ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2026. Т. 36. Вып. 1. С. 137–158.

УДК 517.977.1, 517.955, 517.988.6

© *А. В. Чернов*

О ТОЧНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ УПРАВЛЕНИИ

Для задачи Коши, связанной с нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве X, получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние (а также в заданные промежуточные состояния в промежуточные моменты времени) на произвольно фиксированном (без дополнительных условий) интервале времени при ограничении на величину нормы управления. Фактически, обобщается аналогичный результат, полученный автором ранее для случая операторного дифференциального уравнения со стационарным линейным оператором и линейно входящим управлением без ограничения на величину нормы. Так же, как и ранее, используются теорема Минти–Браудера, а также цепочечная технология последовательного продолжения решения управляемой системы до промежуточных состояний. В качестве примера (представляющего самостоятельный интерес) рассматривается сильно нелинейное псевдопараболическое уравнение в частных производных, описывающее эволюцию электрического поля в полупроводнике.

Ключевые слова: нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, точная глобальная управляемость, ограниченное управление, сильно нелинейное псевдопараболическое уравнение.

DOI: 10.35634/vm260107

Введение

Проблема управляемости распределенных систем является достаточно актуальной ввиду ее практической значимости и потому активно изучается. См. на этот счет обзоры в [1–3]. Исследуемые задачи управляемости в последнее время концентрировались, как правило, вокруг задач граничного управления [4–7] или случая, когда распределенное управление сосредоточено на части области [3, Sect. 4], [8]. Нелокальные достаточные условия точной управляемости доказывались при тех или иных условиях на величину промежутка времени [8–10] и/или при специальных условиях на операторы правой части (равномерная ограниченность, дифференцируемость по Фреше и равномерная ограниченность производной, глобальная липшицевость, иногда при специальных требованиях к коэффициентам, и т. д.) и условии точной управляемости (и иногда наблюдаемости) соответствующей линейной системы [1, § 3], [9–15]. Во многих работах рассматривается нелинейность вида $f(y)$, зависящая лишь от состояния y, непрерывная или локально липшицевая и удовлетворяющая специальному условию на порядок роста в окрестности бесконечности (в частности, типа $r\ln(Cr)$ с достаточно малым коэффициентом) [3, Sect. 4], [6, 16]. Иногда относительно нелинейности предполагается полиномиальный рост [17]. Некоторые авторы при доказательстве точной глобальной управляемости существенным образом используют специальные свойства решений исследуемых уравнений конкретного вида: например, «распространение компактности и регулярности» в пространствах Бургейна (Bourgain’s spaces) [18]; см. также [19]. В [20] рассматриваются полулинейные эволюционные уравнения специального вида, доказывается точная управляемость вдоль т. н. A-ограниченных по Липшицу непрерывных кривых и аппроксимативная управляемость вдоль непрерывных кривых при асимптотическом условии на норму управляемости обратного оператора

Грама в окрестности нуля. Упомянем также работу [21], посвященную аппроксимативной управляемости полулинейного уравнения в рефлексивном банаховом пространстве при специальных требованиях относительно резольвенты (нестационарного) генератора семейства эволюционных операторов — в частности, требований компактности и выполнения оценки $\bigl\|R(\lambda, G(t))\bigr\| \leqslant \dfrac{M}{|\lambda|+1}$. Впрочем, в представленном примере (одномерное уравнение диффузии) устанавливается лишь оценка [21, (5.14)]: $\bigl\|R(\lambda, G(t))\bigr\| \leqslant \dfrac{M}{\delta\lambda}$ при некотором фиксированном $\delta > 0$ для всех $\lambda > 0$, и утверждается, что требуемое неравенство отсюда следует. Однако, обозначая $\widetilde{M} = \dfrac{M}{\delta}$, понимаем, что это не так. Совсем отдельное направление — исследование управляемости при использовании импульсных управлений и случай уравнений с дробными производными [22, 23]. Сравнительно мало работ посвящено управляемости полулинейных эволюционных уравнений при ограничениях на управления — см., например, [8, 14] (здесь накладывалось условие неотрицательности). Оригинальный подход к проблеме управляемости нелинейных распределенных систем, основанный на понятии корректности по А. Н. Тихонову, предлагается в [24]. Результаты по точной локальной управляемости нелинейных распределенных систем можно найти в [25, глава 7], там же см. дальнейшую библиографию.

