МАТЕМАТИКА 2026. Т. 36. Вып. 1. С. 99–136.

УДК 517.977, 517.957

© *В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, А. В. Ушаков, О. А. Кувшинов*

К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве. Для нее формулируются некоторые задачи управления. Обсуждается подход к решению задач, основанный на привлечении множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем и соответствующих дифференциальных включений. Из-за сложности рассматриваемых задач управления аналитическое представление решений для нетривиальных управляемых систем невозможно, и поэтому в настоящей работе основное внимание уделено вопросам приближенного конструирования решений задач. Эти вопросы связаны прежде всего с приближенным конструированием множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем. В работе также рассматриваются задачи об оптимальном быстродействии некоторых нелинейных управляемых систем, в частности, задачи с фазовыми ограничениями. В работе приведены примеры.

Ключевые слова: управляемая система, управление, конечномерное евклидово пространство, множество достижимости, интегральная воронка, фазовое ограничение.

DOI: 10.35634/vm260106

Введение

Изучаются некоторые задачи управления нелинейных управляемых систем в конечномерных евклидовых пространствах. Обсуждается подход к их решению, основанный на использовании множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем. В рамках этого подхода рассматриваются вопросы и проблемы, относящиеся к приближенному вычислению множеств достижимости управляемых систем. В работе рассматриваются также задачи об оптимальном быстродействии некоторых нелинейных управляемых систем, зависящих от параметра, и, в частности, — управляемых систем с фазовыми ограничениями. Работа примыкает к [1–40], в которых изучаются, в частности, задачи о сближении управляемых систем в конечномерных евклидовых пространствах.

§ 1. Нелинейные управляемые системы: множества достижимости и интегральные воронки

Задано векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u) \tag{1.1}$$

на промежутке времени $[t_0, \infty)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — фазовый вектор в $\mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ — вектор из компакта P в $\mathbb{R}^r$.

Считаем, что управление $u(\cdot) = \big(u(t)\colon t \in [t_0, \infty)\big)$ — измеримая по Лебегу вектор-функция на $[t_0, \infty)$, удовлетворяющая

$$u(t) \in P, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{1.2}$$

Такие вектор-функции $u(\cdot)$ будем называть допустимыми управлениями.

Предполагаем, что правая часть уравнения (1.1) удовлетворяет условиям:

(A) вектор-функция $f(t,x,u)$ непрерывна по t,x,u на $[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times P$ и локально липшицева по x: для любой ограниченной и замкнутой области $D\subset[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ найдется константа $L=L(D)\in(0,\infty)$, удовлетворяющая

$$\|f(t,x_*,u)-f(t,x^*,u)\|\leqslant L\|x_*-x^*\|,\quad (t,x_*,u),\ (t,x^*,u)\in D\times P;$$

здесь $\|f\|$ — евклидова норма вектора $f\in\mathbb{R}^n$;

(B) справедливо неравенство

$$\|f(t,x,u)\|\leqslant\gamma(1+\|x\|),\quad (t,x,u)\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times P,\quad \gamma\in(0,\infty).$$

При условиях **A**, **B**, наложенных на систему (1.1), получаем, что при любых $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$ и допустимом управлении $u(\cdot)$ (1.2) существует единственное решение $x(t)$, $x(t_0)=x_0$, уравнения (1.1) — абсолютно непрерывная на $[t_0,\infty)$ вектор-функция, удовлетворяющая

$$\frac{dx(t)}{dt}=f\big(t,x(t),u(t)\big)\ \text{ п. в. на }\ [t_0,\infty).$$

Это решение мы называем движением системы (1.1) с начальным условием $x(t_0)=x_0$.

Определение 1.1. Множество всех $x^*\in\mathbb{R}^n$ таких, что $x^*=x(t^*)$ для некоторого движения $x(t)$, $x(t_0)=x_0$, назовем множеством достижимости $X(t^*,t_0,x_0)$ системы (1.1), отвечающим моменту t^* и начальному условию $x(t_0)=x_0$.

Наряду с фазовым пространством $\mathbb{R}^n$ будем рассматривать расширенное пространство $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$ позиций (t,x) системы (1.1).

Определение 1.2. Множество $X(t_0,x_0)=\bigcup\limits_{t\in[t_0,\infty)}\big(t,X(t,t_0,x_0)\big)$ в пространстве $[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ позиций системы (1.1) назовем интегральной воронкой системы (1.1) с начальной позицией (t_0,x_0).

Здесь обозначено $(t,X)=\big\{(t,x)\colon t\in[t_0,\infty),\ x\in X\big\}$, $X\subset\mathbb{R}^n$.

Наряду с системой (1.1) введем дифференциальное включение (д. в.)

$$\frac{dx}{dt}\in F(t,x),\quad t\in[t_0,\infty); \tag{1.3}$$

здесь $F(t,x)=\operatorname{co}\big\{f(t,x,u)\colon u\in P\big\}$, $\operatorname{co}F$ — выпуклая оболочка множества F в $\mathbb{R}^n$.

Справедливо равенство

$$Y(t^*,t_0,x_0)=\operatorname{cl}X(t^*,t_0,x_0),\quad (t_0,x_0)\in\mathbb{R}^{n+1},\quad t^*\in[t_0,\infty); \tag{1.4}$$

здесь $\operatorname{cl}X$ — замыкание множества X в $\mathbb{R}^n$, $Y(t^*,t_0,x_0)$ — множество достижимости д. в. (1.4), отвечающее моменту t^* и начальному условию $x(t_0)=x_0$.

Одним из основных соотношений, привлеченных в работе к изучению и приближенному построению множеств достижимости $X(t^*,t_0,x_0)$ и $Y(t^*,t_0,x_0)$, является полугрупповое свойство этих множеств

$$\begin{aligned}X(t^*,t_0,x_0)&=X\big(t^*,t_*,X(t_*,t_0,x_0)\big),\\ Y(t^*,t_0,x_0)&=Y\big(t^*,t_*,Y(t_*,t_0,x_0)\big);\end{aligned} \tag{1.5}$$

здесь обозначено

$$X\big(t^*, t_*, X(t_*)\big) = \bigcup_{x_* \in X(t_*)} X\big(t^*, t_*, X(t_*)\big), \quad Y\big(t^*, t_*, Y(t_*)\big) = \bigcup_{x_* \in Y(t_*)} Y\big(t^*, t_*, x_*\big),$$

где $X(t_*)$, $Y(t_*)$ — множества в $\mathbb{R}^n$.

Полугрупповое свойство (1.5) положено нами в основу приближенного вычисления множеств $X(t^*, t_0, x_0)$, $Y(t^*, t_0, x_0)$ при рассмотрении тех управляемых систем (1.1), для которых не удается получить эффективное аналитическое описание множеств достижимости. При этом есть различные подходы к такому приближенному вычислению.

В этой работе полугрупповое свойство вкупе с дискретизацией промежутка времени $[t_0, \infty)$ (подменой времени t набором моментов $t_i \in [t_0, \infty)$, $i \in \mathbb{N}$) и последующим применением к системе (1.1) или д. в. (1.3) идеологии ломаных Эйлера дает нам возможность сформировать достаточно точные пошаговые (по времени) конструкции приближенного вычисления множеств $X(t^*, t_0, x_0)$, $Y(t^*, t_0, x_0)$ и множеств $X(t^*, t_0, X_0)$, $Y(t^*, t_0, Y_0)$ более общего вида, где X_0, Y_0 — компакты в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Применяемый в работе метод есть не что иное как метод Эйлера в приложении к управляемым системам и дифференциальным включениям. Сам по себе без каких-либо дополнений этот метод еще не позволяет непосредственно вычислять множества достижимости, но он представляет собой важный фрагмент в конструировании аппроксимаций этих множеств.

§ 2. Аппроксимация множеств достижимости дифференциальных включений на промежутке $[t_0, \vartheta]$, $\vartheta < \infty$

От системы (1.1) на $[t_0, \infty)$ перейдем к дифференциальному включению (1.3) на $[t_0, \vartheta]$

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x) = \mathrm{co}\big\{f(t, x, u) \colon u \in P\big\}. \tag{2.1}$$

Так как правая часть системы (1.1) удовлетворяет условиям **A**, **B**, то многозначное отображение $(t, x) \mapsto F(t, x)$ удовлетворяет условиям:

(C.1) $F(t, x)$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ при $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$;

(C.2) отображение $(t, x) \mapsto F(t, x)$ непрерывно на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$;

(C.3) отображение $(t, x) \mapsto F(t, x)$ локально липшицево по x (с константой $L = L(D)$ из условия **A**): для любой ограниченной замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ выполняется

$$d\big(F(t, x_*), F(t, x^*)\big) \leqslant L\|x_* - x^*\|, \quad (t, x_*),\ (t, x^*) \in D;$$

(C.4) отображение $(t, x) \mapsto F(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{f \in F(t,x)} \|f\| \leqslant \gamma\big(1 + \|x\|\big), \quad (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n.$$

Здесь $d(F_*, F^*) = \max\big(h(F_*, F^*), h(F^*, F_*)\big)$ — хаусдорфово расстояние между F_* и F^*; $h(F_*, F^*) = \max\limits_{f_* \in F_*} \rho(f_*, F^*)$ — хаусдорфово отклонение F_* от F^*; $\rho(f_*, F^*) = \min\limits_{f^* \in F^*} \|f_* - f^*\|$, F_* и F^* — компакты в $\mathbb{R}^n$.

Пусть X_0 — некоторый компакт в $\mathbb{R}^n$.

В следующих рассуждениях изучаем и аппроксимируем $Y(t^*, t_0, X_0) = \mathrm{cl}\, X(t^*, t_0, X_0)$, $t^* \in [t_0, \vartheta]$, — множества достижимости дифференциального включения (2.1).

Из C.1–C.4 вытекает, что существует цилиндр $D = [t_0, \vartheta] \times G \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, для которого

$$Y(t^*, t_0, X_0) + \varepsilon^* \mathbb{B} \subset G \ \text{ при } \ t^* \in [t_0, \vartheta];$$

здесь G — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ конечного радиуса, $\mathbb{B}$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ единичного радиуса с центром в $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, ε^* — некоторое положительное число.

Принимая во внимание это замечание, считаем, что все компоненты формируемой конструкции, ориентированной на аппроксимацию множеств достижимости д. в., содержатся в цилиндре D. Именно этот цилиндр вместе с константой Липшица $L = L(D)$ имеем в виду ниже.

Полагаем

$$K = \max\bigl\{\|f\|\colon f \in F(t,x),\ (t,x) \in D\bigr\} \in (0,\infty). \tag{2.2}$$

Введем разбиение $\Gamma = \bigl\{t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N = \vartheta\bigr\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, где $\Delta_i = t_{i+1} - t_i = \Delta = \mathrm{const} > 0$, $i = \overline{0, N-1}$.

Сначала определим множество $\widetilde{Y}(t_1, t_0, X_0)$ — аппроксимацию множества $Y(t_1, t_0, X_0)$, и оценим близость между множествами $Y(t_1, t_0, X_0)$ и $\widetilde{Y}(t_1, t_0, X_0)$ в хаусдорфовой метрике.

Введем набор множеств

$$Y_0 = X_0, \quad Y_{i+1} = Y(t_{i+1}, t_i, Y_i), \qquad i = \overline{0, N-1}. \tag{2.3}$$

Принимая во внимание (2.3) и полугрупповое свойство множеств достижимости д. в. (2.1), получаем $Y_N = Y(\vartheta, t_0, Y_0)$. Множество Y_N можно было бы вычислить точно по рекуррентным формулам (2.3), если бы могли вычислять точно по формулам (2.3) промежуточные множества Y_{i+1}, отвечающие моментам t_{i+1} разбиения Γ. Однако далеко не для всех д. в. (2.1) мы в состоянии вычислять множества Y_{i+1} по множествам Y_i. Тем не менее достаточная густота разбиения Γ, соответствующая ей близость моментов t_i и t_{i+1} и условия C.1–C.4 дают уверенность в том, что возможно провести достаточно точное приближенное вычисление множеств Y_i и, в конечном итоге, — множества Y_N.

К приближенному вычислению $Y_N = Y(\vartheta, t_0, Y_0)$ привлечем рекуррентные соотношения (2.3), реализуя их пошагово в несколько этапов.

Первый этап вычислений соответствует начальному промежутку $[t_0, t_1]$ разбиения Γ, который рассмотрим детально.

Пусть $x_0 \in Y_0$. Введем множество достижимости

$$\widetilde{Y}(t_1, t_0, x_0) = x_0 + \Delta_0 F(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^n$$

дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt} \in F(t_0, x_0), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

отвечающее моменту t_1.

$\widetilde{Y}(t_1, t_0, x_0)$ есть некоторая аппроксимация множества $Y(t_1, t_0, x_0)$ д. в. (2.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Очевидно, что $\widetilde{Y}(t_1, t_0, x_0)$ вычисляется проще (то есть более доступно для вычислений), чем $Y(t_1, t_0, x_0)$, и обладает хорошей геометрией: оно гомотетично выпуклому компакту $F(t_0, x_0)$ в $\mathbb{R}^n$ с коэффициентом гомотетии $\Delta_0 > 0$.

Покажем, что хаусдорфово расстояние $d\bigl(Y(t_1, t_0, x_0), \widetilde{Y}(t_1, t_0, x_0)\bigr)$ между $Y(t_1, t_0, x_0)$ и $\widetilde{Y}(t_1, t_0, x_0)$ есть величина более высокого порядка малости, чем первый, относительно Δ_0.

Учитывая C.2, введем в рассмотрение модуль непрерывности отображения $(t, x) \mapsto F(t, x)$ на D

$$\omega^*(\sigma) = \max\bigl\{d\bigl(F(t_*, x_*), F(t^*, x^*)\bigr)\colon (t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } D,\ |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \sigma\bigr\}, \quad \sigma > 0.$$

Согласно определению, $\omega^*(\sigma) \downarrow 0$ при $\sigma \downarrow 0$.

Справедливо следующее неравенство

$$d\big(Y(t_1,t_0,x_0),\widetilde{Y}(t_1,t_0,x_0)\big)\leqslant\omega(\Delta_0);\tag{2.4}$$

здесь $\omega(\sigma)=\sigma\omega^*\big((1+K)\sigma\big)$, $\sigma>0$; $K=K(D)$ определено выражением (2.2).

Полагаем Y_0 — компакт в $\mathbb{R}^n$, а также

$$Y(t_1,t_0,Y_0)=\bigcup_{x_0\in Y_0}Y(t_1,t_0,x_0),\quad \widetilde{Y}(t_1,t_0,Y_0)=\bigcup_{x_0\in Y_0}\widetilde{Y}(t_1,t_0,x_0).$$

Принимая во внимание (2.4), получаем

$$d\big(Y(t_1,t_0,Y_0),\widetilde{Y}(t_1,t_0,Y_0)\big)\leqslant\omega(\Delta_0).\tag{2.5}$$

Оценка (2.5) указывает на хорошую степень близости по переменной Δ_0 множеств $Y(t_1,t_0,Y_0)$ и $\widetilde{Y}(t_1,t_0,Y_0)$ — более высокого порядка малости по Δ_0, чем первый.

Пусть теперь $[t_*,t^*]$ — произвольный промежуток времени из $[t_0,\vartheta]$ и Y_*, Y^* — произвольные компакты в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие $(t_*,Y_*),(t^*,Y^*)\subset D$.

Обозначим

$$\widetilde{Y}(t^*,t_*,Y_*)=\bigcup_{x_*\in Y_*}\widetilde{Y}(t^*,t_*,x_*),\quad\text{где}\quad \widetilde{Y}(t^*,t_*,x_*)=x_*+\sigma F(t_*,x_*),\quad \sigma=t^*-t_*>0.$$

Аналогично (2.5) имеем следующую оценку

$$d\big(Y(t^*,t_*,x_*),\widetilde{Y}(t^*,t_*,x_*)\big)\leqslant\omega(\sigma).\tag{2.6}$$

Принимая также во внимание условие C.3, имеем

$$d\big(\widetilde{Y}(t^*,t_*,Y_*),\widetilde{Y}(t^*,t_*,Y^*)\big)\leqslant e^{L\sigma}d(Y_*,Y^*).\tag{2.7}$$

Многозначное отображение $t\mapsto\widetilde{Y}(t)=\widetilde{Y}(t,t_i,\widetilde{Y}_i)$, $t\in[t_i,t_{i+1}]$, $i=\overline{0,N-1}$, есть своеобразная ломаная Эйлера д. в. (2.1) на промежутке $[t_0,\vartheta]$ с начальным множеством $\widetilde{Y}_0=Y_0$, «узловыми точками» которой являются множества

$$\widetilde{Y}_0=Y_0,\quad \widetilde{Y}_i=\widetilde{Y}(t_i,t_{i-1},\widetilde{Y}_{i-1}),\quad i=\overline{1,N}.$$

Оценим сверху в хаусдорфовой метрике расстояние между $Y_i=Y(t_i,t_0,Y_0)$ и $\widetilde{Y}_i$, $i=\overline{1,N}$.

Выпишем следующую рекуррентную оценку, отвечающую моменту t_i, $i=\overline{1,N}$, разбиения Γ

$$\begin{aligned}d(Y_i,\widetilde{Y}_i)=d\big(Y(t_i,t_{i-1},Y_{i-1}),\widetilde{Y}(t_i,t_{i-1},\widetilde{Y}_{i-1})\big)\leqslant d\big(Y(t_i,t_{i-1},Y_{i-1}),\widetilde{Y}(t_i,t_{i-1},Y_{i-1})\big)+\\+d\big(\widetilde{Y}(t_i,t_{i-1},Y_{i-1}),\widetilde{Y}(t_i,t_{i-1},\widetilde{Y}_{i-1})\big)\leqslant\omega(\Delta_{i-1})+e^{L\Delta_{i-1}}d(Y_{i-1},\widetilde{Y}_{i-1}).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Здесь при выводе оценки (2.8) приняты во внимание (2.6) и (2.7).

Подставляя в правую часть оценки (2.8) соответствующую оценку сверху величины $d(Y_{i-1},\widetilde{Y}_{i-1})$ и продолжая эту процедуру подстановки верхних оценок далее, получим следующую оценку величины $d(Y_i,\widetilde{Y}_i)$:

$$d(Y_i,\widetilde{Y}_i)\leqslant e^{L(t_i-t_0)}\sum_{j=0}^{i-1}\omega(\Delta_{j-1})\leqslant e^{L(t_i-t_0)}(t_i-t_0)\omega^*\big((1+K)\Delta\big),\quad t_j\in\Gamma;\tag{2.9}$$

здесь $\Delta=\max\limits_{j=\overline{0,N-1}}\Delta_{j-1}$ — диаметр разбиения Γ (см. с. 102).

