \in E_1, \quad \ldots, \quad y_n(0) = y_n^0 \in E_n \tag{3.2}$$

и импульсными воздействиями

$$y_i(t_k) = y_i(t_k^+) - I_{ki} y_i(t_k), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{3.3}$$

где каждое многозначное отображение $F_i\colon J \times \mathcal{C} \to Kv(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяет условиям **($\mathbf{F}_{1i}$)–($\mathbf{F}_{4i}$)**, импульсные функции $I_{ki}\colon E_i \to E_i$, $k = 1, \ldots, m$, удовлетворяют условиям (I_1), (I_2), $\mathcal{B}_i\colon \mathcal{U} \to E_i$ — линейные ограниченные операторы, $y_i^0 \in E_i$ наперед заданы. Также предположим, что

- (A_i) $A_i\colon D(A_i) \subset E_i \to E_i$ являются линейными замкнутыми операторами, порождающими C_0-полугруппы $\big\{e^{A_i t},\ t \in [0,T]\big\}$.

В данном случае интегральное решение задачи (3.1), (3.2), (3.3) представляет функцию $y \in \mathcal{C}$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, такую, что $y_i \in \mathcal{PC}([0,T]; E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, и

$$y_i(t) = e^{A_i t} y_i^0 + \sum_{t_k < t} e^{A_i(t-t_k)} I_{ki}\big(y_i(t_k)\big) + \int_0^t e^{A_i(t-s)} f_i(s)\, ds + \int_0^t e^{A_i(t-s)} \mathcal{B}_i u(s)\, ds, \quad t \in [0,T],$$

где $f_i \in \mathcal{P}^1_{F_i}(y)$, $\mathcal{P}^1_{F_i}$ — суперпозиционные многозначные операторы (см. пример 1.2).

Тот факт, что многозначные операторы $\mathcal{P}^1_{F_i}\colon \mathcal{C} \multimap Cv\big(L^1([0,T];E_i)\big)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{Q}_{1i})$, обосновывается благодаря лемме 5.1.1 из [21]. Условия $(\mathcal{Q}_{2i})$ и $(\mathcal{Q}_{3i})$ для $\mathcal{P}_{F_i}$ следуют из $(\mathbf{F}_{3i})$ и $(\mathbf{F}_{4i})$ соответственно. Учитывая лемму 1.4, можно рассматривать систему (3.1) как частный случай системы (2.1) с $\mathcal{Q}_i = \mathcal{P}^1_{F_i}$ и $\mathcal{S}_i = \mathcal{L}_i$ — оператором Коши.

Задача управляемости формулируется следующим образом: для заданных начальных условий $y^0_1, y^0_2, \ldots, y^0_n$ и заданных $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in E$ мы рассматриваем существование интегрального решения $y \in \mathcal{C}$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, задачи (3.1)–(3.3) и управления $u \in \mathcal{U}$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$, такого, что каждое

$$y_i(T) = \xi_i. \tag{3.4}$$

Операторы управления $W_i\colon L^1([0,T];\mathcal{U}) \to E$ задаются как

$$W_i u = \int_0^T e^{A_i(T-s)}\mathcal{B}_i u(s)\, ds,$$

а разрешающие мультиоператоры имеют следующий вид:

$$\Gamma_i(x)(t) = e^{A_i t}y^0_i + \sum_{t_k<t} e^{A_i t}(t-t_k)I_{ki}\big(y_i(t_k)\big) + \int_0^t e^{A_i(t-s)}f_i(s)\, ds +$$
$$+ \int_0^t e^{A_i(t-s)}\left[\mathcal{B}_i W_i^{-1}\left(\xi_i - e^{A_i T}y^0_i - \sum_{t_k<t} e^{A_i(T-t_k)}I_{ki}\big(y_i(t_k)\big) - \int_0^T e^{A_i(T-\tau)}f_i(\tau)\, d\tau\right)(s)\right] ds,$$

где $f_i \in \mathcal{P}^1_{F_i}(y)$.

В качестве следствия из теоремы 2.3 получаем следующий результат.

Теорема 3.1. *Предположим, что выполнены условия* (A_i), (I_1), (I_2), $(\mathbf{F}_{1i})$–$(\mathbf{F}_{4i})$, (W). *Тогда множество решений задачи* (3.1)–(3.4) *является непустым компактным подмножеством пространства* $\mathcal{C}$.