В работе [26] исследовалась задача Коши, связанная с управляемым полулинейным эволюционным уравнением вида

$$y'(t) = Gy(t) + f\bigl(t, y(t)\bigr) + B(t)u(t), \quad t \in [0; T]; \quad y(0) = y_0, \tag{0.1}$$

с необязательно ограниченным линейным оператором G в гильбертовом пространстве X, семейством линейных ограниченных операторов $\bigl\{B(t)\colon X \to X \mid t \in [0; T]\bigr\}$, $B(\cdot)u(\cdot) \in \in L_2(0, T; X)\ \forall\, u \in L_2(0, T; X)$, и управлением $u \in L_2(0, T; X)$. Для задачи (0.1) были получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние (а также в заданные промежуточные состояния в промежуточные моменты времени) на произвольно фиксированном (без дополнительных условий) интервале времени. При этом использовались теорема Минти–Браудера, а также цепочечная технология последовательного продолжения решения управляемой системы до промежуточных состояний. В качестве примеров рассматривались полулинейное псевдопараболическое уравнение и полулинейное волновое уравнение.

В [27] результаты [26] были обобщены на случай нестационарного (но ограниченного) оператора $G = G(t)$. В качестве примера рассматривалось полулинейное уравнение глобальной электрической цепи в атмосфере Земли.

В данной работе производится непосредственное обобщение результатов [26] на случай неавтономного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с нелинейно входящим управлением, ограниченным по норме. Правая часть предполагается ограниченной на ограниченных множествах, локально липшицевой по состоянию и сильно монотонной и коэрцитивной (в некотором ослабленном смысле) по управлению. Случай уравнения вида (0.1), в том числе с нестационарным сильно непрерывным (по времени) линейным ограниченным оператором $G(t)$ сюда вписывается, поскольку член $G(t)x(t)$ может быть отнесен к правой части. Исследование случая неограниченных операторов $G(t)$ сопряжено с определенными техническими сложностями. Поэтому указанный случай мы оставляем пока в планах на будущее. Отметим, наконец, что в данной работе, в отличие от [26], где рассматривались слабые решения уравнения (0.1), решение управляемого уравнения понимается в сильном смысле. В качестве примера (представляющего самостоятельный интерес) рассматривается сильно нелинейное псевдопараболическое уравнение в частных производных, описывающее эволюцию электрического поля в полупроводнике.

В заключение скажем несколько слов о пользе информации о наличии точной (или хотя бы аппроксимативной) управляемости распределенной системы. Как известно, в теории некорректных задач информация о совместности точной системы (да и вообще любая дополнительная априорная информация) оказывается полезной, поскольку позволяет упростить алгоритм поиска решения. Аналогичным образом, будет, вероятно, полезна и информация о точной управляемости (в классическом смысле), если ее факт удается установить. Кроме того, эта информация полезна и при отладке и калибровке численных алгоритмов. Предположим, что точная управляемость для данной задачи установлена, а текущая численная реализация алгоритма дает управление, переводящее систему в состояние, не достаточно близкое к заданному. Отсюда сразу понятно, что численная реализация алгоритма нуждается в отладке или калибровке. В этом контексте потребителями результатов об условиях точной (или аппроксимативной) управляемости могут быть как «теоретики», так и «практики».