Обратим теперь внимание на описание аппроксимаций интегральной воронки

$$Y(t_0, Y_0) = \bigcup_{t\in[t_0,\vartheta]} \big(t, Y(t, t_0, Y_0)\big)$$

на промежутке $[t_0, \vartheta]$. Введем множества

$$Y_\Gamma(t_0, Y_0) = \bigcup_{t_i\in\Gamma}(t_i, Y_i), \quad \widetilde{Y}^\Gamma(t_0, Y_0) = \bigcup_{t_i\in\Gamma}(t_i, \widetilde{Y}_i);$$

здесь $Y_\Gamma(t_0, Y_0)$ и $\widetilde{Y}_\Gamma(t_0, Y_0)$ — соответственно дискретные по t представления интегральной воронки $Y(t_0, Y_0)$ и ее аппроксимация в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Из (2.9) следует оценка

$$d\big(Y_\Gamma(t_0, Y_0), \widetilde{Y}_\Gamma(t_0, Y_0)\big) \leqslant e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*\big((1 + K)\Delta\big). \tag{2.10}$$

Кроме того, для любых промежутка $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ и момента $t \in [t_i, t_{i+1}]$ выполняется

$$d\Big(\big(t, Y(t)\big), \big(t_i, Y(t_i)\big)\Big) \leqslant (1 + K)\Delta. \tag{2.11}$$

Учитывая (2.10) и (2.11), получаем, что справедливо утверждение

Теорема 2.1. *Интегральная воронка $Y(t_0, Y_0)$ и ее аппроксимация $\widetilde{Y}^\Gamma(t_0, Y_0)$, отвечающая разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$, стеснены оценкой*

$$d\big(Y(t_0, Y_0), \widetilde{Y}_\Gamma(t_0, Y_0)\big) \leqslant (1 + K)\Delta + e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*\big((1 + K)\Delta\big). \tag{2.12}$$

Из оценки (2.12) следует

$$d\big(Y(t_0, Y_0), \widetilde{Y}_\Gamma(t_0, Y_0)\big) \to 0 \ \text{ при } \ \Delta \downarrow 0.$$

Оценка (2.12) составляет теоретическую основу для формирования алгоритмов приближенного вычисления интегральных воронок $Y(t_0, Y_0)$ д. в. (2.1) на $[t_0, \vartheta]$ с использованием множеств $\widetilde{Y}(t_0, Y_0)$.

Заметим, однако, что описанная дискретизация, служащая целям вычисления множеств $Y(t_0, Y_0)$ в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ (точнее, — в области D), затронула лишь время $t \in [t_0, \vartheta]$, переведя промежуток $[t_0, \vartheta]$ в разбиение Γ. В общем случае управляемых систем (1.1) и соответствующих им дифференциальных включений лишь только этой дискретизации недостаточно для эффективного приближенного вычисления множеств достижимости и интегральных воронок. Полученные в процессе такой дискретизации множества $\widetilde{Y}(t_0, Y_0)$ мы вычислить не в состоянии: необходимы еще некоторые шаги по дискретизации, которые бы дополнили приведение процесса дискретизации к формированию эффективных алгоритмов приближенного вычисления множеств $Y(t_0, Y_0)$.

Выделим некоторые основные подходы, ведущие к эффективному приближенному вычислению множеств достижимости и интегральных воронок:

(1) аппроксимация в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ множеств $\widetilde{Y}_i$, $i = \overline{1, N}$, эллипсоидами, так называемая эллипсоидальная аппроксимация;

(2) аппроксимация в $\mathbb{R}^n$ множеств $\widetilde{Y}_i$, $i = \overline{1, N}$, многогранниками и полиэдрами, не обязательно выпуклыми;

(3) аппроксимация в $\mathbb{R}^n$ множеств $\widetilde{Y}_i$, $i = \overline{1, N}$, набором пикселей.

Исследование и разработка алгоритмов по тематике аппроксимации множеств достижимости и интегральных воронок проводятся в ряде научных центров России. Так, технологии аппроксимации множеств достижимости управляемых систем и дифференциальных включений развиваются в научных школах А. Б. Куржанского [2–10] и Ф. Л. Черноусько [11–19], начиная с 70-х годов предыдущего столетия. Они оказываются весьма эффективными в применении к исследованию различных классов управляемых систем в конечномерных евклидовых пространствах (см., например, [20, 21]). В Екатеринбурге в Институте математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН Е. К. Костоусовой разрабатываются алгоритмы приближенного вычисления множеств достижимости и трубок траектории управляемых систем полиэдрами (см., например, [22, 23]).

В. С. Пацко и его сотрудники разрабатывают алгоритмы вычисления и приближенного вычисления для конструирования решений многих задач управления линейными и не только линейными системами. Эти алгоритмы включают в себя алгоритмы конструирования множеств достижимости управляемых систем и на их основе выделений оптимальных решений в задачах оптимального управления (см., например, [24–26]). Выделим также широкий круг исследований А. Ю. Горнова, посвященных разработке алгоритмов приближенного конструирования множеств достижимости управляемых систем для различных прикладных задач управления (см., например, [27–29]). В течение нескольких последних лет в центре внимания В. Н. Ушакова и его коллег находятся задачи приближенного конструирования множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем (см., например, [30–33]). Для решения этих задач привлекаются, в частности, пиксельные алгоритмы конструирования множеств разрешимости.

Отметим также следующие работы, касающиеся проблемы конструирования множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем и дифференциальных включений [34–38].

§ 3. Множества достижимости и интегральные воронки в применении к задачам оптимального управления

В этом параграфе обратим внимание на то, как конструкции множеств достижимости и интегральных воронок можно эффективно применить при формировании алгоритмов решения некоторых задач оптимального управления. К таким задачам относится одна из наиболее известных задач — задача об оптимальном быстродействии управляемой системы. В достаточно простых задачах об оптимальном быстродействии подход, основанный на привлечении множеств достижимости управляемых систем и интегральных воронок, позволяет найти точное аналитическое решение задачи. Это случается тогда, когда динамика управляемой системы и геометрия начального множества (и целевого множества, если оно присутствует в формулировке задачи) довольно простые. Это утверждение будет подтверждено в следующем параграфе на примере известной задачи Цермело (см. [39]). Однако управляемую систему в этой задаче можно так незначительно изменить, что получение аналитического решения окажется невозможным. В связи с подобными задачами с необходимостью встает вопрос о приближенном (но достаточно точном) ее решении.

Сформулируем в достаточно общей форме задачу об оптимальном быстродействии для системы (1.1) в предположении, что множества достижимости $X(t^*, t_0, x_0)$, $t \in [t_0, \infty)$ замкнуты в $\mathbb{R}^n$.

Задача 3.1. Пусть M — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Среди допустимых управлений $u(\cdot) = \big(u(t), t \in [t_0, \infty)\big)$ требуется выделить управление $u^0(\cdot) = \big(u^0(t), t \in [t_0, \infty)\big)$, переводящее движение $x^0(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, из начального состояния $x(t_0) = x_0 \notin M$ на множество M за наименьшее время.

Уточним, что понимаем под управлением $u^0(\cdot)$. Допустим, что некоторое движение $x(\cdot)$ на $[t_0,\infty)$, порожденное допустимым управлением $u(\cdot)$, таково, что существуют моменты $t^* \in (t_0,\infty)$, $x(t^*) \in M$.

Учитывая непрерывность функции $x(t)$ и замкнутость целевого множества M в $\mathbb{R}^n$, получаем, что существует момент $t\big(x(\cdot)\big) = \min\big\{t^* \in (t_0,\infty)\colon x(t^*) \in M\big\} > t_0$.

Справедливы соотношения

$$x(t) \notin M \ \text{ при } \ t \in \big(t_0, t\big(x(\cdot)\big)\big) \ \text{ и } \ x\big(t\big(x(\cdot)\big)\big) \in M.$$

Следовательно, $t\big(x(\cdot)\big)$ есть первый момент попадания движения $x(\cdot)$ системы (1.1) на M (см. рис. 1).

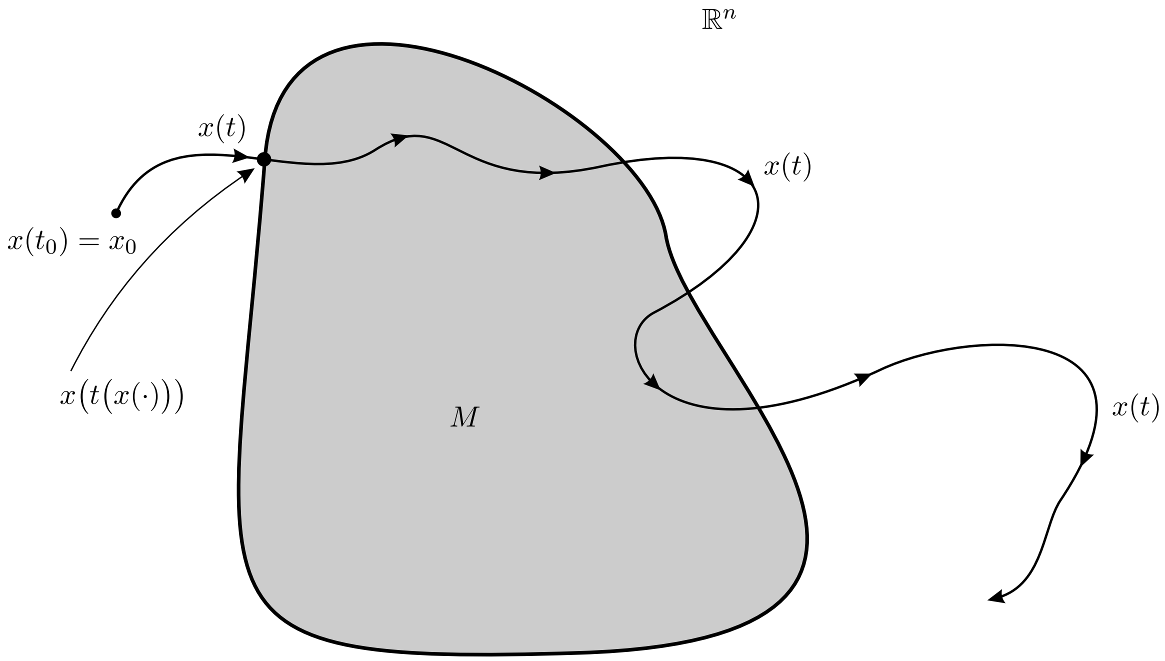

Рис. 1. Первый момент $t\big(x(\cdot)\big)$ попадания движения $x(\cdot)$ на M

В случае, если для движения $x(\cdot)$ на $[t_0,\infty)$ выполняется $x(t) \notin M$ при $t \in (t_0,\infty)$, получаем $t\big(x(\cdot)\big) = +\infty$.

Вместе с тем на движениях $x(\cdot)$, $x(t_0) = x_0$, системы (1.1) определен функционал $t\big(x(\cdot)\big) > t_0$, принимающий конечные или бесконечные значения.

Полагая $t_0 = 0$, введем величину

$$T^0(t_0,x_0) = \inf_{x(\cdot)} t\big(x(\cdot)\big) > 0. \tag{3.1}$$

$T^0(t_0,x_0)$ — время оптимального быстродействия для системы (1.1) в позиции (t_0,x_0) системы.

Здесь перебор в правой части (3.1) осуществляется по движениям $x(\cdot)$, $x(t_0) = x_0$, системы (1.1), порожденным возможными допустимыми управлениями $u(\cdot)$.

Допустим, что $T^0(t_0,x_0) < +\infty$ для некоторой позиции (t_0,x_0). В этом случае, учитывая замкнутость множеств $X(t^*,t_0,x_0)$, $t^* \in (t_0,\infty)$, M в $\mathbb{R}^n$ и непрерывную зависимость (в хаусдорфовой метрике) сечений $\big(t^*, X(t^*,t_0,x_0)\big)$ интегральной воронки $X(t_0,x_0)$ системы (1.1) от t^* на $[t_0,\infty)$, получаем

$$T^0(t_0,x_0) = \min\big\{t^* \in (t_0,\infty)\colon X(t^*,t_0,x_0) \bigcap M \neq \varnothing\big\}$$

(см. рис. 2).

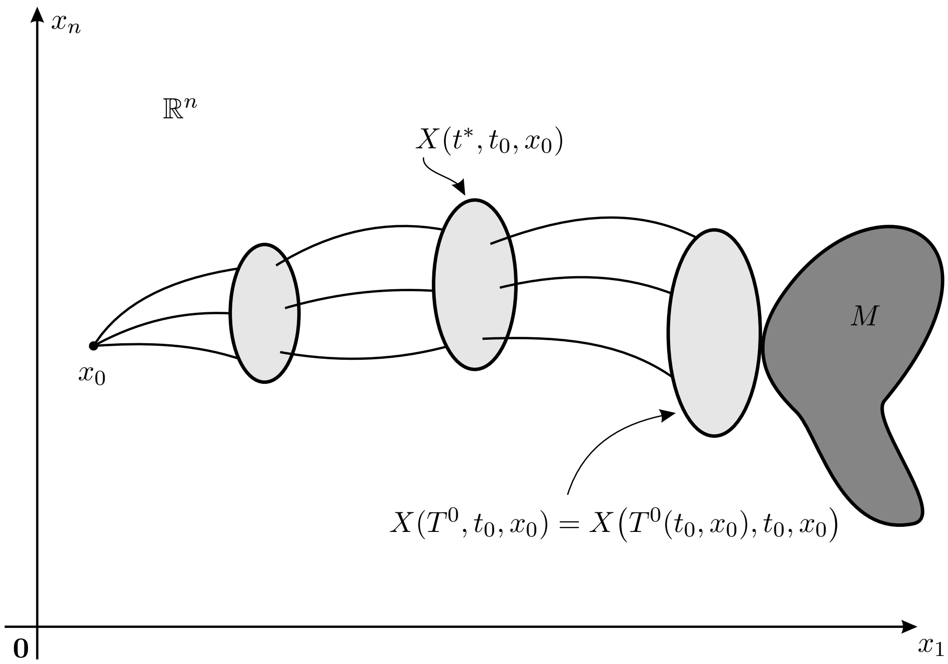

Рис. 2. Множество $X(T^0, t_0, x_0)$

Ситуацию, изображенную на рис. 2, представим теперь в расширенном пространстве $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

В $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ целевому множеству M в $\mathbb{R}^n$ соответствует цилиндр $M^* = [t_0, \infty) \times M$, а множествам достижимости $X(t^*, t_0, x_0)$, $t^* \in [t_0, \infty)$, соответствует интегральная воронка $X(t_0, x_0)$ системы (1.1) с ее сечениями $\big(t^*, X(t^*, t_0, x_0)\big)$, $t^* \in [t_0, \infty)$ (см. рис. 3). На этом рисунке изображены $(t_0, M) = \big\{(t_0, x)\colon x \in M\big\}$,

$$\big(T^0, X(T^0, t_0, x_0)\big) = \big\{(T^0, x)\colon x \in X(T^0, t_0, x_0)\big\}, \quad T^0 = T^0(t_0, x_0).$$

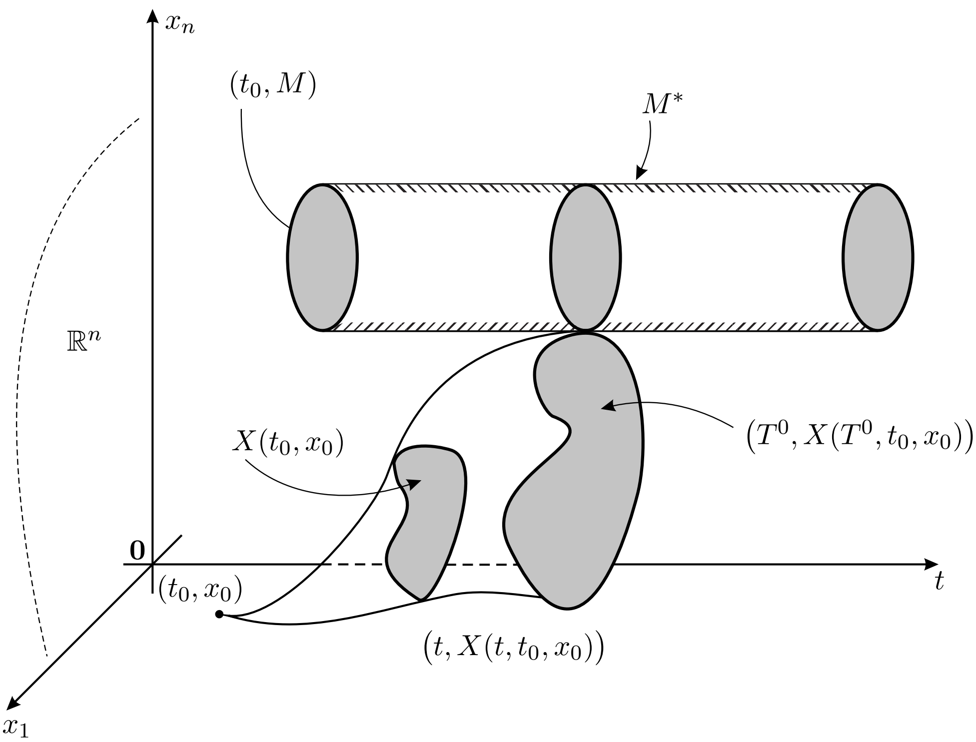

Рис. 3. Момент T^0 встречи множеств $\big(t, X(t, t_0, x_0)\big)$ с множеством M^*

Момент T^0 есть первый момент встречи сечений $\bigl(t^*, X(t^*, t_0, x_0)\bigr)$ интегральной воронки $X(t_0, x_0)$ системы (1.1) с сечениями (t^*, M) цилиндра $M^* \subset [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

В рассмотренном случае существует допустимое управление $u^0(\cdot)$ (возможно, не единственное), порождающее движение $x^0(\cdot)$, $x^0(t_0) = x_0$, системы (1.1) на $[t_0, \infty)$, для которого выполняется

$$T^0(t_0, x_0) = t\bigl(x^0(\cdot)\bigr).$$

Управление $u^0(\cdot)$ и движение $x^0(\cdot)$ — оптимальные управление и движение системы (1.1) в задаче 3.1.