3.2. Задача управляемости для системы полулинейных дифференциальных включений дробного порядка

Последние десятилетия отмечены всплеском интереса к теории дробных дифференциальных уравнений и включений. Продемонстрируем применение полученных результатов для системы полулинейных дифференциальных включений дробного порядка.

Определение 3.1 (см. [26]). Дробной производной Герасимова–Капуто порядка $q \in (0,1)$ функции $g \in C^1([0,T];E)$ называется функция $D^q_0 g$ следующего вида:

$$D^q_0 g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t (t-s)^{-q} g'(s)\, ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{q-1}e^{-x}\, dx.$$

Рассмотрим следующую систему полулинейных дифференциальных включений в сепарабельном банаховом пространстве $E = E_1 \times \ldots \times E_n$:

$$\begin{cases} D^{q_1}_0 y_1(t) \in A_1 y_1(t) + F_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) + B_1 u(t), & t \in J; \\ \ldots \\ D^{q_n}_0 y_n(t) \in A_n y_n(t) + F_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) + B_n u(t), & t \in J, \end{cases} \tag{3.5}$$

с начальными условиями

$$y_1(0) = y_1^0 \in E_1, \quad \ldots, \quad y_n(0) = y_n^0 \in E_n \tag{3.6}$$

и импульсными воздействиями

$$y_i(t_k) = y_i(t_k^+) - I_{ki}y_i(t_k), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{3.7}$$

где $0 \leqslant q_i \leqslant 1$, каждое многозначное отображение $F_i \colon J \times \mathcal{C} \to Kv(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяет условиям **($\mathbf{F}_{1i}$)–($\mathbf{F}_{4i}$)**, импульсные функции $I_{ki} \colon E_i \to E_i$, $k = 1, \ldots, m$, удовлетворяют условиям (I_1), (I_2), $\mathcal{B}_i \colon \mathcal{U} \to E_i$ — линейные ограниченные операторы, $y_i^0 \in E_i$ наперед заданы. Предположим, что

(A_i') $A_i \colon D(A_i) \subset E_i \to E_i$ являются линейными замкнутыми операторами в E_i, порождающими C_0-полугруппы $\{U_i(t)\}_{t \geqslant 0}$, $i = 1, \ldots, n$.

В данном случае интегральное решение задачи (3.5), (3.6), (3.7) представляет функцию $y \in \mathcal{C}$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, такую, что $y_i \in \mathcal{PC}([0, T]; E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, и

$$y_i(t) = \mathcal{G}_i(t)y_i^0 + \sum_{t_k < t} \mathcal{G}_i(t - t_k)I_{ki}\bigl(y_i(t_k)\bigr) + \int_0^t (t - s)^{q_i - 1}\mathcal{T}_i(t - s)f_i(s)\, ds + \\ + \int_0^t (t - s)^{q_i - 1}\mathcal{T}_i(t - s)\mathcal{B}_i u(s)\, ds,$$

где $t \in J$, $f_i \in \mathcal{P}_{F_i}^{\infty}(y)$.

Суперпозиционный многозначный оператор $\mathcal{P}_{F_i}^{\infty} \colon \mathcal{C} \multimap Cv(L^{p_i}([0, T]; E_i))$ удовлетворяет условию ($\mathcal{Q}_{1i}$) (см. [27]). Условия ($\mathcal{Q}_{2i}$) и ($\mathcal{Q}_{3i}$) для $\mathcal{P}_{F_i}^{\infty}$ следуют из **($\mathbf{F}_{3i}$)** и **($\mathbf{F}_{4i}$)** соответственно. Учитывая лемму 1.4, можно рассматривать систему (3.5) как частный случай системы (2.1) с $\mathcal{Q}_i = \mathcal{P}_{F_i}^{\infty}$ и $\mathcal{S}_i = \mathcal{G}_i$ — оператором типа Коши.