§ 1. Предварительные построения и соглашения

Будем использовать обозначения: $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}\colon r \geqslant 0\}$, $\mathbf{C}(0,T;X) \equiv \mathbf{C}\big([0;T];X\big)$ — пространство функций, определенных на отрезке $[0;T]$, со значениями в линейном нормированном пространстве X, непрерывных относительно нормы X; $\mathbf{C}^1(0,T;X)$ — пространство функций, определенных на отрезке $[0;T]$, со значениями в линейном нормированном пространстве X, имеющих непрерывную сильную производную; $L_2(\Omega)$ — лебегово пространство функций, суммируемых с квадратом на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $L_2^m(\Omega)$ — пространство m-вектор-функций с компонентами из $L_2(\Omega)$, $\|u\|_{L_2^m} = \big\||u|\big\|_{L_2}$ (модуль вектора можно понимать как корень из суммы квадратов компонент или как сумму модулей компонент — это не принципиально, поскольку в $\mathbb{R}^m$ все нормы эквивалентны); $\mathbb{H}^1(\Omega) \equiv W_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева функций из $L_2(\Omega)$, обладающих обобщенными частными производными первого порядка из $L_2(\Omega)$; $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — замыкание $\mathbf{C}_0^1(\Omega)$ по норме $\mathbb{H}^1(\Omega)$, где $\mathbf{C}_0^1(\Omega)$ — множество функций из $\mathbf{C}^1(\Omega)$, имеющих компактный носитель в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{C}^1(\Omega)$ — пространство функций, непрерывно дифференцируемых на Ω. Нормы в указанных пространствах предполагаются стандартными.

Пусть X — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot,\cdot]_X$; $E = E(T) \equiv \mathbf{C}(0,T;X)$. Предположим, кроме того, что задана функция[1] (оператор) $f_1\colon [0;T] \times X \to X$, удовлетворяющая условиям:

($\mathbf{F}_1$) $\forall\, x \in E$ отображение $[0;T] \ni t \to f_1\big(t, x(t)\big)$ принадлежит классу E;

($\mathbf{F}_2$) существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M)\colon [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $x,\ y \in X$, $\|x\|_X$, $\|y\|_X \leqslant M$, п. в. $t \in [0;T]$ имеем: $\|f_1(t,x) - f_1(t,y)\|_X \leqslant \mathcal{N}(t,M)\,\|x-y\|_X$;

($\mathbf{F}_3$) существует функция $\mathcal{N}_1(t,r)\colon [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по t такая, что $\|f_1(t,\xi)\|_X \leqslant \mathcal{N}_1(t,M)\ \forall\, M > 0$, $\xi \in X$, $\|\xi\|_X \leqslant M$, п. в. $t \in [0;T]$;

($\mathbf{F}_4$) существуют неубывающие функции $K_i\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $i = 1,2$, такие, что

$$\int_h \mathcal{N}(s,\sigma)\,ds \leqslant K_1(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h, \qquad \int_h \mathcal{N}_1(s,\sigma)\,ds \leqslant K_2(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h \quad \forall\,\sigma > 0.$$

Пусть U — некоторое гильбертово пространство, понимаемое как множество значений управления, $C(t)\colon X \to U$ — сильно непрерывное на $[0;T]$ семейство линейных ограничен-

---

[1] Можно понимать как зависящий от времени оператор $f_1(t)\colon X \to X$, $t \in [0;T]$. Но, очевидно, можно понимать и так: $f_1(t,x) = f_1(t)[x] \in X$ при $t \in [0;T]$, $x \in X$.

ных операторов (ЛОО); $\mathbf{St}(0,T;X)$ — множество ступенчатых функций на $[0;T]$ со значениями в X; $W=\bigl\{u=C(\cdot)\xi(\cdot)\colon \xi\in\mathbf{St}(0,T;X),\ \|\xi(t)\|_X\leqslant\rho,\ t\in[0;T]\bigr\}$ — множество допустимых управлений. Как указано в [28, глава II, § 2, с. 231], из сильной непрерывности ЛОО $C(t)$ следует его равномерная ограниченность на $[0;T]$: $\|C(t)\|\leqslant M_0$ (это следствие теоремы Банаха–Штейнгауза [29, теорема 7.1.12, с. 413]). Предположим, что задана функция (оператор) $b\colon[0;T]\times X\times U\to X$, удовлетворяющая условиям:

(B_1) для всех $x\in E$, $u\in\mathbf{C}(0,T;U)$ отображение $[0;T]\ni t\to b\bigl(t,x(t),u(t)\bigr)$ принадлежит классу E;

(B_2) существует функция $\mathcal{N}_2=\mathcal{N}_2(t,M)\colon[0;T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0;T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb{R}_+$ такая, что для всех x, $y\in X$, $\|x\|_X$, $\|y\|_X\leqslant M$, $u\in U$, $\|u\|_U\leqslant M$, п. в. $t\in[0;T]$ имеем: $\|b(t,x,u)-b(t,y,u)\|_X\leqslant\mathcal{N}_2(t,M)\,\|x-y\|_X$;