Задача 3.1 допускает многочисленные обобщения. Приведем одно из наиболее используемых в приложениях.

Задача 3.2. Пусть M — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, X_0 и Φ — компакты в $\mathbb{R}^n$. Среди допустимых управлений $u(\cdot)$ требуется выделить управление $u^0(\cdot)$ на $[t_0, \infty)$, переводящее движение $x(t)$ системы (1.1) из начального множества X_0 на M за наименьшее время, минуя множество Φ (то есть $x(t) \notin \Phi$ до момента встречи с M).

В задаче 3.2 топологическая структура множеств X_0, M и Φ может быть самой изощренной, что значительно повышает интерес к этой задаче.

В процессе решения этой задачи с привлечением множеств достижимости $X(t^*, t_0, x_0)$, $t \in [t_0, \infty)$, могут возникнуть множества, имеющие изощренную структуру и, в частности, неодносвязные с негладкой границей $\partial X(t^*, t_0, X_0)$. Это обстоятельство убивает во многих случаях всякую надежду на какое-либо аналитическое описание этих множеств.

Задача 3.3. Пусть заданы непрерывная скалярная функция $\sigma(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и момент $\vartheta \in [t_0, \infty)$. Среди допустимых управлений $u(\cdot)$ на $[t_0, \vartheta]$ требуется выделить управление $u^0(\cdot)$, порождающее движение $x^0(\cdot)$, $x(t_0) = x_0$, системы (1.1), удовлетворяющее

$$\sigma\bigl(x^0(\cdot)\bigr) = \min_{x(\vartheta) \in X(\vartheta, t_0, x_0)} \sigma\bigl(x(\vartheta)\bigr)$$

(см. рис. 4).

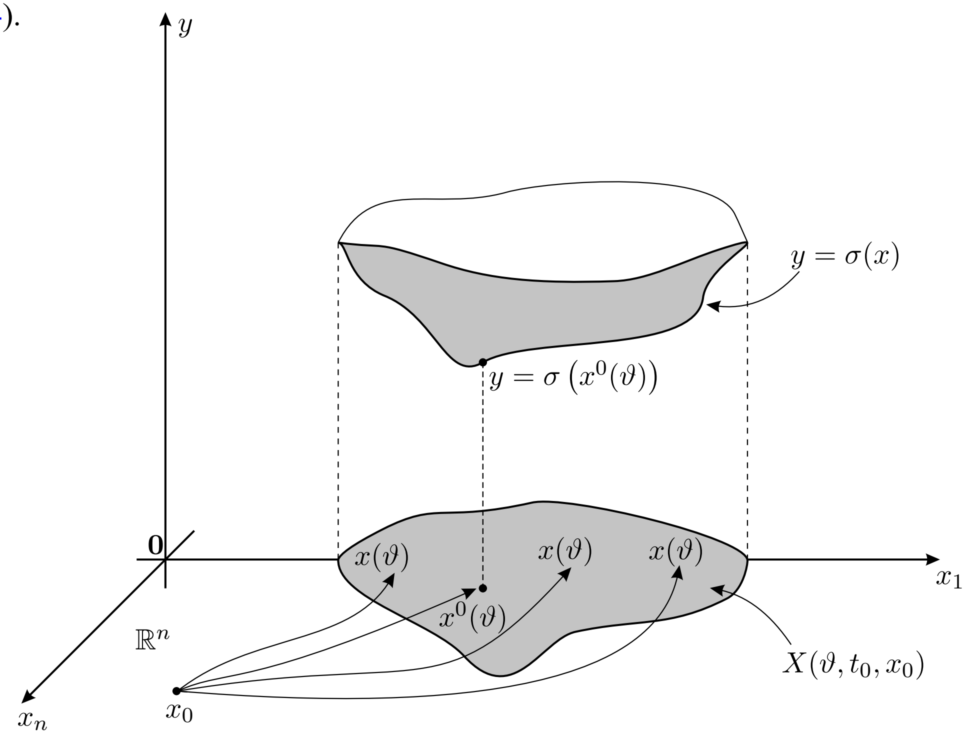

Рис. 4. Выделение точки $x^0(\vartheta)$ в задаче 3.3

Задача 3.3 есть задача оптимизации с ограничением на оптимизируемый параметр $x(\vartheta)$. Это ограничение — множество достижимости $X(\vartheta, t_0, x_0)$ — может иметь сложную геометрическую структуру, и поэтому решение задачи 3.3 требует применения методов оптимизации, которые естественно должны учитывать специфику геометрии множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x_0)$ и функции $\sigma(x)$ на этом множестве.

Обозначим $\mathcal{X}(t_0, x_0) = \{x(\cdot)\}$ пучок всевозможных движений $x(\cdot)$, $x(t_0) = x_0$, системы (1.1) на $[t_0, \infty)$.

Задача 3.4. Пусть $J\big(x(\cdot)\big)$ — функционал, определенный на пучке $\mathcal{X}(t_0, x_0)$. Требуется среди допустимых управлений $u(\cdot)$ и соответствующих им движений $x(\cdot) \in \mathcal{X}(t_0, x_0)$ выделить то управление $u^0(\cdot)$ и соответствующее ему движение $x^0(\cdot)$, для которых справедливо равенство

$$J\big(x^0(\cdot)\big) = \min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}(t_0,x_0)} J\big(x(\cdot)\big).$$

В качестве функционала $J\big(x(\cdot)\big)$ в задаче 3.4 можно взять, например, функционал $J\big(x(\cdot)\big) = \max\limits_{t\in[t_0,\vartheta]} \phi\big(t, x(t)\big)$; здесь $\phi(t, x)$ — непрерывная скалярная функция на $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, ϑ — фиксированный момент из $[t_0, \infty)$. Такой функцией $\phi(t, x)$ может быть, в частности, функция $\phi(t, x) = \rho(x, M) = \min\limits_{w\in M} \|x - w\| \geqslant 0$. В этом случае $J\big(x(\cdot)\big)$ есть отклонение движения $x(\cdot)$ от множества M на промежутке $[t_0, \vartheta]$, а задача 3.4 становится задачей о минимальном отклонении движений $x(\cdot)$, $x(t_0) = x_0$, системы (1.1) от M на промежутке $[t_0, \vartheta]$ (см. рис. 5).

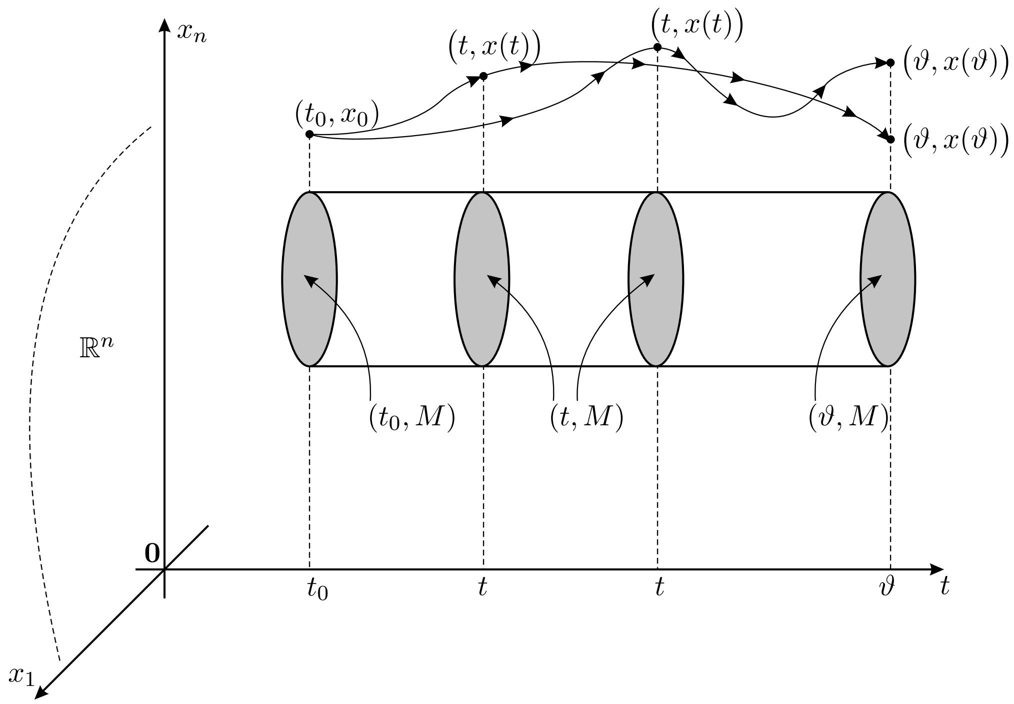

Рис. 5. Выделение оптимальной траектории $x^0(t)$ в задаче 3.4

На этом мы закончим перечисление наиболее интересующих нас в настоящее время задач оптимального управления. Мы предполагаем, что в этих задачах правая часть управляемой системы не обязательно обладает непрерывными частными производными по аргументам, а стартовые множества и целевые множества не обязательно имеют простую геометрическую и топологическую структуру: они могут быть неодносвязными (и, в том числе, состоящими из нескольких компонент связности), а их границы не обязательно являются дифференцируемыми многообразиями. Решение этих задач, как правило, не поддается аналитическому описанию, и нам с необходимостью придется формировать алгоритмы, обеспечивающие приближенное решение задач. Желательно, чтобы эти алгоритмы обеспечивали приемлемую точность приближенного решения. Однако, в некоторых конкретных задачах оптимального управления из-за сложности их структуры это не удается осуществить или установить, что полученное решение обладает приемлемой точностью. Тем не менее это решение может быть использовано в той или иной прикладной задаче.

Один из наиболее перспективных подходов к решению указанных выше задач оптимального управления есть, на наш взгляд, подход, идеология которого основана на привлечении множеств достижимости и интегральных воронок. Разумеется, мы не считаем его панацеей от всех проблем, возникающих при решении конкретных задач (даже входящих в группу задач 3.1–3.4). Тем не менее в следующих параграфах мы покажем, что этот подход достаточно эффективен при решении многих задач оптимального управления. При этом мы начнем следующие параграфы с описания решения одной из наиболее простых задач оптимального управления — задачи Цермело (см. [39]).

§ 4. Задача Цермело об оптимальном быстродействии и некоторые ее вариации

На этой простой задаче (некоторых ее вариантах) мы изложим представленный в предыдущих параграфах подход, базирующийся на использовании управляемой системы Σ, которая представлена ниже. В задачах Цермело мы опишем решение — оптимальное управление $u^0(\cdot) = \big(u^0(t), t \geqslant 0\big)$ и построим функцию оптимального быстродействия в одном из ее вариантов.

Далее, слегка изменив параметры задачи Цермело, сделав правую часть системы Σ нелинейной и превратив точечные стартовое и целевое множества в некоторые протяженные множества на плоскости, мы покажем, что получение точного решения весьма затруднительно и, по-видимому, невозможно. Это обстоятельство выдвигает на передний план проблему конструирования приближенных решений в задачах об оптимальном быстродействии и, более общо, в задачах оптимального управления.

Итак, сначала сформулируем задачу Цермело и в одном из вариантов опишем ее точное решение, а затем представим приближенное решение в задаче с измененными параметрами.

Задача Цермело. Задана управляемая система Σ, поведение которой на $[t_0, \infty)$, $t_0 = 0$, описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = s + u, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2,$$
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \mathrm{const}, \quad s_2 = 0,$$

вектор $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ удовлетворяет включению

$$u \in P,$$

где $P = \mathbb{B}(0;1) = \big\{b \in \mathbb{R}^2 \colon \|b\| \leqslant 1\big\}$.

Задано также конечное состояние $x_f = \begin{pmatrix} x_{f_1} \\ x_{f_2} \end{pmatrix}$, $x_f \neq x_0$ (см. рис. 6).

Задача 4.1. Требуется найти время оптимального быстродействия $T^0 = T^0(x_0)$ для точки x_0, за которое можно перевести систему Σ из x_0 в конечное состояние x_f.

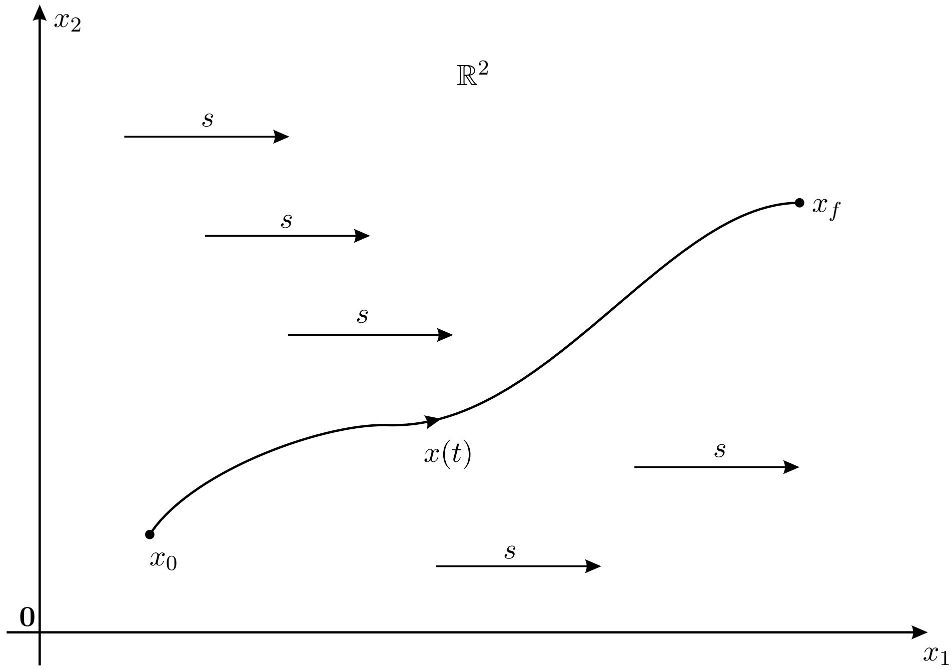

Рис. 6. Задача Цермело

Обозначим через $u(\cdot) = \big(u(t), t \in [t_0, T]\big)$, $T \in [t_0, \infty) = [0, \infty)$. Управление $u(\cdot)$ порождает движение системы Σ

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \big(s + u(\tau)\big)\, d\tau, \quad t \in [t_0, T];$$

здесь в равенстве интеграл есть интеграл Лебега.

В момент T имеем

$$x(T) = \big(x_0 + (T - t_0)s\big) + \int\limits_{t_0}^{t} u(t)\, dt. \tag{4.1}$$

Обозначим через $U_{[t_0,T]}$ — множество всевозможных достижимых управлений $u(\cdot)$ на $[t_0, T]$.

Справедливо равенство

$$\left\{ \int\limits_{t_0}^{T} u(t)\, dt \colon u(\cdot) \in U_{[t_0,T]} \right\} = (T - t_0)P, \tag{4.2}$$

где $(T - t_0)P = \big\{(T - t_0)u \colon u \in P\big\}$.

Учитывая (4.1), (4.2) и $t_0 = 0$, получаем формулу для множества достижимости $X(T, t_0, x_0)$ системы Σ

$$X(T, t_0, x_0) = (x_0 + Ts) = TP = \big\{(x_0 + Ts) + Tu \colon u \in P\big\},$$

то есть $X(T, t_0, x_0)$ — круг в $\mathbb{R}^2$ — пространство переменных x_1, x_2 с центром в точке $x_0 + Ts$ радиуса T.

Справедливо представление

$$X(T, t_0, x_0) = \big\{x(T) \colon \big\|x(T) - (x_0 + Ts)\big\| \leqslant T\big\}.$$

Время оптимального быстродействия $T^0 = T^0(x_0)$ для начальной точки x_0 определяется равенством

$$T^0 = \min\bigl\{T > 0\colon x_f \in X(T, t_0, x_0)\bigr\}.$$

Как известно, не при всех значениях параметра s и начальной точки x_0 время $T^0(x_0)$ конечно.

Мы рассмотрим здесь вариант задачи Цермело, в котором $s_1 < 1$.

Множество достижимости $X(T, t_0, x_0)$ в этом варианте изображено на рис. 7. Из рис. 7 видно, что в таком варианте в качестве оптимального управления может быть выбрано постоянное управление

$$u^0(t) = u^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} = \frac{x_f - (x_0 + T^0 s)}{\bigl\|x_f - (x_0 + T^0 s)\bigr\|}, \quad t \in [t_0, T^0],$$

направленное из $(x_0 + T^0 s)$ в x_f и $\|u^0\| = 1$.

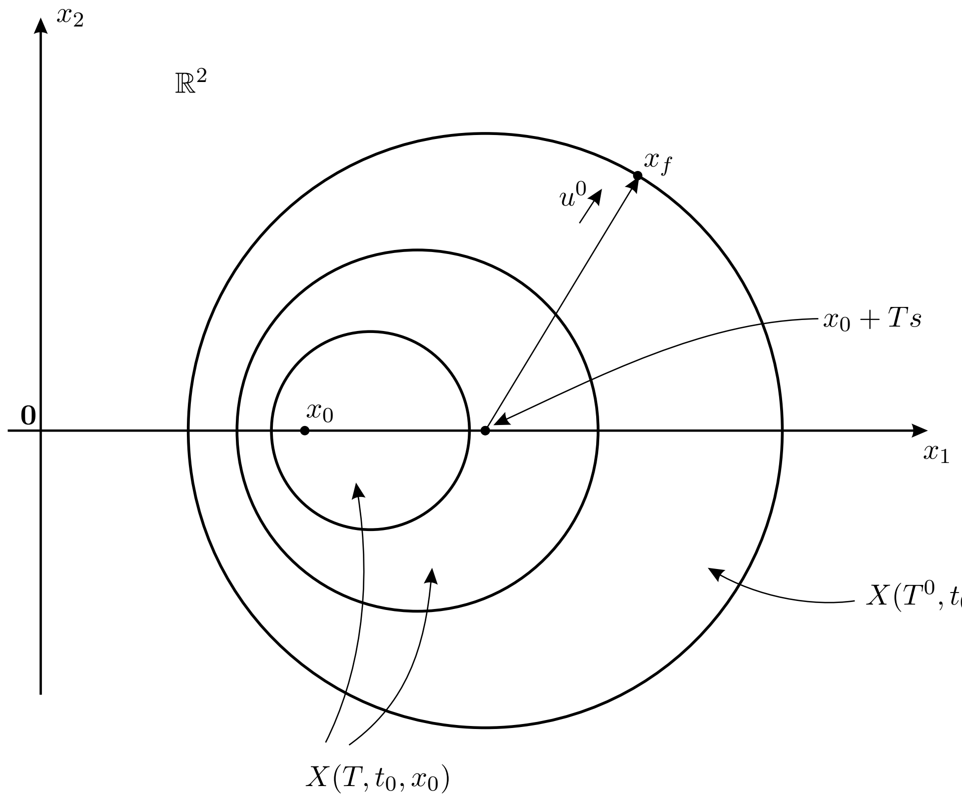

Рис. 7. Множество достижимости $X(T, t_0, x_0)$ в варианте $s_1 < 1$

Следовательно, справедливо равенство

$$x_0 + T^0 s + T^0 u^0 = x_f,$$

из которого следует

$$\bigl\|(x_0 + T^0 s) - x_f\bigr\| = T^0.$$

Таким образом, время $T_0 = T^0(x_0)$ удовлетворяет следующему уравнению относительно τ:

$$\bigl\|(x_f - x_0) - \tau s\bigr\|^2 = \tau^2, \quad \tau > 0 \tag{4.3}$$

или, что одно и то же, — уравнению

$$\|\Delta x - \tau s\|^2 = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{f_1} - x_0 \\ x_{f_2} - x_0 \end{pmatrix} = x_f - x_0.$$

Распишем подробнее уравнение (4.3)

$$s_1^2\tau^2 - 2s_1\Delta x_1\tau + \|\Delta x\|^2 = \tau^2,$$

то есть

$$(s_1^2 - 1)\tau^2 - 2s_1\Delta x_1\tau + \big(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2\big) = 0.$$

Рассмотрим корни этого уравнения

$$\tau_1 = \frac{-s_1\Delta x_1 + \sqrt{\|\Delta x\|^2 - s_1^2\Delta x_2^2}}{1 - s_1^2}, \quad \tau_2 = \frac{-s_1\Delta x_1 - \sqrt{\|\Delta x\|^2 - s_1^2\Delta x_2^2}}{1 - s_1^2}.$$

Справедливо неравенство

$$|-s_1\Delta x_1| < \sqrt{\|\Delta x\|^2 - s_1^2\Delta x_2^2}$$

и, следовательно, $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 < 0$.