Задача управляемости формулируется следующим образом: для заданных начальных условий $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ и заданных $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in E$, мы рассматриваем существование интегрального решения $y \in \mathcal{C}$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, задачи (3.5)–(3.7) и управления $u \in \mathcal{U}$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$, такого, что каждое

$$y_i(T) = \xi_i. \tag{3.8}$$

Операторы управления $W_i \colon L^{\infty}([0, T]; \mathcal{U}) \to E$ задаются как

$$W_i u = \int_0^T (T - s)^{q_i - 1}\mathcal{T}_i(T - s)\mathcal{B}_i u(s)\, ds,$$

а разрешающие мультиоператоры имеют следующий вид:

$$\Gamma_i(x)(t) = \mathcal{G}_i(t)y_i^0 + \sum_{t_k < t} \mathcal{G}_i(t)(t - t_k)I_{ki}\bigl(y_i(t_k)\bigr) + \int_0^t (t - s)^{q_i - 1}\mathcal{T}_i(t - s)f_i(s)\, ds + \\ + \int_0^t (t - s)^{q_i - 1}\mathcal{T}_i(t - s)\Biggl[\mathcal{B}_i W_i^{-1}\Biggl(\xi_i - \mathcal{G}_i(T)y_i^0 - \sum_{t_k < t} \mathcal{G}_i(T - t_k)I_{ki}\bigl(y_i(t_k)\bigr) - \\ - \int_0^T (T - s)^{q_i - 1}\mathcal{T}_i(T - s)f_i(\tau)\, d\tau\Biggr)(s)\Biggr]\, ds,$$

где $f_i \in \mathcal{P}_{F_i}^{\infty}(y)$.

В качестве следствия из теоремы 2.3 мы в настоящем случае получаем следующий результат.

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнены условия* (A_i'), (I_1), (I_2), ($\mathbf{F}_{1i}$)–($\mathbf{F}_{4i}$), (W). *Тогда множество решений задачи* (3.5)–(3.8) *является непустым компактным подмножеством пространства* $\mathcal{C}$.

§ 4. Заключение

Представленная задача для общей системы (2.1) с каузальными мультиоператорами напрямую связывает ее с обширными исследованиями уравнений и включений с каузальными операторами, начиная с пионерских работ А. Н. Тихонова [3] и фундаментальной монографии К. Кордуняну [4], и заканчивая современными исследованиями в банаховых пространствах, представленными в трудах В. Лупулеску [1], З. Дричи с соавторами [10, 11], а также в работах по дробным эволюционным уравнениям [14, 15]. Использованный метод доказательства, основанный на свойствах уплотняющих операторов и теоремах о неподвижной точке, является классическим для данного направления и детально изложен в монографиях [20–22].

Несмотря на то, что представленная работа основывается на классических методах, в ней имеется ряд существенных отличий и усложнений.

Первое принципиальное отличие заключается в рассмотрении именно системы взаимосвязанных полулинейных включений, а не изолированного уравнения. В большинстве работ связанных с теорией управления, включая исследования импульсных полулинейных включений (см., например, [28]), объектом изучения выступает одно уравнение или включение в банаховом пространстве. Данная в настоящей статье постановка предполагает, что каждое из n уравнений содержит многозначное отображение F_i, зависящее от всех компонент вектора состояния $(y_1, \ldots, y_n)$. Это создает эффект связанности подсистем, что существенно усложняет анализ, но одновременно приближает модель к реальным прикладным задачам (биологическим сообществам, сетевым системам, многосвязным динамическим объектам), где взаимодействие компонент играет ключевую роль. Применение векторной меры некомпактности $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}$ и диагональной матричной оценки с $\Phi(t)$ в условии (W) является адекватным инструментом для работы с такой многомерной связанной системой.

Еще одно принципиальное отличие связано с комбинацией методов, применяемых к исследованию задач с каузальными операторами и теории мер некомпактности в контексте задач управляемости. Работы последних лет, например, по приближенной управляемости дробных эволюционных систем [29], часто опираются на условия типа Липшица для нелинейностей или на интегральный метод. В отличие от этого, подход изложенный в настоящей работе, основанный на свойствах каузальных мультиоператоров $(\mathcal{Q}_{2i})$ и $(\mathcal{Q}_{3i})$, позволяет работать с более широким классом нелинейностей, удовлетворяющих оценкам для меры некомпактности, а не только условию Липшица. Наконец, следует отметить, применение импульсных воздействий в сочетании с каузальной структурой. Хотя импульсные задачи исследовались ранее (например, в [30] для функционально-дифференциальных включений), изложенная в статье постановка задачи включает импульсы I_{ki}, действующие на каждую компоненту системы, при этом структура решения включает сумму по точкам разрыва $\sum\limits_{t_k<t} \mathcal{G}_i(t-t_k) I_{ki}\big(y_i(t_k)\big)$, что характерно для полулинейных эволюционных задач.