(B_3) существует функция $\mathcal{N}_3(t,r)\colon[0;T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по t такая, что $\|b(t,\xi,u)\|_X\leqslant\mathcal{N}_3(t,M)$ для всех $M>0$, $\xi\in X$, $\|\xi\|_X\leqslant M$, $u\in U$, $\|u\|_U\leqslant M$, п. в. $t\in[0;T]$;

(B_4) существует константа $\beta_0>0$ такая, что

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\Bigl[b\bigl(s,x(s),C(s)\xi\bigr),\xi\Bigr]\,ds\geqslant\beta_0(\tau_2-\tau_1)\|\xi\|^2\quad\forall\,\xi\in X,\ x\in E(T),\ 0\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant T;$$

(B_5) существует константа $\beta_1>0$ такая, что $\forall\,x\in E(T)$, $0\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant T$ имеем:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\Bigl[b\bigl(s,x(s),C(s)\xi_1\bigr)-b\bigl(s,x(s),C(s)\xi_2\bigr),\xi_1-\xi_2\Bigr]ds\geqslant\beta_1(\tau_2-\tau_1)\|\xi_1-\xi_2\|^2\ \ \forall\,\xi_1,\xi_2\in X;$$

(B_6) существует функция $\mathcal{N}_4=\mathcal{N}_4(t,M)\colon[0;T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0;T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb{R}_+$, такая, что $\forall\,x\in X$, $u,v\in U$, $\|x\|_X$, $\|u\|_U,\|v\|_U\leqslant M$, п. в. $t\in[0;T]$ имеем: $\|b(t,x,u)-b(t,x,v)\|_X\leqslant\mathcal{N}_4(t,M)\,\|u-v\|_U$;

(B_7) существует неубывающая функция $K_3\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такая, что

$$\int_h\mathcal{N}_2(s,\sigma)\,ds\leqslant K_3(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h\quad\forall\,\sigma>0.$$

Пример 1. Пусть $B(t)$ — сильно непрерывное на $[0;T]$ семейство ЛОО $U\to X$,

$$\|B^*(t)x\|_U\geqslant\beta_0\,\|x\|_X\quad\forall\,t\in[0;T],\quad x\in X;\quad\|B^*(t)\|=\|B(t)\|\leqslant\beta\quad\forall\,t\in[0;T].$$

Тогда функция $b(t,x,u)=B(t)u$ удовлетворяет условиям B_1–B_7 при $C(t)=B^*(t)$, если это семейство сильно непрерывно. Здесь условия B_4 и B_5 равносильны.

Рассмотрение случая нелинейной функции $b(t,x,u)$ гораздо более трудоемко.

Пример 2. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — открытое ограниченное множество, $X=\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $U=L_2^n(\Omega)$, $u\in U$. Согласно [30, замечание 7, с. 338] скалярное произведение на X можно определить следующим образом: $[x,y]=\displaystyle\int_\Omega\nabla x(s)\cdot\nabla y(s)\,ds$, где «$\cdot$» обозначает скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функционал $\ell[u](x)=\displaystyle\int_\Omega u(s)\cdot\nabla x(s)\,ds$, $x\in X$.

С учетом неравенства Гёльдера, для любого фиксированного $u\in U$ $\ell[u](x)$ есть линейный непрерывный функционал на X. Поэтому, согласно теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве [31, глава I, теорема 6.1, с. 27], существует единственный элемент $z\in X$, отвечающий функционалу $\ell[u]$, а стало быть, и элементу $u \in U$, такой, что $\ell[u](x) = [z, x]$, $\|z\|_X = \|\ell[u]\|$. Указанное соответствие $U \ni u \to z \in X$ будем понимать как оператор $B\colon U \to X$. Таким образом,

$$\ell[u](x) = [Bu, x], \quad u \in U, \quad x \in X.$$

Отсюда и из определения функционала $\ell[u](x)$ очевидно, что B — линейный оператор. По неравенству Гёльдера, $|\ell[u](x)| \leqslant \|u\|_U \|x\|_X$. Стало быть, $\|Bu\| = \|\ell[u]\| \leqslant \|u\|_U$, то есть B — ЛОО, причем $\|B\| \leqslant 1$. Сопряженный оператор $B^*\colon X^* \to U^*$, с учетом отождествления $X^* = X$, $U^* = U$, определяется из условия:

$$(B^* x, u)_U = [x, Bu] = \ell[u](x) = \int_\Omega u(s) \cdot \nabla x(s)\, ds = (u, \nabla x)_U.$$