В итоге получаем в рассматриваемом варианте

$$T^0 = T^0(x_0) = \tau_1 = \frac{-s_1\Delta x_1 + \sqrt{\|\Delta x\|^2 - s_1^2\Delta x_2^2}}{1 - s_1^2}.$$

Зная $T^0 = T^0(x_0)$, вычисляем оптимальное по быстродействию управление из начальной точки x_0

$$u^0(t) = u^0 = \frac{1}{T^0}\big(x_f - x_0 - T^0 s\big), \quad t \in [t_0, T^0].$$

Сформулируем следующий вопрос: «Зафиксируем некоторую константу $c > 0$. Как выглядит множество уровня $L_c = \big\{x_0 \in \mathbb{R}^2 \colon T^0 = T^0(x_0) = c\big\}$ функции $T^0(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$?»

Очевидно, что $L_c = \big\{x_0 \in \mathbb{R}^2 \colon \|x_0 - (x_f - cs)\| = c\big\}$, то есть L_c, $c > 0$, — окружность в $\mathbb{R}^2$ радиуса $c > 0$ и с центром в точке $x_f - cs$.

Так как $\|s\| < 1$, то целевая точка x_f лежит «внутри» окружности L_c (см. рис. 8).

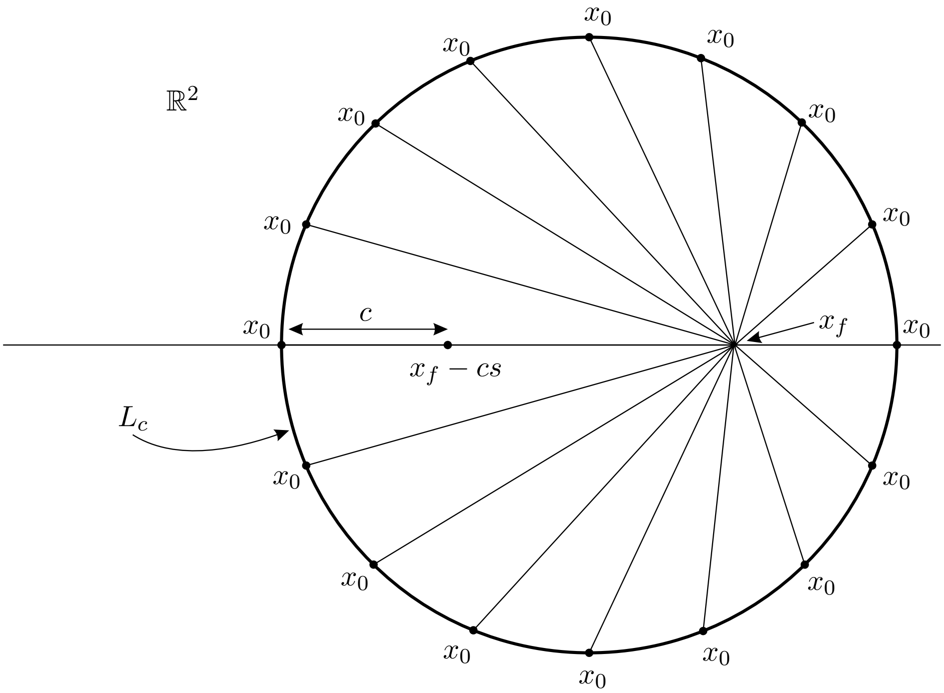

Рис. 8. Множество уровня L_c функции $T^0(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$

Линии уровня L_c функции, отвечающие всевозможным $c > 0$, представляют собой гомотетичные окружности в $\mathbb{R}^2$ с центром гомотетии x_f.

Если на время анализа функции $T^0(x_0)$ пополнить множество начальных точек x_0 точкой x_f (при этом положив $T^0(x_0) = 0$), то функция $T^0(x_0)$ будет определена на всем пространстве $\mathbb{R}^2$ в том смысле, что значение $T^0(x_0)$ конечно при $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Эта функция, рассматриваемая (при фиксированной точке x_f) как функция от $\Delta x \in \mathbb{R}^2$, положительно однородна. Учитывая эти особенности геометрии функции $T^0(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$, получаем, что $\operatorname{gr} T^0(\cdot)$ — график функции $T^0(x_0)$ представляет собой коническую поверхность в трехмерном пространстве переменных x_1, x_2, T с вершиной в точке $(x_f, 0)$. Окружности $\mathcal{L}_c = \big\{(x_0, c)\colon x_0 \in L_c\big\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно трактовать в качестве образующих конической поверхности (см. рис. 9). Видим также, что в рассматриваемом варианте функция $T^0(x_0)$ непрерывна на $\mathbb{R}^2$.

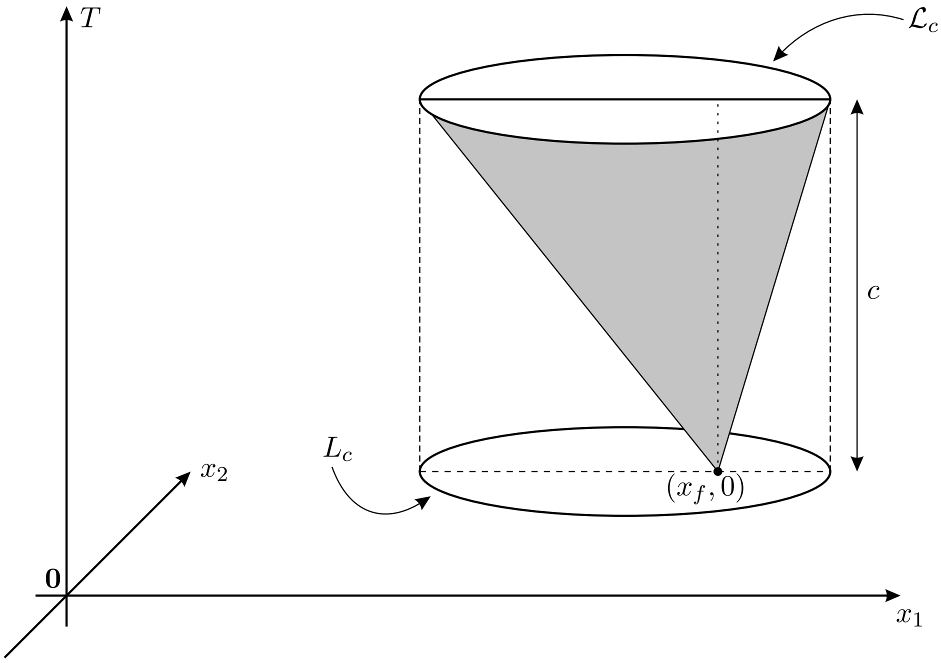

Рис. 9. График функции $T^0(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$, в варианте $s_1 < 1$

Теперь представим две нелинейные управляемые системы на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Одна из них (задача 1) получена возмущением системы Σ из задачи Цермело — введением дополнительных воздействий на вектор $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, зависящих от параметров $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2)$, фазовых переменных x_1, x_2 системы Σ и заменой краевых условий задачи Цермело — начальной и конечной точек x_0 и x_f стартовым и целевым многоугольниками в $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = s_1 + \varepsilon_1 \sin(x_2) + u_1, \\ \dot{x}_2 = 0 + \varepsilon_2 \cos(x_1) + u_2, \end{cases}$$

где $\varepsilon_1 = 1.2$, $\varepsilon_2 = 1.3$, $s_1 = 1$, $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leqslant 1$; начальное множество и целевое множество — квадраты, изображенные ниже на рисунках 10–17.

Несколько усложним задачу 1, представив ее виде задачи 1*. А именно, рассмотрим в качестве стартового множество $X_0 = X_{0,1} \cup X_{0,2}$, состоящее из круга $X_{0,1}$ и квадрата $X_{0,2}$. Кроме того, введено ограничение для движений управляемой системы в виде прямоугольника. Этот прямоугольник представляет собой ограничение для распространения волнового фронта $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t^i, t_0, X_0)$ управляемой системы.

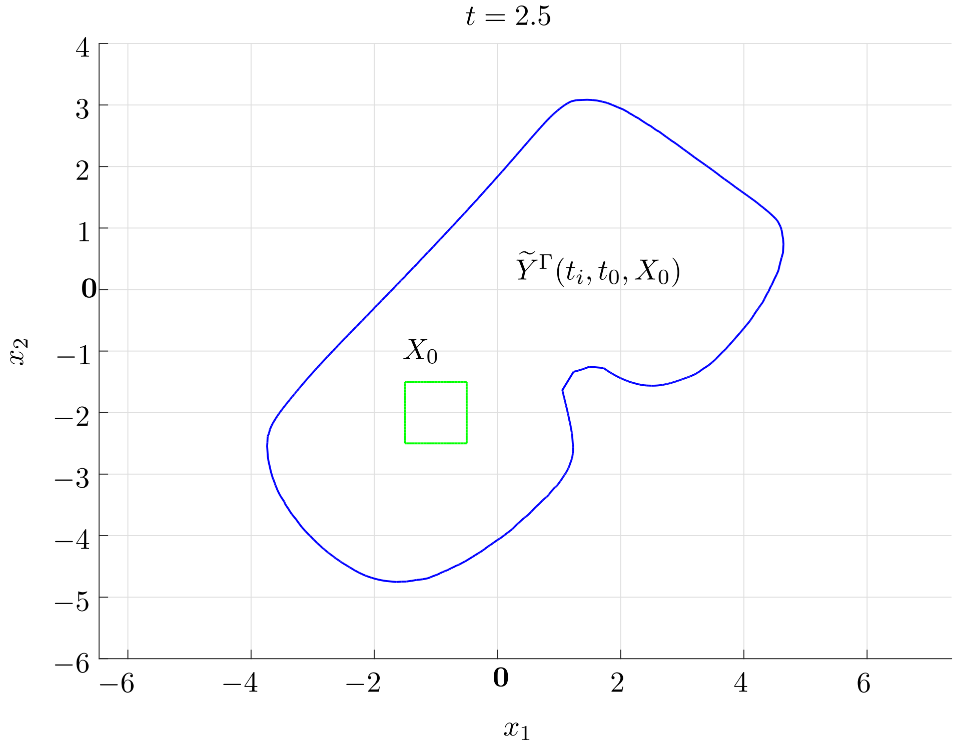

Рис. 10. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 2.5$ в задаче 1

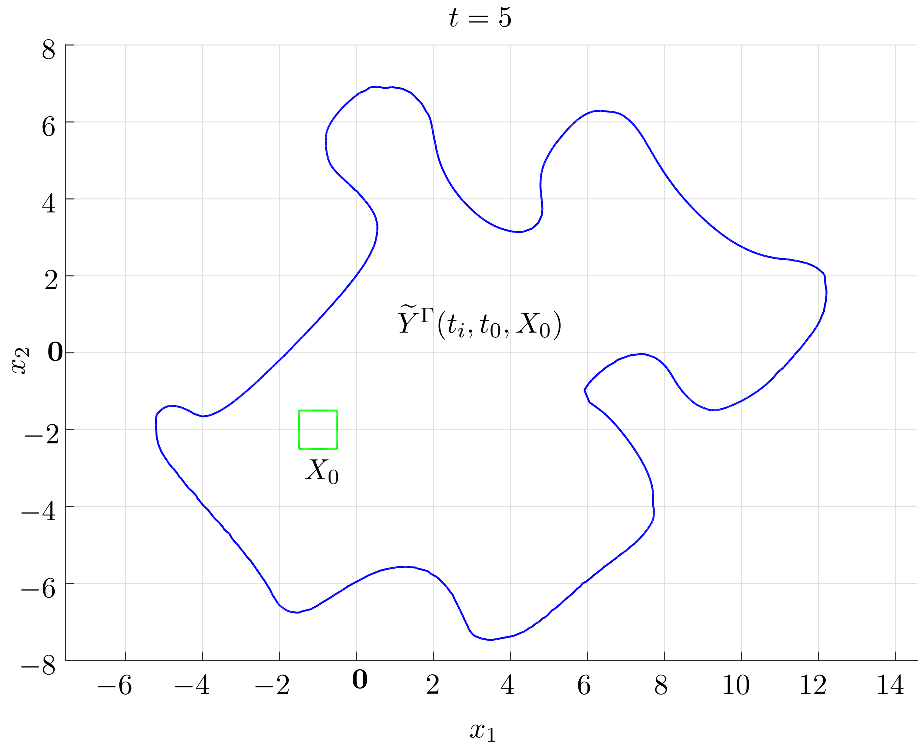

Рис. 11. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 5$ в задаче 1

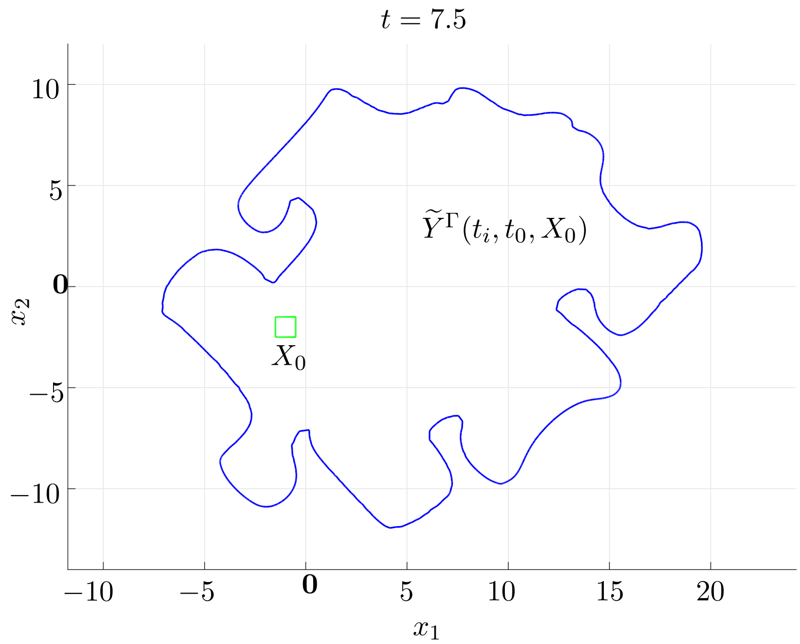

Рис. 12. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 7.5$ в задаче 1

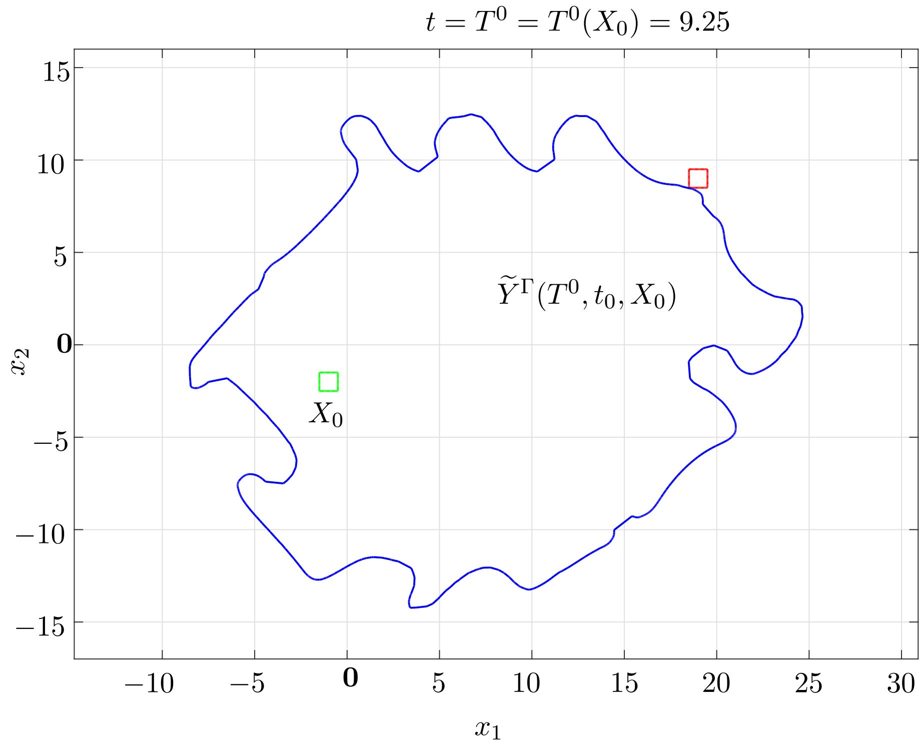

Рис. 13. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $T^0 = 9.25$ в задаче 1