Приведенные частные результаты, полученные для систем полулинейных дифференциальных включений первого и дробного порядков, демонстрируют связь с современными исследованиями в области теории управления и функционально-дифференциальных включений. Рассмотренные задачи представляет собой содержательное обобщение классических задач.

Методы получения разрешимости задач управляемости для систем (3.1)–(3.4) и (3.5)–(3.8) основываются на аппарате теории полугрупп операторов и мер некомпактности. Введение интегрального решения через оператор Коши $\mathcal{S}_i = \mathcal{L}_i$ и оператор типа Коши $\mathcal{S}_i = \mathcal{G}_i$, использование свойств суперпозиционных мультиоператоров $\mathcal{Q}_i = \mathcal{P}^1_{F_i}$ и $\mathcal{Q}_i = \mathcal{P}^\infty_{F_i}$ позволяют свести исходную задачу, записанную в виде дифференциальных включений к операторному уравнению. При этом разрешающий мультиоператор Γ_i включает классическое представление решений, восходящее к работам посвященным теории многозначных отображений и дифференциальным включениям (см., например, монографию [21]).

Применение условий $(\mathbf{F}_{1i})$–$(\mathbf{F}_{4i})$ к многозначным отображениям F_i и условий (I_1), (I_2) к импульсным функциям является стандартным инструментом, обеспечивающим необходимые топологические свойства такие, как полунепрерывность сверху и оценки меры некомпактности для суперпозиционных операторов, что детально показано в трудах [20] и [21]. Условие (W) — условие регулярности операторов управления W_i^{-1}, выраженное в терминах мер некомпактности представляет собой современный подход, позволяющий эффективно работать с бесконечномерными пространствами, что находит применение в ряде недавних исследований (см., например, [29, 30]).

Таким образом, полученный результат не просто повторяет известные схемы, а развивает их в направлении системного подхода, применения свойств каузальных операторов и современных методов теории мер некомпактности, что позволяет охватить более широкий круг процессов управления с импульсными воздействиями и взаимосвязанной динамикой.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 23–71–10026).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lupulescu V. Causal functional differential equations in Banach spaces // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2008. Vol. 69. Issue 12. P. 4787–4795. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.11.028
2. Obukhovskii V., Zecca P. On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2011. Vol. 74. Issue 8. P. 2765–2777. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.12.024
3. Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюллетень Московского государственного университета. Секция А. Математика и механика. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1–25. https://bigenc.ru/b/o-funktsional-nykh-uravneniia-c01567
4. Corduneanu C. Functional equations with causal operators. London: CRC Press, 2002. https://doi.org/10.4324/9780203166376
5. Jiang Jingfei, Li C. F., Cao Dengqing, Chen Huatao. Existence and uniqueness of solution for fractional differential equation with causal operators in Banach spaces // Mediterranean Journal of Mathematics. 2015. Vol. 12. Issue 3. P. 751–769. https://doi.org/10.1007/s00009-014-0435-9
6. Appala Naidu Chadaram, Dhaigude D. B., Vasundhara Devi Jonnalagadda. Stability results in terms of two measures for set differential equations involving causal operators // European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017. Vol. 10. No. 4. P. 645–654. https://zbmath.org/1370.34106
7. Yakar C., Talab H. Stability of perturbed set differential equations involving causal operators in regard to their unperturbed ones considering difference in initial conditions // Advances in Mathematical Physics. 2021. Vol. 2021. P. 1–12. https://doi.org/10.1155/2021/9794959
8. Ha Nguyen Thu. Robust stability for implicit dynamic equations with causal operators on time scales // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2023. Vol. 35. No. 4. P. 803–834. https://doi.org/10.1007/s00498-023-00356-3
9. Булгакова А. И., Максимов В. П. Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 8. С. 1362–1374. https://www.mathnet.ru/rus/de4314