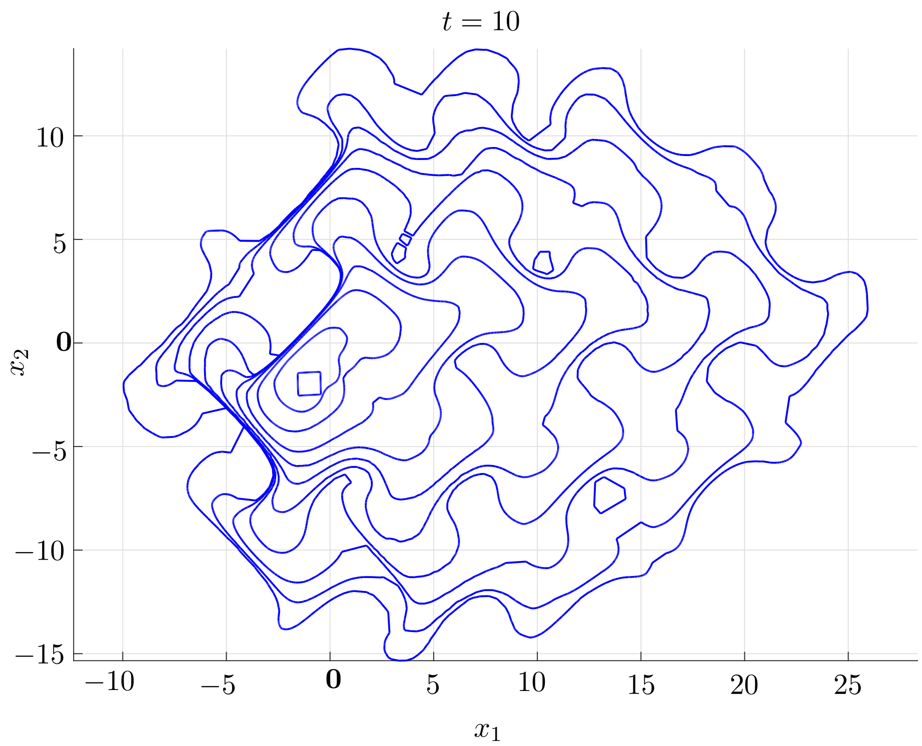

Рис. 14. Набор множеств достижимости, отвечающих дискретным моментам t, в задаче 1

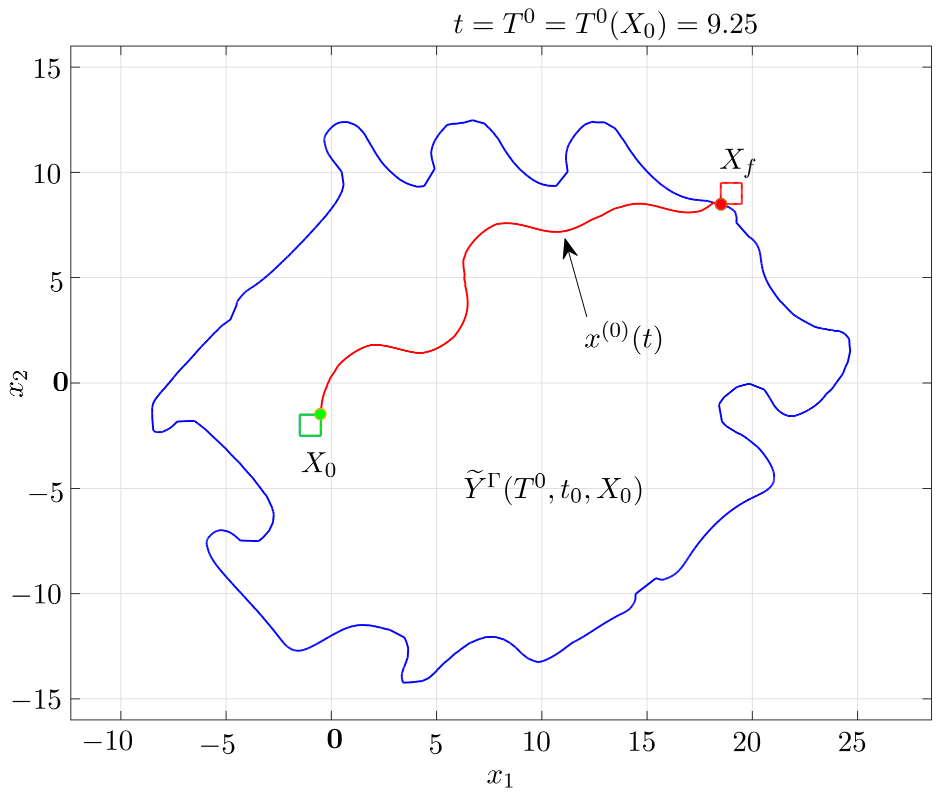

Рис. 15. Оптимальная траектория $x^0(t)$ в задаче 1 об оптимальном быстродействии

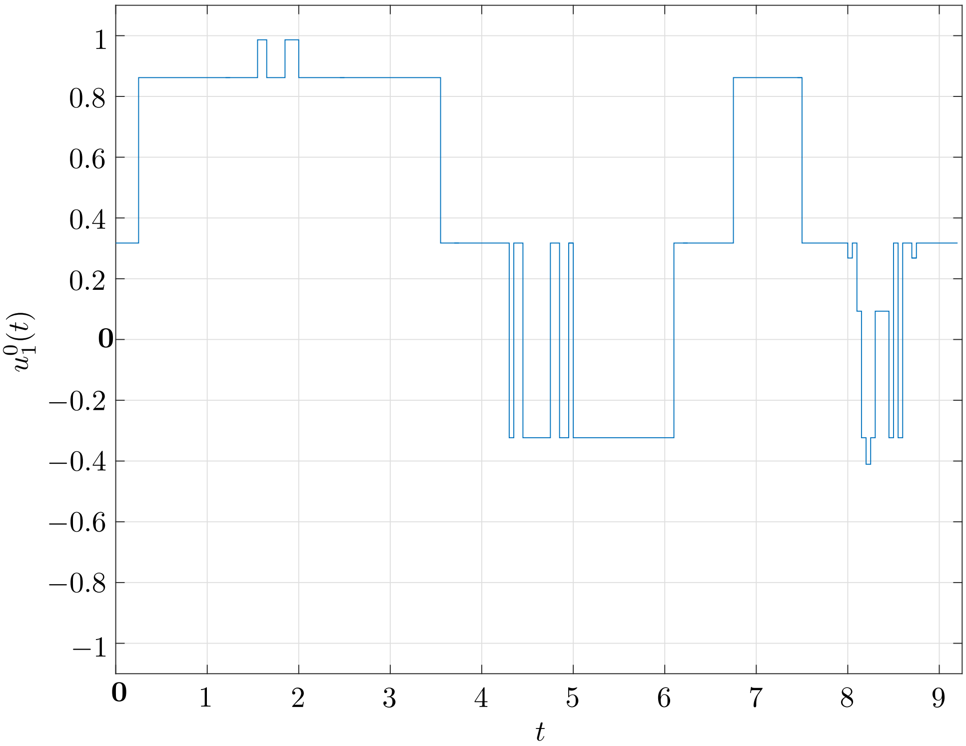

Рис. 16. Компонента $u_1^0(t)$ оптимального управления $u^0(t)$ в задаче 1

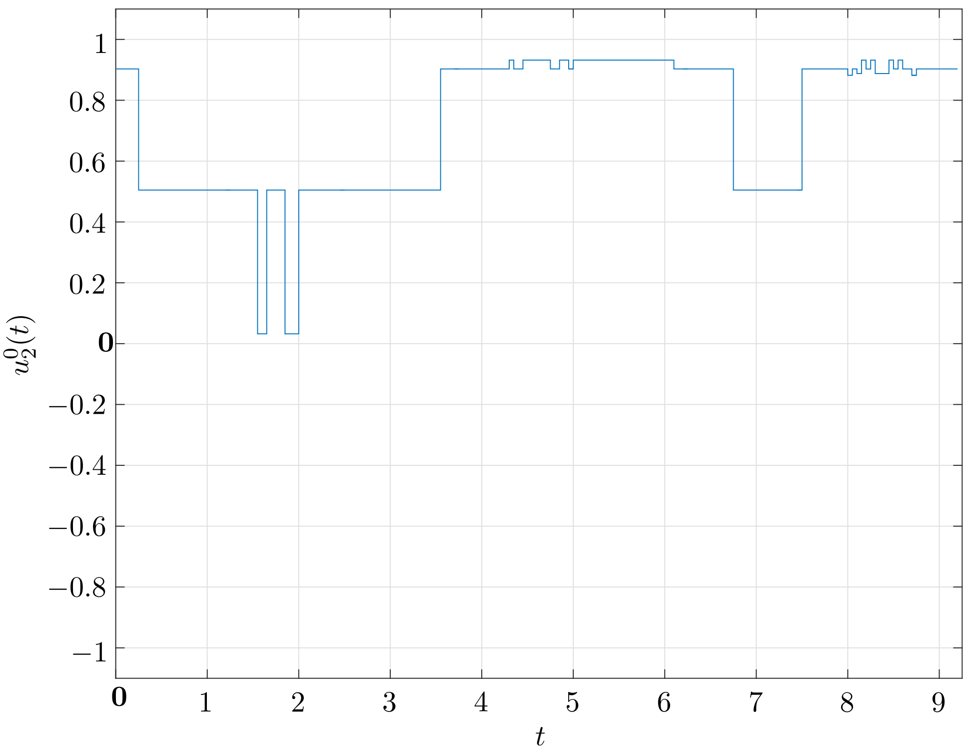

Рис. 17. Компонента $u_2^0(t)$ оптимального управления $u^0(t)$ в задаче 1

В задаче 1* шаг $\Delta = \Delta_t$ разбиения Γ равен 0.05. На рис. 18 изображены упомянутые множества. Далее на рисунках 19, 20, 21, 22 и 23 изображены множества достижимости для $t = 1$, $t = 2.5$, $t = 5$, $t = 7.5$ и $t = 10.25$ соответственно.

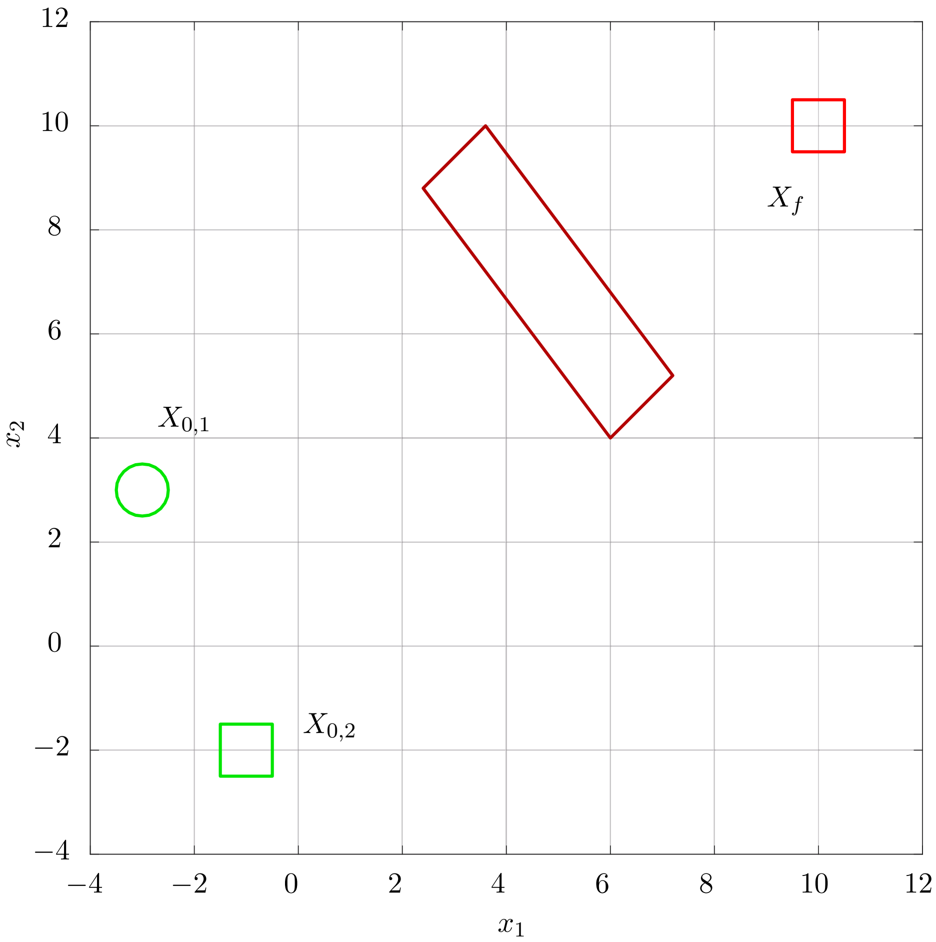

Рис. 18. Усложненная задача Цермело с фазовым ограничением на управляемую систему

На рис. 24 изображено каждое пятое множество достижимости из набора множеств $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$, $t_i \in \Gamma$, а на рис. 25 изображена оптимальная траектория $x^{(0)}(t)$.

Вторая нелинейная управляемая система (задача 2) на плоскости $\mathbb{R}^2$ представляет собой нелинейный осциллятор, находящийся под влиянием параметрического возбуждения, когда налицо периодическая зависимость коэффициента в уравнении от времени. Кроме того, на нелинейный осциллятор воздействует управляемый скалярный параметр u:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + (1 + a\sin\omega t)f(x) + u = 0,$$

где γ и a — положительные постоянные коэффициенты, $u = u(t)$, $t \geqslant 0$, — скалярное управление $|u(t)| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, $f(x) = x^3$ (см. [40, с. 82–83]).

Полагая $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}_1$, записываем уравнение нелинейного осциллятора в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_1 - (1 + a\sin\omega t)x_1^3 + u, \end{cases}$$

где $\gamma = 0.5$, $\omega = 0.5$, $a = 0.5$, $\|u\| \leqslant 1$ (см. рис. 26–38).

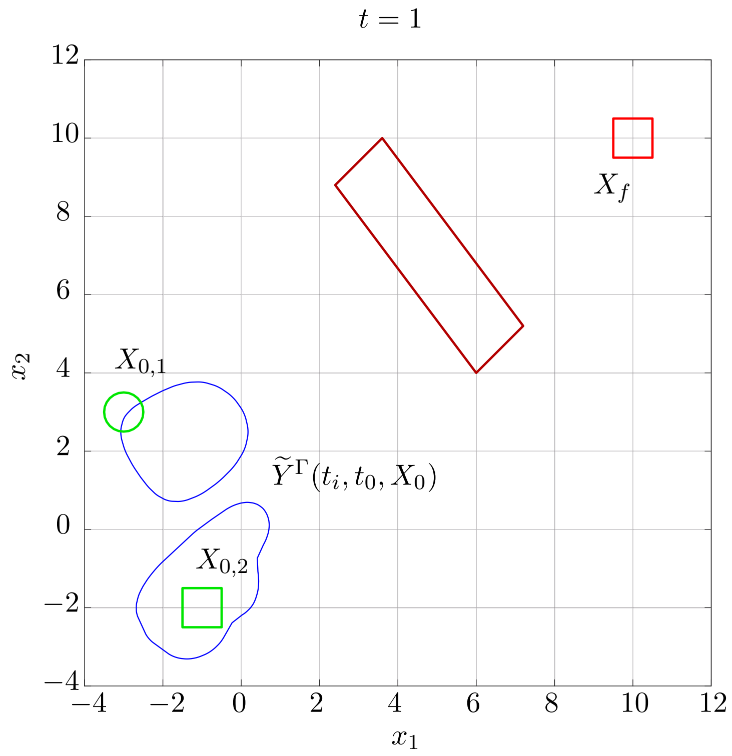

Рис. 19. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 1$ в задаче 1*

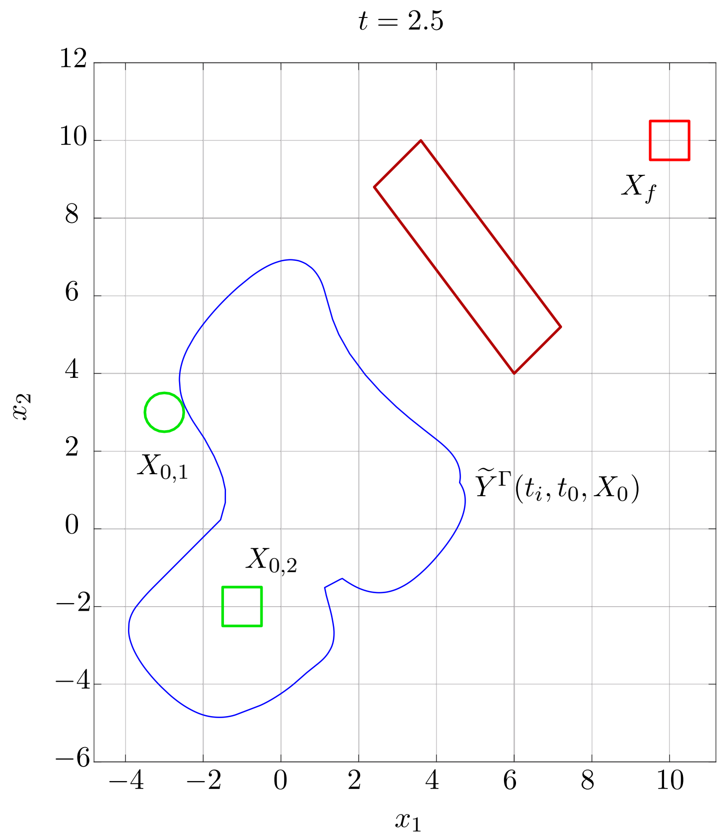

Рис. 20. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 2.5$ в задаче 1*

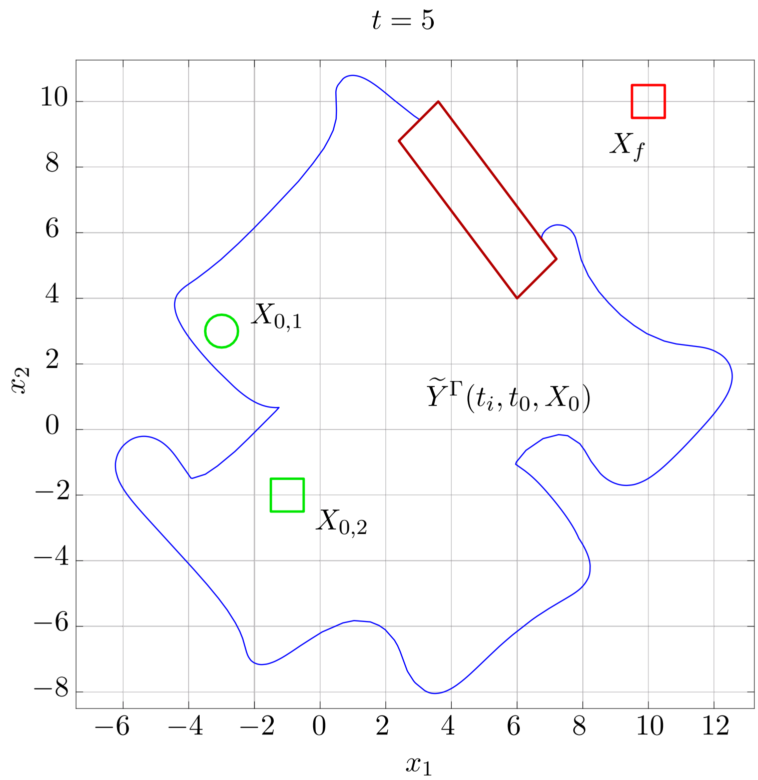

Рис. 21. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 5$ в задаче 1*

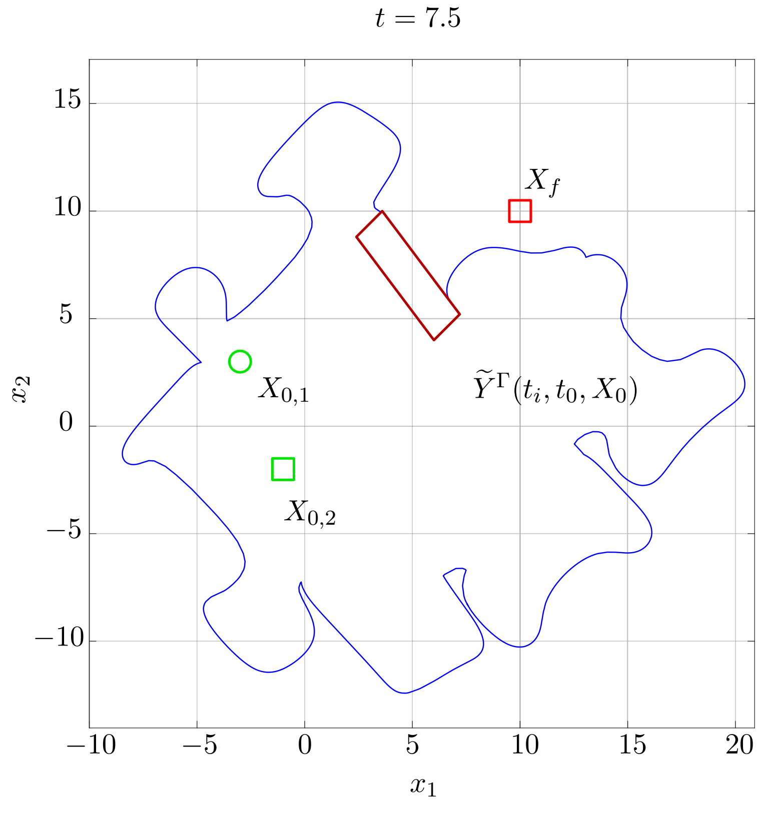

Рис. 22. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 7.5$ в задаче 1*

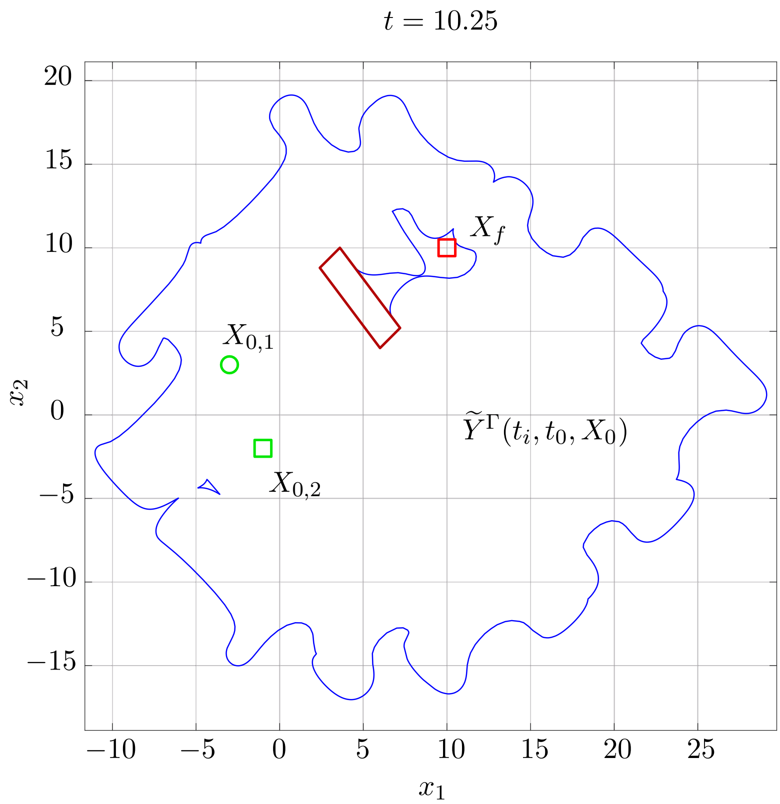

Рис. 23. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 10.25$ в задаче 1*

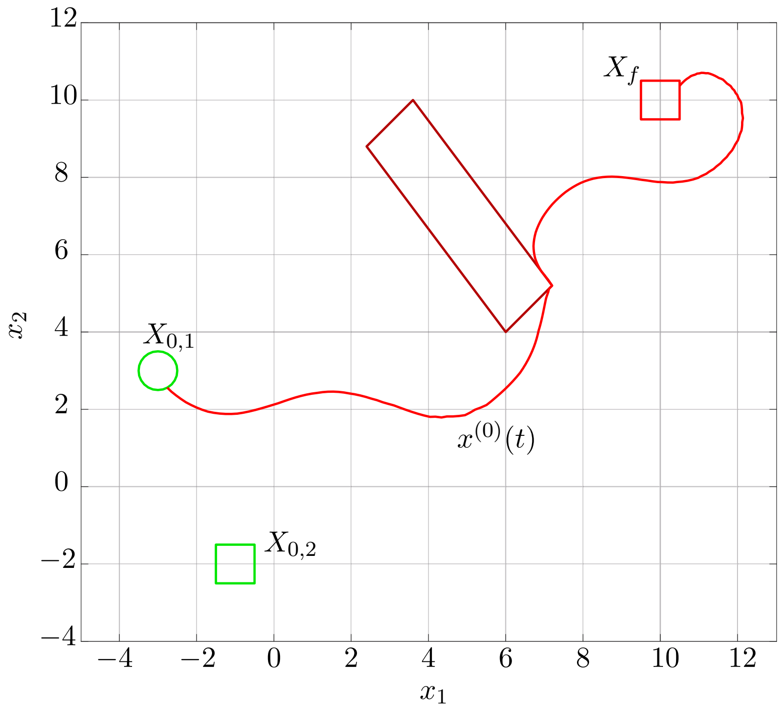

Рис. 24. Оптимальная траектория $x^0(t)$ в задаче 1* об оптимальном быстродействии

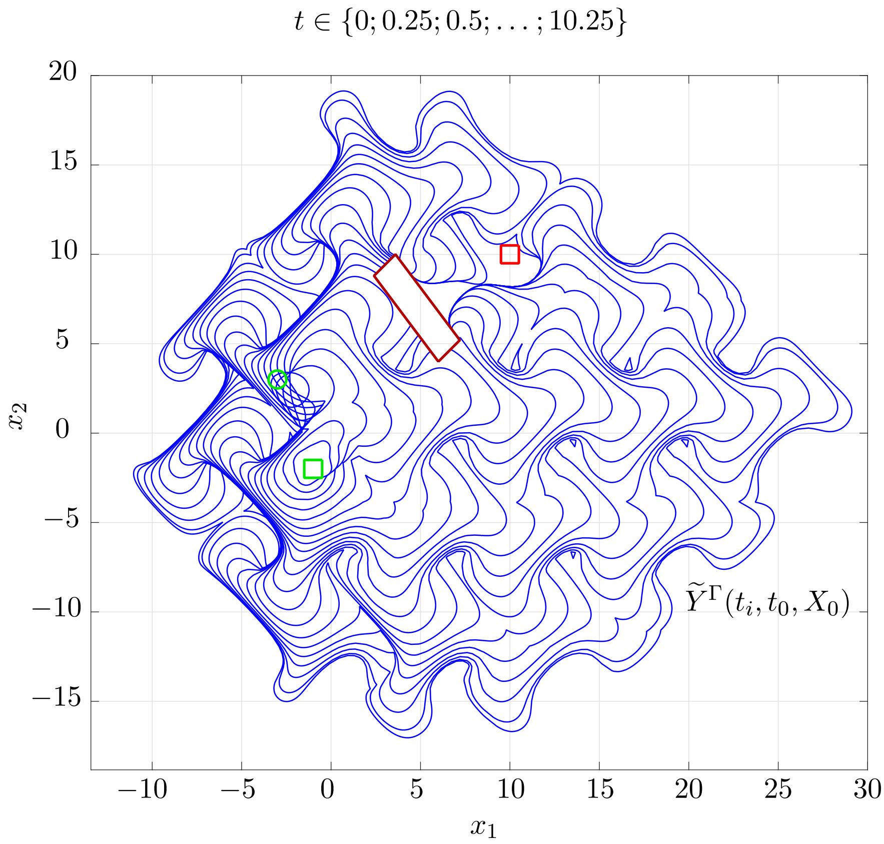

Рис. 25. Набор множеств достижимости, отвечающих дискретным моментам t, в задаче 1*

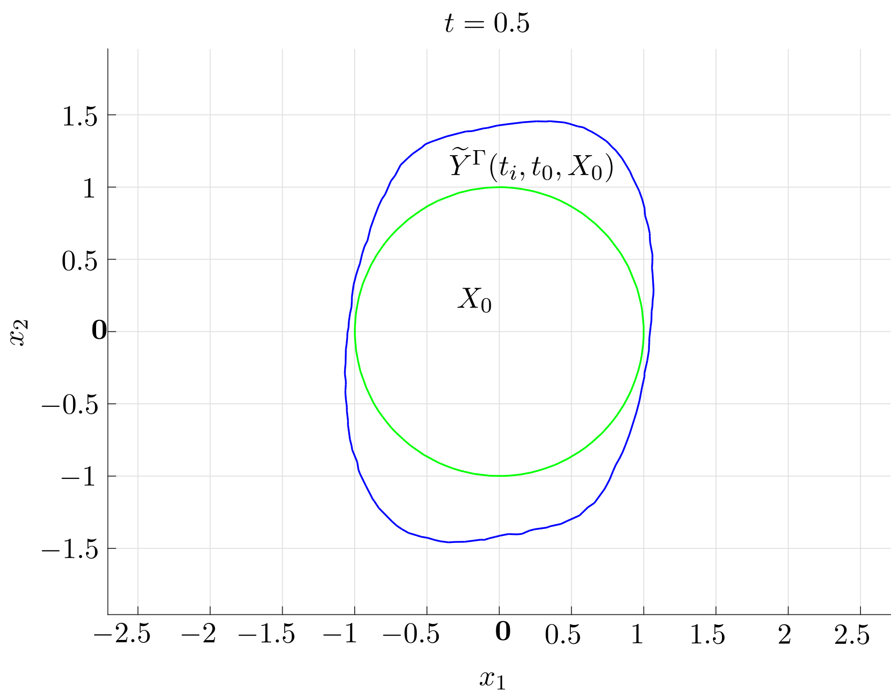

Рис. 26. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 0.5$ в задаче 2

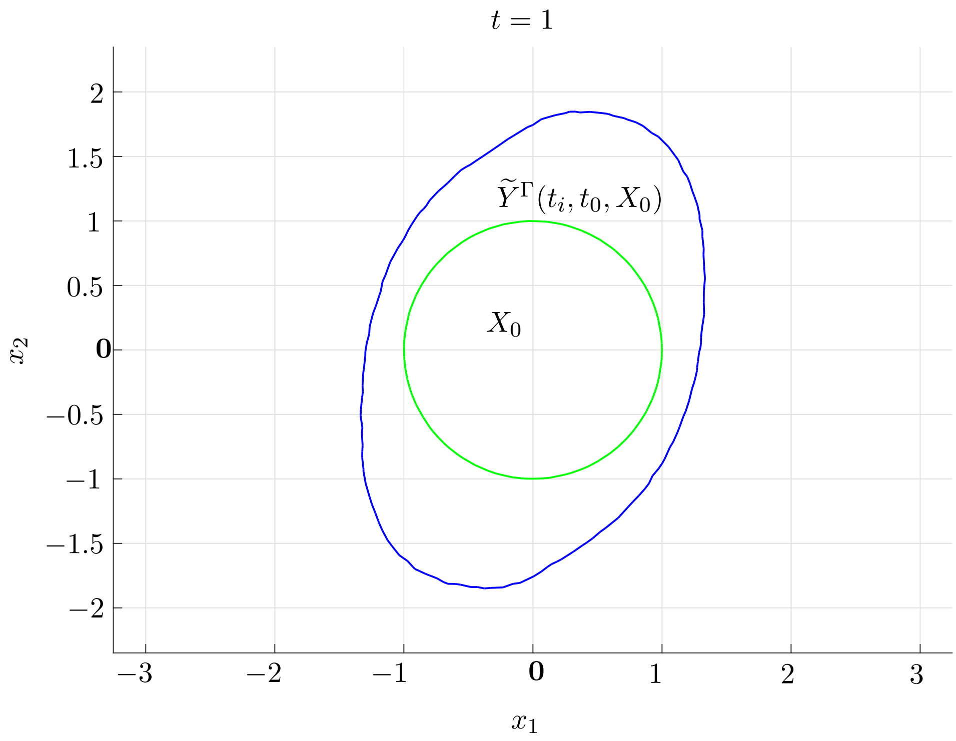

Рис. 27. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 1$ в задаче 2

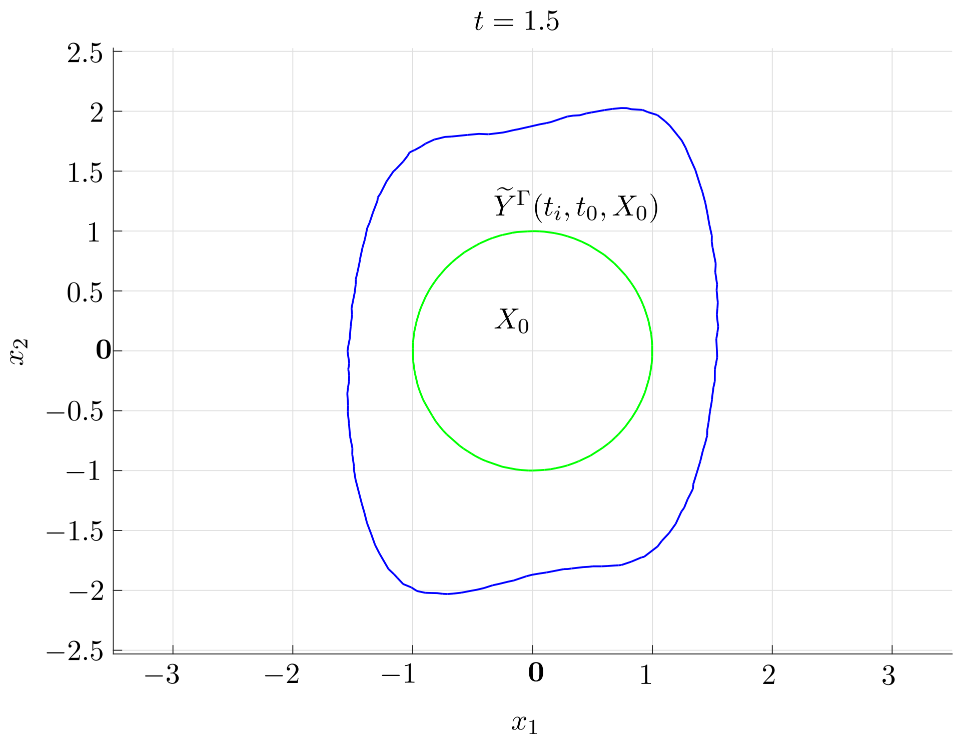

Рис. 28. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 1.5$ в задаче 2

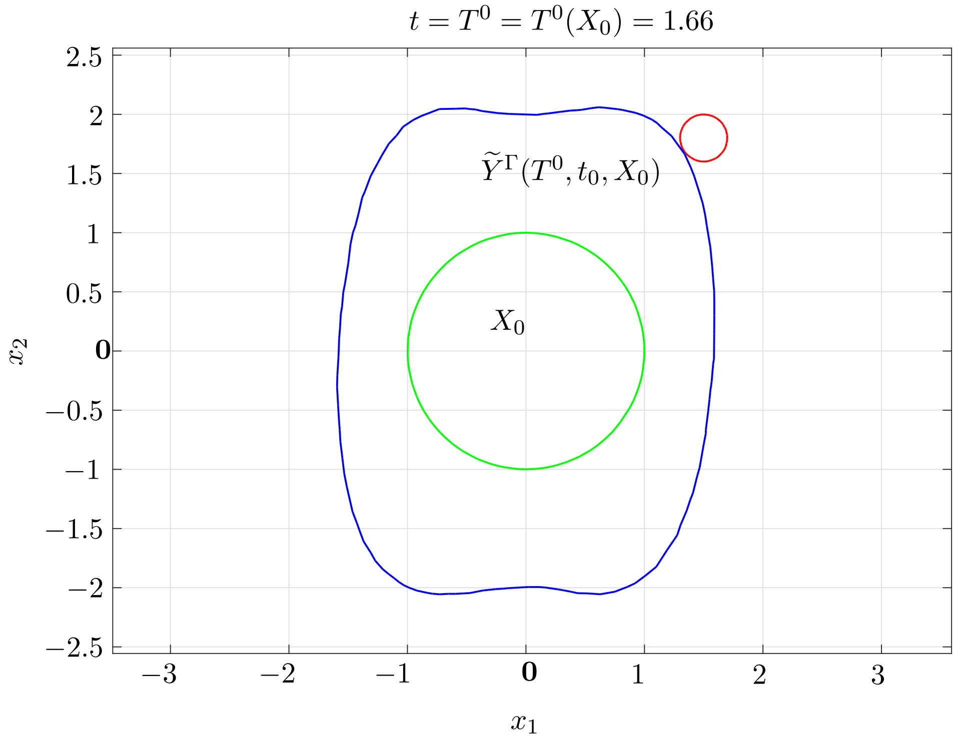

Рис. 29. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = T^0 = 1.66$ в задаче 2