10. Drici Z., McRae F. A., Vasundhara Devi Jonnalagadda. Differential equations with causal operators in a Banach space // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2005. Vol. 62. Issue 2. P. 301–313. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.117
11. Drici Z., McRae F. A., Vasundhara Devi Jonnalagadda. Monotone iterative technique for periodic boundary value problems with causal operators // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2006. Vol. 64. Issue 6. P. 1271–1277. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.06.033
12. Jankowski T. Boundary value problems with causal operators // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2008. Vol. 68. Issue 6. P. 3625–3632. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.04.005
13. Wang Wenli, Bao Junyan. Integral boundary value problems for second-order causal differential equations // Boundary Value Problems. 2025. Vol. 2025. Issue 1. Article number: 43. https://doi.org/10.1186/s13661-025-02030-w
14. Agarwal R. P., Arshad S., Lupulescu V., O'Regan D. Evolution equations with causal operators // Differential Equations and Applications. 2015. Vol. 7. No. 1. P. 15–26. https://doi.org/10.7153/dea-07-02
15. Agarwal R. P., Asma, Lupulescu V., O'Regan D. Fractional semilinear equations with causal operators // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas. 2017. Vol. 111. Issue 1. P. 257–269. https://doi.org/10.1007/s13398-016-0292-4
16. Donchev T., Kitanov N., Lazu A. I., Stefanov S. Nonlinear evolution inclusions with causal operators // New trends in the applications of differential equations in sciences. NTADES 2022, Sozopol, Bulgaria, June 14–17. Cham: Springer, 2023. P. 433–442. https://doi.org/10.1007/978-3-031-21484-4_39
17. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C. Nonsmooth integral guiding potentials and asymptotic behaviour of solutions for inclusions with causal multioperators // Optimization. 2020. Vol. 69. Issue 2. P. 345–355. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1696798
18. Обуховский В. В., Кулманакова М. М., Боровикова М. М. Задача разрешимости для управляемой системы с дробной производной и каузальным оператором // Таврический вестник информатики и математики. 2021. Вып. 4 (53). С. 85–105. https://www.mathnet.ru/rus/tvim133
19. Afanasova M., Obukhovskii V., Petrosyan G. A controllability problem for causal functional inclusions with an infinite delay and impulse conditions // Advances in Systems Science and Applications. 2021. Vol. 21. No. 3. P. 40–62. https://doi.org/10.25728/assa.2021.21.3.1105
20. Akhmerov R. R., Kamenskii M. I., Potapov A. S., Rodkina A. E., Sadovskii B. N. Measures of non-compactness and condensing operators. Basel: Birkhäuser, 1992. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5727-7
21. Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. Berlin–New York: De Gruyter, 2001. https://doi.org/10.1515/9783110870893
22. Obukhovskii V., Gel'man B. Multivalued maps and differential inclusions. Elements of theory and applications. Hackensack: World Scientific, 2020. https://doi.org/10.1142/11825
23. Afanasova M., Liou Yeong-Cheng, Obukhoskii V., Petrosyan G. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. 2019. Vol. 20. No. 9. P. 1919–1935. https://zbmath.org/1472.93011
24. Zhang Zufeng, Liu Bin. Existence of mild solutions for fractional evolution equations // Fixed Point Theory. 2014. Vol. 15. No. 1. P. 325–334. https://zbmath.org/1307.34020
25. Qin Yuming. Nonlinear parabolic–hyperbolic coupled systems and their attractors. Basel: Birkhäuser, 2008. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8814-0
26. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. https://zbmath.org/1092.45003
27. Петросян Г. Г. Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5. С. 1355–1358. https://elibrary.ru/item.asp?id=24182931
28. Benedetti I., Obukhovskii V., Zecca P. Controllability for impulsive semilinear functional differential inclusions with a non-compact evolution operator // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. 2011. Vol. 31. No. 1. P. 39–69. https://doi.org/10.7151/dmdico.1127

29. Liu Zhenhai, Li Xiuwen. Approximate controllability of fractional evolution systems with Riemann–Liouville fractional derivatives // SIAM Journal on Control and Optimization. 2015. Vol. 53. Issue 4. P. 1920–1933. https://doi.org/10.1137/120903853
30. Abada N., Benchohra M., Hammouche H. Existence and controllability results for impulsive partial functional differential inclusions // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2008. Vol. 69. Issue 9. P. 2892–2909. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.08.060