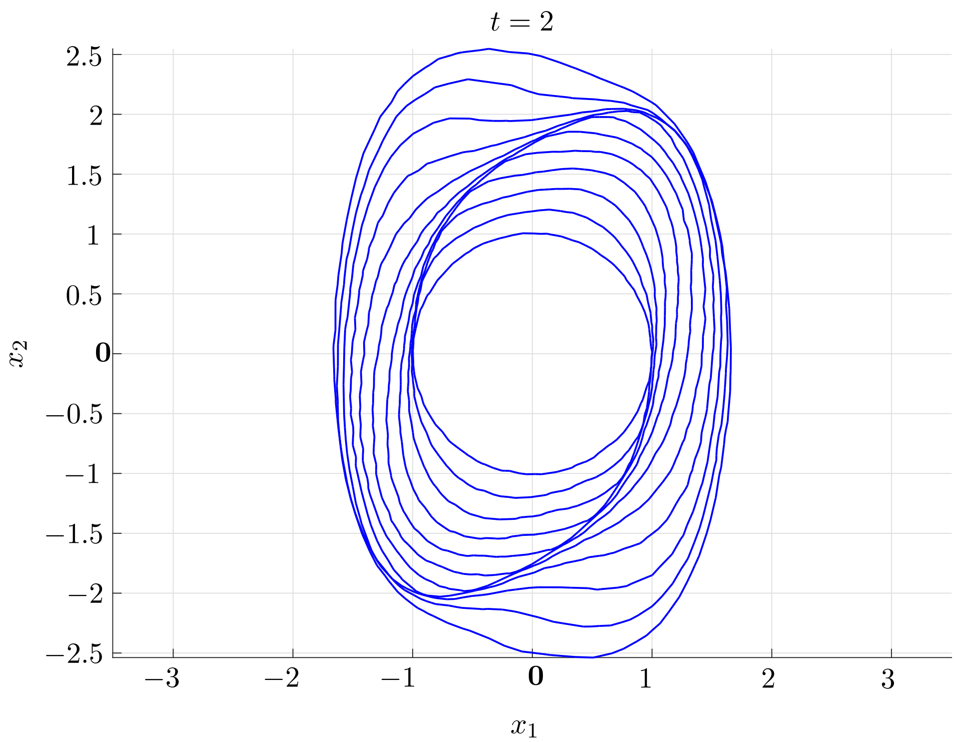

Рис. 30. Набор множеств достижимости, отвечающих дискретным моментам t в задаче 2

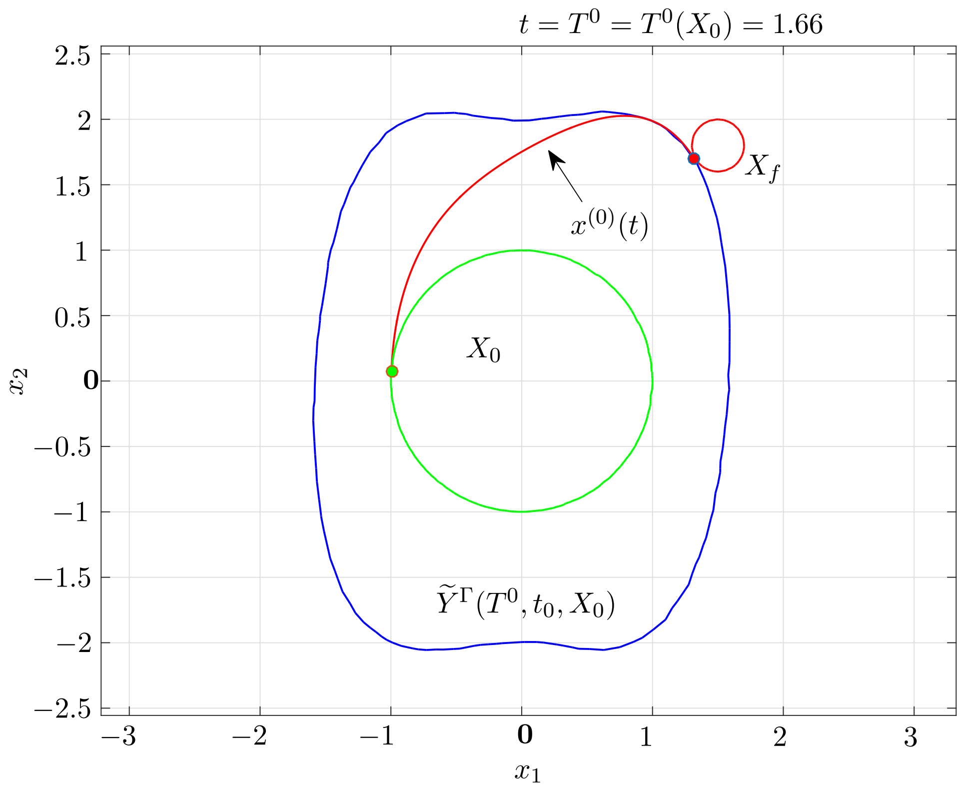

Рис. 31. Оптимальная траектория $x^0(t)$ в задаче 2 об оптимальном быстродействии

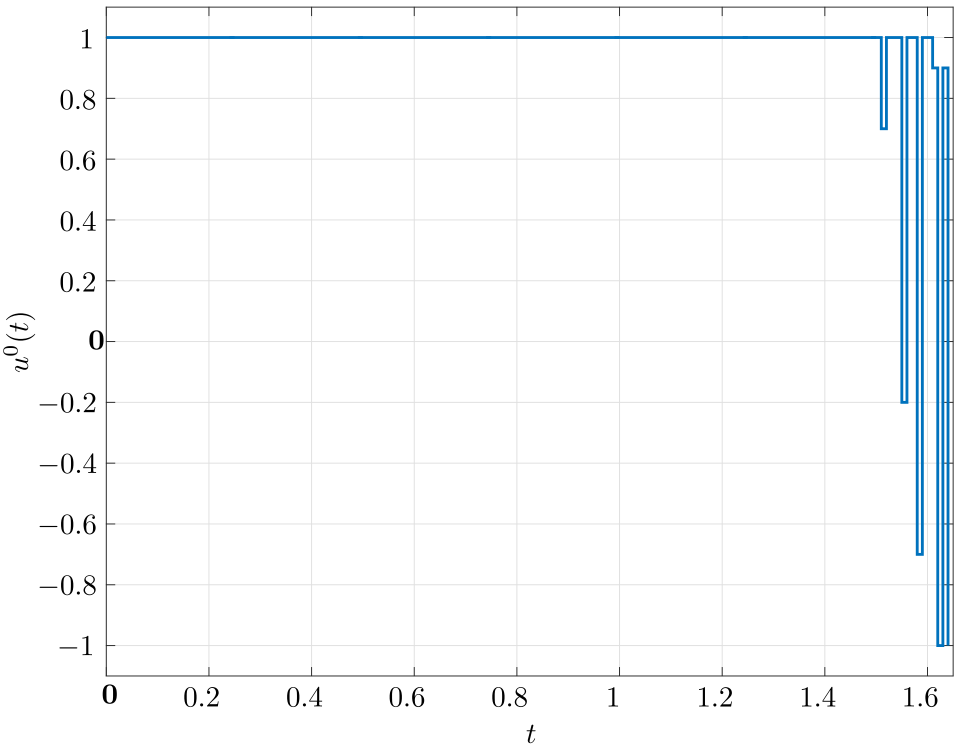

Рис. 32. Оптимальное управление $u^0(t)$ в задаче 2

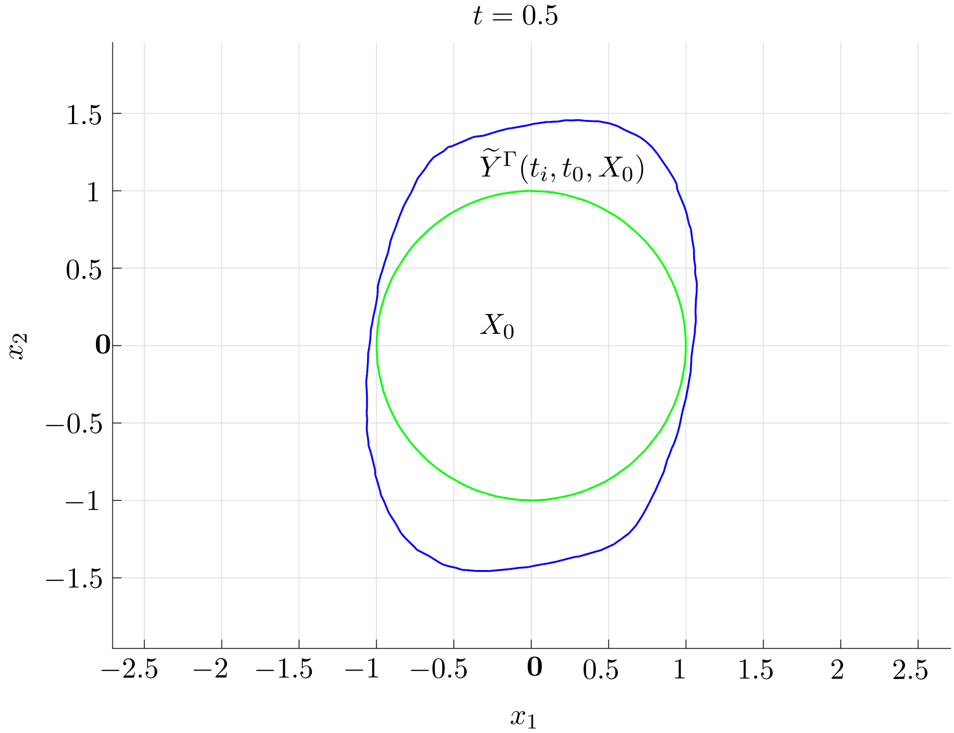

Рис. 33. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 0.5$ в задаче 2

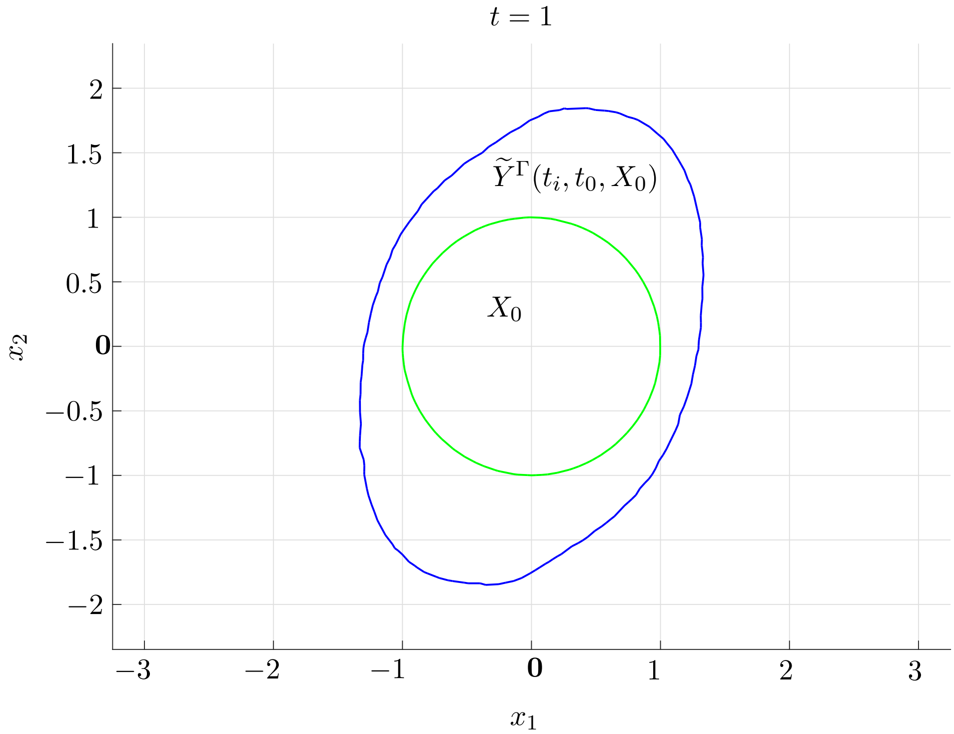

Рис. 34. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 1$ в задаче 2

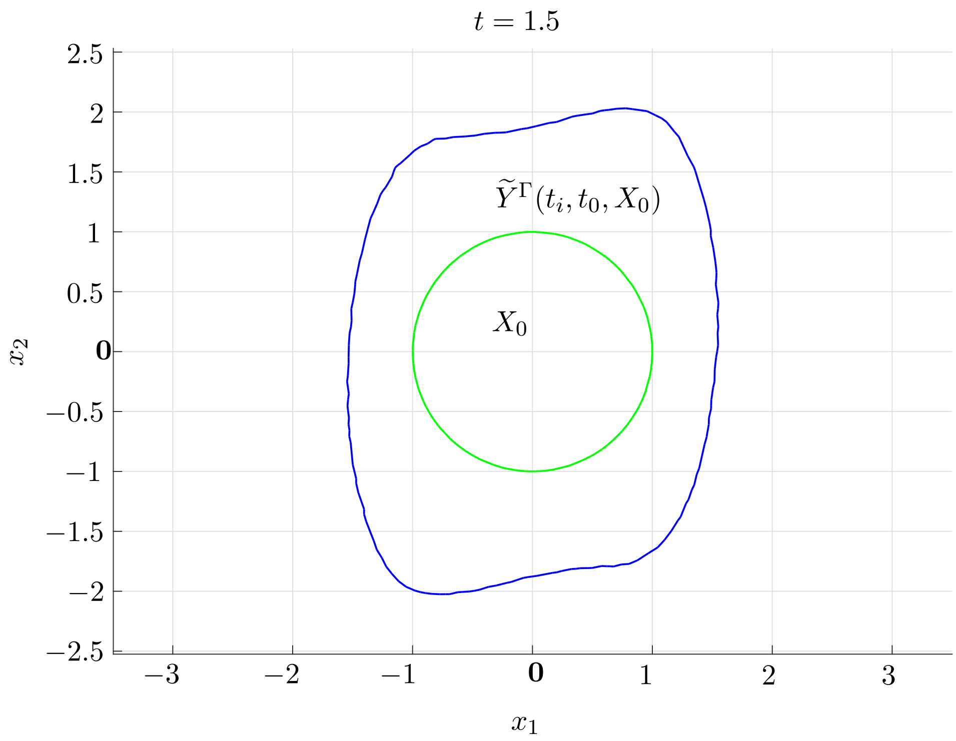

Рис. 35. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = 1.5$ в задаче 2

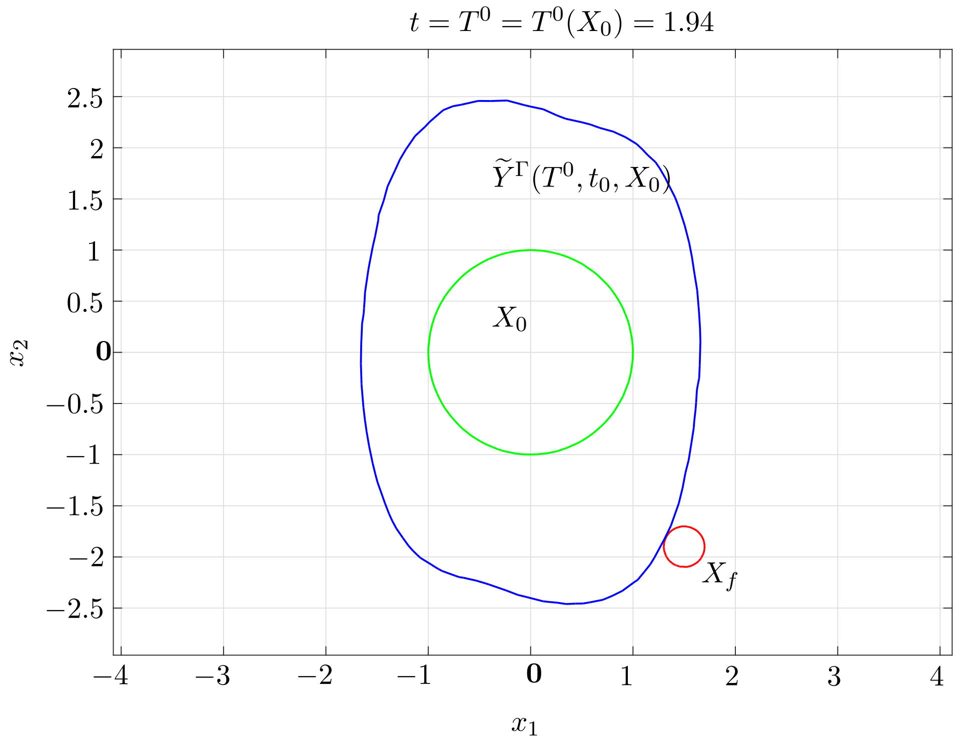

Рис. 36. Множество достижимости $\widetilde{Y}^{\Gamma}(t_i, t_0, X_0)$ в момент $t = T^0 = 1.94$ в задаче 2

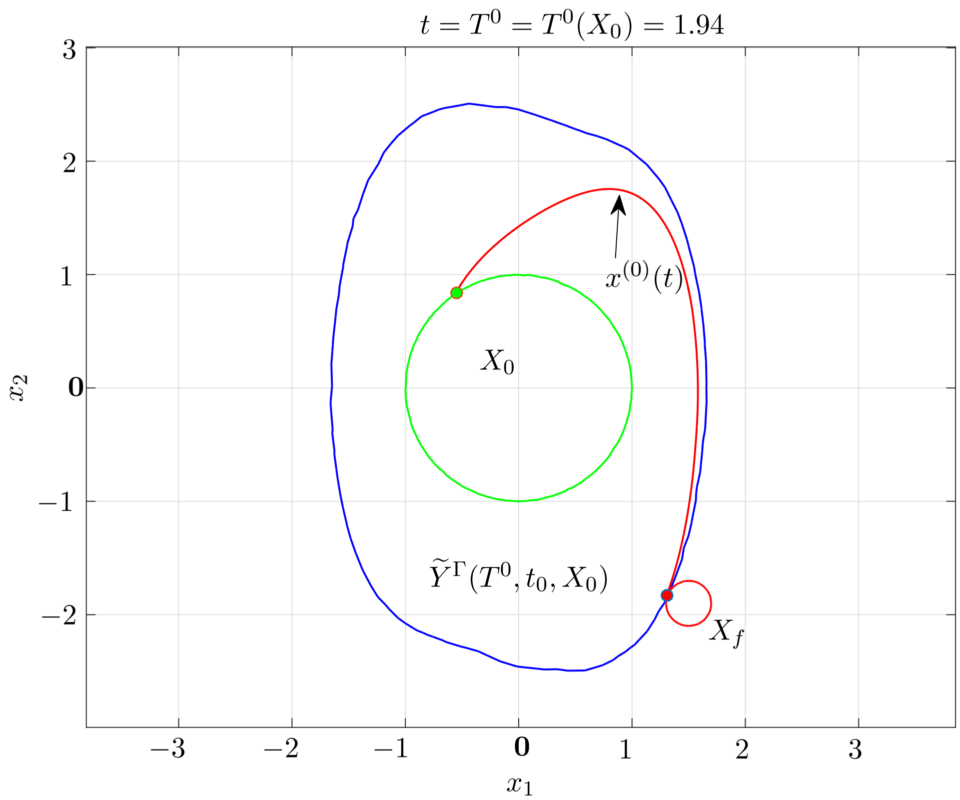

Рис. 37. Оптимальная траектория $x^0(t)$ в задаче 2 об оптимальном быстродействии

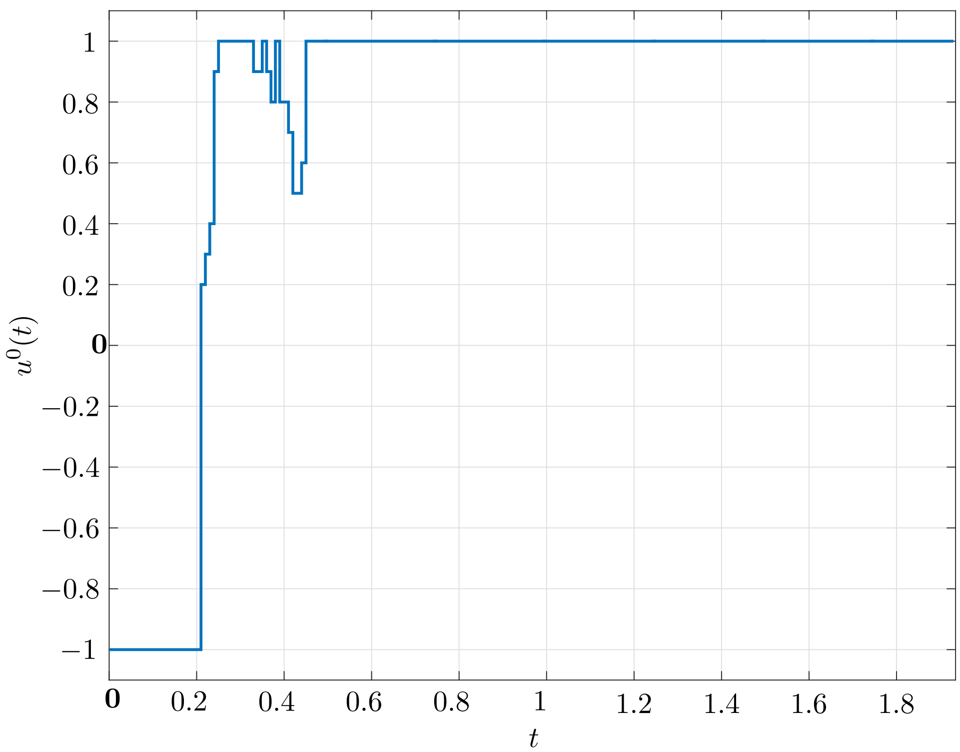

Рис. 38. Оптимальное управление $u^0(t)$ в задаче 2

Финансирование. Исследования третьего автора выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009. Исследования первого и четвертого автора выполнены в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения № 075-02-2026-737).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халил Х. К. Нелинейные системы. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.
2. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. https://zbmath.org/0461.93001
3. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 289. № 1. С. 38–41. https://www.mathnet.ru/rus/dan47573
4. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1995. Т. 211. С. 304–315. https://www.mathnet.ru/rus/tm1132
5. Kurzhanski A., Vályi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. https://zbmath.org/0865.93001
6. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability analysis: internal approximation // Systems and Control Letters. 2000. Vol. 41. Issue 3. P. 201–211. https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00059-1
7. Гусев М. И., Осипов И. О. Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 86–99. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-86-99
8. Гусев М. И. Асимптотическое поведение множеств достижимости нелинейных систем с изопериметрическими ограничениями на малых временных промежутках // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 89–101. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-89-101
9. Гусев М. И., Куржанский А. Б. К оптимизации управляемых систем при наличии ограничений. I // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 9. С. 1591–1602. https://www.mathnet.ru/rus/de1359
10. Гусев М. И., Куржанский А. Б. К оптимизации управляемых систем при наличии ограничений. II // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 10. С. 1789–1800. https://www.mathnet.ru/rus/de1383
11. Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальные оценки области достижимости управляемой системы // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 11–19. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26034635
12. Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю., Черноусько Ф. Л. Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 3–22. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/2012/76-1/3
13. Черноусько Ф. Л. Оптимизация движения в сопротивляющейся среде тела с подвижной внутренней массой // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 242–248. https://www.mathnet.ru/rus/timm146
14. Черноусько Ф. Л. Оптимальное перемещение многозвенной системы в среде с сопротивлением // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 240–255. https://www.mathnet.ru/rus/timm710
15. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н. Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 213–222. https://www.mathnet.ru/rus/timm624

16. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24057190
17. Chernousko F. L., Ananievski I. M., Reshmin S. A. Control of nonlinear dynamical systems. Methods and applications. Berlin: Springer, 2008. https://zbmath.org/1155.93001
18. Бектыбаева М. Т., Решмин С. А. Асимптотический анализ управления на базе закона линейного тангенса при большой тяге // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2025. № 5. С. 36–46. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=82965506
19. Овсеевич А. И., Черноусько Ф. Л. Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 737–744.
20. Chernousko F. L. State estimation for dynamic systems. Boca Raton: CRC Press, 1994.
21. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. https://zbmath.org/1124.93300
22. Kostousova E. K. External polyhedral estimates of reachable sets of discrete-time systems with integral bounds on additive terms // Mathematical Control and Related Fields. 2021. Vol. 11. Issue 3. P. 625–641. https://doi.org/10.3934/mcrf.2021015
23. Kostousova E. K. On solving terminal approach and evasion problems for linear discrete-time systems under state constraints // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 2. С. 204–221. https://doi.org/10.35634/vm240203
24. Ганебный С. А., Кумков С. С., Пацко В. С. Экстремальное прицеливание в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 573–586. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/2009/73-4/573
25. Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16. https://elibrary.ru/item.asp?id=17252513
26. Пацко В. С., Федотов А. А. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 182–197. http://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-182-197
27. Горнов А. Ю., Дмитриев М. Г., Тятюшкин А. И. Опыт решения задач оптимального управления с пограничным слоем / ИрВЦ СО АН СССР. Иркутск, 1985. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 09.12.1985, № 8441-В.
28. Горнов А. Ю., Жолудев А. И., Тятюшкин А. И., Эринчек Н. М. Численное решение задач оптимального управления в пакетном режиме // Пакеты прикладных программ. Опыт разработки. Новосибирск: Наука, 1983. С. 3–17.
29. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009.
30. Ушаков В. Н., Ухоботов В. И., Ушаков А. В., Паршиков Г. В. К решению задач о сближении управляемых систем // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 276–291. https://doi.org/10.1134/S0371968515040214
31. Ушаков В. Н., Ершов А. А. К решению задач управления с фиксированным моментом окончания // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 543–564. https://doi.org/10.20537/vm160409
32. Гусейнов Х. Г., Моисеев А. Н., Ушаков В. Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 179–187. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32805283
33. Ушаков В. Н., Ершов А. А., Паршиков Г. В. О приведении движения управляемой системы на множество Лебега липшицевой функции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 4. С. 489–512. https://doi.org/10.20537/vm180405
34. Никольский М. С. Об аппроксимации множества достижимости для управляемого процесса // Математические заметки. 1987. Т. 41. Вып. 1. С. 71–76. https://www.mathnet.ru/rus/mzm4811
35. Никольский М. С. Об оценке множества достижимости нелинейного управляемого объекта изнутри // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 11. С. 1487–1491. https://www.mathnet.ru/rus/de10034

36. Veliov V. Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions // Systems and Control Letters. 1989. Vol. 13. Issue 3. P. 263–269. https://doi.org/10.1016/0167-6911(89)90073-X
37. Veliov V. Approximations to differential inclusions by discrete inclusions. Laxenburg: International Institute for Applied Systems Analysis, 1989.
38. Комаров В. А. Оценки множества достижимости дифференциальных включений // Математические заметки. 1985. Т. 37. Вып. 6. С. 916–925. https://www.mathnet.ru/rus/mzm5396
39. Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1968. https://zbmath.org/0167.39003
40. Кузнецов С. П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2006.

Поступила в редакцию 30.12.2025
Принята к публикации 09.03.2026

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0527-5375
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Матвийчук Александр Ростиславович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел вычислительных систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3606-858X
E-mail: matv@imm.uran.ru

Ушаков Андрей Владимирович, научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
научный сотрудник, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3004-4245
E-mail: aushakov.pk@gmail.com

Кувшинов Олег Александрович, математик 1-ой категории, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6827-1809
E-mail: okuvshinov@inbox.ru

Цитирование: В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, А. В. Ушаков, О. А. Кувшинов. К решению некоторых задач управления нелинейными системами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 1. С. 99–136.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2026. Vol. 36. Issue 1. Pp. 99–136.

V. N. Ushakov, A. R. Matviichuk, A. V. Ushakov, O. A. Kuvshinov

To solve some control problems of nonlinear systems

Keywords: controlled system, control, finite-dimensional Euclidean space, reachability set, integral funnel, phase constraint.

MSC2020: 93C15, 49N30, 49N35

DOI: 10.35634/vm260106

A nonlinear controlled system in a finite-dimensional Euclidean space is considered. Some control tasks are formulated for it. An approach to solving problems based on the use of reachability sets and integral funnels of controlled systems and corresponding differential inclusions is discussed. Due to the complexity of the control tasks under consideration, an analytical representation of solutions for non-trivial controlled systems is impossible, and therefore this paper focuses on the issues of approximate design of solutions to problems. These issues are primarily related to the approximate construction of reachability sets and integral funnels of controlled systems. The paper also examines the problems of optimal performance of some nonlinear controlled systems, in particular, problems with phase constraints. The paper provides examples.

Funding. The research of the third author was supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the state assignment, project number FEWS-2024-0009. The research of the first and fourth authors was conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number № 075-02-2026-737).

REFERENCES

1. Khalil H. K. *Nonlinear systems*, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. https://zbmath.org/1003.34002
2. Kurzhanskii A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* (Control and observation under uncertainty), Moscow: Nauka, 1977. https://zbmath.org/0461.93001
3. Kurzhanskij A. B., Filippova T. F. On a description of the set of viable trajectories of a differential inclusion, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1987, vol. 34, pp. 30–33. https://zbmath.org/0622.34011
4. Kurzhanskiy A. B., Filippova T. F. Differential inclusions with phase constraints. The theory of perturbations, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1995, vol. 211, pp. 275–284. https://zbmath.org/0885.34013
5. Kurzhanski A., Vályi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, Boston: Birkhäuser, 1997. https://zbmath.org/0865.93001
6. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability analysis: internal approximation, *Systems and Control Letters*, 2000, vol. 41, issue 3, pp. 201–211. https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00059-1
7. Gusev M. I. Osipov I. O. Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2020, vol. 309, suppl. 1, pp. S52–S64. https://doi.org/10.1134/S0081543820040070
8. Gusev M. I. Asymptotic behavior of small-time reachable sets of nonlinear systems with isoperimetric constraints, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 89–101 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-89-101
9. Gusev M. I., Kurzhanskii A. B. On the optimization of control systems in the presence of constraints. I, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1971, vol. 7, no. 9, pp. 1591–1602 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de1359
10. Gusev M. I., Kurzhanskii A. B. Optimization of controlled systems with restrictions. II, *Differential Equations*, 1974, vol. 7, pp. 1357–1365. https://zbmath.org/0278.49019

11. Chernous'ko F. L. Ellipsoidal estimates of a controlled system's attainability domain, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1981, vol. 45, issue 1, pp. 7–12. https://doi.org/10.1016/0021-8928(81)90002-2
12. Bolotnik N. N., Figurina T. Yu., Chernous'ko F. L. Optimal control of the rectilinear motion of a two-body system in a resistive medium, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, issue 1, pp. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.03.001
13. Chernous'ko F. L. Optimization of the motion in a resistant medium of a body with a movable internal mass, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2006, vol. 253, suppl. 1, pp. S76–S82. https://doi.org/10.1134/S0081543806050063
14. Chernous'ko F. L. Optimal motion of a multilink system in a resistive medium, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 276, suppl. 1, pp. S63–S79. https://doi.org/10.1134/S0081543812020058
15. Chernous'ko F. L., Bolotnik N. N. Mobile robots controlled by the motion of internal bodies, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 213–222 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/timm624
16. Chernous'ko F. L., Anan'evskii I. M., Reshmin S. A. *Metody upravleniya nelineinymi mekhanicheskimi sistemami* (Methods for controlling nonlinear mechanical systems), Moscow: Fizmatlit, 2006. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24057190
17. Chernousko F. L., Ananievski I. M., Reshmin S. A. *Control of nonlinear dynamical systems: Methods and applications*, Berlin: Springer, 2008. https://zbmath.org/1155.93001
18. Bektybaeva M. T., Reshmin S. A. Asymptotic analysis of control based on the linear tangent law at high thrust, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2025, vol. 64, no. 5, pp. 723–734. https://doi.org/10.1134/S1064230725700613
19. Ovseevich A. I., Chernous'ko F. L. Two-sided estimates on the attainability domains of controlled systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, vol. 46, issue 5, pp. 590–595. https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90005-3
20. Chernous'ko F. L. *State estimation for dynamic systems*, Boca Raton: CRC Press, 1994.
21. Chernous'ko F. L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov* (Estimation of the phase state of dynamical systems. The method of ellipsoids), Moscow: Nauka, 1988. https://zbmath.org/1124.93300
22. Kostousova E. K. External polyhedral estimates of reachable sets of discrete-time systems with integral bounds on additive terms, *Mathematical Control and Related Fields*, 2021, vol. 11, issue 3, pp. 625–641. https://doi.org/10.3934/mcrf.2021015
23. Kostousova E. K. On solving terminal approach and evasion problems for linear discrete-time systems under state constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika, Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 2, pp. 204–221. https://doi.org/10.35634/vm240203
24. Ganebnyi S. A., Kumkov S. S., Patsko V. S. Extremal aiming in problems with an unknown level of dynamic disturbance, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, issue 4, pp. 411–420. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.08.010
25. Patsko V. S., Pyatko S. G., Fedotov A. A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328. https://elibrary.ru/item.asp?id=41191054
26. Patsko V. S., Fedotov A. A. Analytic description of a reachable set for the Dubins car, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 182–197 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-182-197
27. Gornov A. Yu., Dmitriev M. G., Tyatyushkin A. I. *Experience in solving optimal control problems with a boundary layer*, IrVTs SO AN SSSR, Irkutsk, 1985, 18 p. Deposited in VINITI 09.12.1985, no. 8441-B (in Russian).
28. Gornov A. Yu., Zholudev A. I., Tyatyushkin A. I., Erinchek N. M. Numerical solution of optimal control problems in batch mode, *Pakety prikladnykh programm. Opyt razrabotki*, Novosibirsk: Nauka, 1983, pp. 3–17 (in Russian).

29. Gornov A. Yu. *Vychislitel'nye tekhnologii resheniya zadach upravleniya* (Computational technologies for solving optimal control problems), Novosibirsk: Nauka, 2009.
30. Ushakov V. N., Ukhobotov V. I., Ushakov A. V., Parshikov G. V. On solving approach problems for control systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, pp. 263–278. https://doi.org/10.1134/S0081543815080210
31. Ushakov V. N., Ershov A. A. On the solution of control problems with fixed terminal time, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika, Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 543–564 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160409
32. Guseinov Kh. G., Moiseyev A. N., Ushakov V. N. The approximation of reachable domains of control systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, vol. 62, issue 2, pp. 169–175. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(98)00022-7
33. Ushakov V. N., Ershov A. A., Parshikov G. V. On reducing the motion of a controlled system to a Lebesgue set of a Lipschitz function, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 489–512 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180405
34. Nikol'skii M. S. Approximation of the attainability set for a controlled process, *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1987, vol. 41, issue 1, pp. 44–48. https://doi.org/10.1007/BF01159528
35. Nikol'skii M. S. An inner estimate of the attainability set of a nonlinear controlled object, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 11, pp. 1508–1511. https://zbmath.org/0979.93007
36. Veliov V. Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions, *Systems and Control Letters*, 1989, vol. 13, issue 3, pp. 263–269. https://doi.org/10.1016/0167-6911(89)90073-X
37. Veliov V. *Approximations to differential inclusions by discrete inclusions*, Laxenburg: International Institute for Applied Systems Analysis, 1989.
38. Komarov V. A. Estimates for the attainable set for differential inclusions, *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1985, vol. 37, issue 6, pp. 501–506. https://doi.org/10.1007/BF01157690
39. Leitmann G. *An introduction to optimal control*, Maidenhead: McGraw-Hill, 1966. https://zbmath.org/0196.46302
40. Kuznetsov S. P. *Dinamicheskii khaos (kurs lektsii)* (Dynamic chaos (lecture course)), Moscow: Fizmatlit, 2006.

Received 30.12.2025
Accepted 09.03.2026

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Principal Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0527-5375
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Matviichuk Aleksandr Rostislavovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Computer Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3606-858X
E-mail: matv@imm.uran.ru

Andrei Vladimirovich Ushakov, Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Researcher, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3004-4245
E-mail: aushakov.pk@gmail.com

Oleg Aleksandrovich Kuvshinov, Mathematician of the first category, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6827-1809
E-mail: okuvshinov@inbox.ru

Citation: V. N. Ushakov, A. R. Matviichuk, A. V. Ushakov, O. A. Kuvshinov. To solve some control problems of nonlinear systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 1, pp. 99–136.