Поступила в редакцию 14.01.2026
Принята к публикации 07.03.2026

Петросян Гарик Гагикович, к. ф.-м. н., доцент, ведущий научный сотрудник, научно-исследовательский институт математики, лаборатория нелинейных методов анализа, Воронежский государственный университет, 394018, Россия, г. Воронеж, пл. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8154-6299
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Сорока Мария Сергеевна, к. ф.-м. н., доцент, ведущий научный сотрудник, научно-исследовательский институт математики, лаборатория нелинейных методов анализа, Воронежский государственный университет, 394018, Россия, г. Воронеж, пл. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8722-520X
E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

Цитирование: Г. Г. Петросян, М. С. Сорока. О задаче управляемости для систем функциональных включений с каузальными операторами и импульсными характеристиками // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 1. С. 56–81.

MATHEMATICS 2026. Vol. 36. Issue 1. Pp. 56–81.

G. G. Petrosyan, M. S. Soroka

On a controllability problem for systems of functional inclusions with causal operators and impulse characteristics

Keywords: inclusion system, causal operator, functional inclusion, measure of non-compactness, fixed point, topological degree, impulse characteristics.

MSC2020: 93B05, 93C10, 93C35

DOI: 10.35634/vm260104

This paper studies the controllability problem for systems of functional inclusions with causal operators and impulse characteristics in Banach spaces. The main result of the paper is a global existence theorem for trajectories for systems described by functional inclusions with impulse characteristics. The proof is based on topological degree theory for condensing multivalued mappings. As applications of the main result, generalized existence theorems are obtained for systems of two important classes: first-order semilinear differential inclusions of fractional order $0 < q < 1$.

Funding. The study was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23–71–10026).

REFERENCES

1. Lupulescu V. Causal functional differential equations in Banach spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2008, vol. 69, issue 12, pp. 4787–4795. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.11.028
2. Obukhovskii V., Zecca P. On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2011, vol. 74, issue 8, pp. 2765–2777. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.12.024
3. Tikhonov A. N. On functional equations of Volterra type and their applications to some problems of mathematical physics, *Bulletin of Moscow State University. Section A. Mathematics and Mechanics*, 1938, vol. 1, issue 8, pp. 1–25 (in Russian).
4. Corduneanu C. *Functional equations with causal operators*, London: CRC Press, 2002. https://doi.org/10.4324/9780203166376
5. Jiang Jingfei, Li C. F., Cao Dengqing, Chen Huatao. Existence and uniqueness of solution for fractional differential equation with causal operators in Banach spaces, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2015, vol. 12, issue 3, pp. 751–769. https://doi.org/10.1007/s00009-014-0435-9
6. Appala Naidu Chadaram, Dhaigude D. B., Vasundhara Devi Jonnalagadda. Stability results in terms of two measures for set differential equations involving causal operators, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2017, vol. 10, no. 4, pp. 645–654. https://zbmath.org/1370.34106
7. Yakar C., Talab H. Stability of perturbed set differential equations involving causal operators in regard to their unperturbed ones considering difference in initial conditions, *Advances in Mathematical Physics*, 2021, vol. 2021, pp. 1–12. https://doi.org/10.1155/2021/9794959
8. Ha Nguyen Thu. Robust stability for implicit dynamic equations with causal operators on time scales, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2023, vol. 35, no. 4, pp. 803–834. https://doi.org/10.1007/s00498-023-00356-3
9. Bulgakov A. I., Maksimov V. P. Functional and functional-differential inclusions with Volterra operators, *Differential Equations*, 1982, vol. 17, pp. 881–890. https://zbmath.org/0481.34042
10. Drici Z., McRae F. A., Vasundhara Devi Jonnalagadda. Differential equations with causal operators in a Banach space, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2005, vol. 62, issue 2, pp. 301–313. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.117
11. Drici Z., McRae F. A., Vasundhara Devi Jonnalagadda. Monotone iterative technique for periodic boundary value problems with causal operators, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2006, vol. 64, issue 6, pp. 1271–1277. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.06.033

12. Jankowski T. Boundary value problems with causal operators, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2008, vol. 68, issue 12, pp. 3625–3632. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.04.005
13. Wang Wenli, Bao Junyan. Integral boundary value problems for second-order causal differential equations, *Boundary Value Problems*, 2025, vol. 2025, issue 1, article number: 43. https://doi.org/10.1186/s13661-025-02030-w
14. Agarwal R. P., Arshad S., Lupulescu V., O'Regan D. Evolution equations with causal operators, *Differential Equations and Applications*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 15–26. https://doi.org/10.7153/dea-07-02
15. Agarwal R. P., Asma, Lupulescu V., O'Regan D. Fractional semilinear equations with causal operators, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 2017, vol. 111, issue 1, pp. 257–269. https://doi.org/10.1007/s13398-016-0292-4
16. Donchev T., Kitanov N., Lazu A. I., Stefanov S. Nonlinear evolution inclusions with causal operators, *New trends in the applications of differential equations in sciences. NTADES 2022, Sozopol, Bulgaria, June 14–17*, Cham: Springer, 2023, pp. 433–442. https://doi.org/10.1007/978-3-031-21484-4_39
17. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C. Nonsmooth integral guiding potentials and asymptotic behaviour of solutions for inclusions with causal multioperators, *Optimization*, 2020, vol. 69, issue 2, pp. 345–355. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1696798
18. Obukhovskii V. V., Kulmanakova M. M., Borovikova M. M. The solvability problem for a controlled system with a fractional derivative and a causal operator, *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2021, issue 4 (53), pp. 85–105 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/tvim133
19. Afanasova M., Obukhovskii V., Petrosyan G. A controllability problem for causal functional inclusions with an infinite delay and impulse conditions, *Advances in Systems Science and Applications*, 2021, vol. 21, no. 3, pp. 40–62. https://doi.org/10.25728/assa.2021.21.3.1105
20. Akhmerov R. R., Kamenskii M. I., Potapov A. S., Rodkina A. E., Sadovskii B. N. *Measures of noncompactness and condensing operators*, Basel: Birkhäuser, 1992. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5727-7
21. Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Zecca P. *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces*, Berlin–New York: De Gruyter, 2001. https://doi.org/10.1515/9783110870893
22. Obukhovskii V., Gel'man B. *Multivalued maps and differential inclusions: Elements of theory and applications*, Hackensack: World Scientific, 2020. https://doi.org/10.1142/11825
23. Afanasova M., Liou Yeong-Cheng, Obukhoskii V., Petrosyan G. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 1919–1935. https://zbmath.org/1472.93011
24. Zhang Zufeng, Liu Bin. Existence of mild solutions for fractional evolution equations, *Fixed Point Theory*, 2014, vol. 15, no. 1, pp. 325–334. https://zbmath.org/1307.34020
25. Qin Yuming. *Nonlinear parabolic-hyperbolic coupled systems and their attractors*, Basel: Birkhäuser, 2008. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8814-0
26. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier, 2006. https://zbmath.org/1092.45003
27. Petrosyan G. G. A theorem on the weak closure of superposition multioperator, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1355–1358 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=24182931
28. Benedetti I., Obukhovskii V., Zecca P. Controllability for impulsive semilinear functional differential inclusions with a non-compact evolution operator, *Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization*, 2011, vol. 31, no. 1, pp. 39–69. https://doi.org/10.7151/dmdico.1127
29. Liu Zhenhai, Li Xiuwen. Approximate controllability of fractional evolution systems with Riemann–Liouville fractional derivatives, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2015, vol. 53, issue 4, pp. 1920–1933. https://doi.org/10.1137/120903853

30. Abada N., Benchohra M., Hammouche H. Existence and controllability results for impulsive partial functional differential inclusions, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2008, vol. 69, issue 9, pp. 2892–2909. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.08.060

Received 14.01.2026
Accepted 07.03.2026

Garik Gagikovich Petrosyan, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Leading Researcher, Research Institute of Mathematics, Laboratory of Nonlinear Methods of Analysis, Voronezh State University, University Square, 1, Voronezh, 394018, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8154-6299
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Maria Sergeevna Soroka, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Leading Researcher, Research Institute of Mathematics, Laboratory of Nonlinear Methods of Analysis, Voronezh State University, University Square, 1, Voronezh, 394018, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8722-520X
E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

Citation: G. G. Petrosyan, M. S. Soroka. On a controllability problem for systems of functional inclusions with causal operators and impulse characteristics, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 1, pp. 56–81.