Таким образом, $B^* x = \nabla x$. И соответственно,

$$\|B^* x\|_U^2 = \|\nabla x\|_U^2 = \|x\|_X^2 \quad \Rightarrow \quad \|B^* x\|_U = \|x\|_X \quad \Rightarrow \quad \|B\| = \|B^*\| = 1.$$

Далее для n-вектор-функции $u = u(s)$, $s \in \Omega$, с компонентами из $L_2(\Omega)$, то есть для $u \in U = L_2^n(\Omega)$, модуль $|u|$ понимается как модуль вектора $|u(s)|$. Модуль вектора можно понимать как корень из суммы квадратов компонент или как сумму модулей компонент — это не принципиально. В частности, модуль скаляра — это обычный модуль.

Примем $C = B^*$, $b(t, x, u) = B\bigl[\psi(t, |\nabla x|, |u|)u\bigr]$, где функция $\psi\colon [0; T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ обладает свойствами:

- ($\mathbf{\Psi}_1$) $\psi(t, x, r)$ непрерывна на $[0; T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$;
- ($\mathbf{\Psi}_2$) $0 < c \leqslant \psi(t, x, r) \leqslant c_1$ на $[0; T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$;
- ($\mathbf{\Psi}_3$) $\psi(t, x, r)$ не убывает по $r \geqslant 0$ при всех $t \in [0; T]$, $x \geqslant 0$;
- ($\mathbf{\Psi}_4$) существует непрерывная функция $\psi_0\colon [0; T] \to \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$, $u \in \mathbb{R}_+$, $t \in [0; T]$ имеем: $\bigl|\psi(t, x, u) - \psi(t, y, u)\bigr|\, u \leqslant \psi_0(t)|x - y|$;
- ($\mathbf{\Psi}_5$) существует непрерывная функция $\psi_1\colon [0; T] \to \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $x, u, v \in \mathbb{R}_+$, $u \leqslant v$, $t \in [0; T]$ имеем: $\bigl\{\psi(t, x, v) - \psi(t, x, u)\bigr\}\, u \leqslant \psi_1(t)|u - v|$.

Пример функции, удовлетворяющей условиям $\mathbf{\Psi}_1$–$\mathbf{\Psi}_5$: $\psi(t, x, u) = c + \psi_0(t) \operatorname{arctg}(x + u)$, где функция $\psi_0(t)$ положительна и непрерывна, $c > 0$.

Далее в интегралах, там, где участвует переменная времени t, а интегрирование ведется по $s \in \Omega$, у подынтегральных функций для краткости аргумент s будем опускать. Например, запись

$$\int_\Omega \psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr) u\, ds$$

будет означать на самом деле

$$\int_\Omega \psi\bigl(t, |\nabla x(s)|, |u(s)|\bigr) u(s)\, ds.$$

Проверим выполнение условий $\mathbf{B}_1$–$\mathbf{B}_7$. Выполнение условия $\mathbf{B}_3$ очевидно в силу условия $\mathbf{\Psi}_2$. Условие $\mathbf{B}_1$ вытекает из условий $\mathbf{\Psi}_1$, $\mathbf{\Psi}_2$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_6$. Для проверки условия $\mathbf{B}_2$, пользуясь условием $\mathbf{\Psi}_4$, оценим:

$$\Bigl\|\psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr)u - \psi\bigl(t, |\nabla y|, |u|\bigr)u\Bigr\|_U^2 = \int_\Omega \Bigl|\psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr)u - \psi\bigl(t, |\nabla y|, |u|\bigr)u\Bigr|^2 ds =$$
$$= \int_\Omega \Bigl|\psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr) - \psi\bigl(t, |\nabla y|, |u|\bigr)\Bigr|^2 |u|^2\, ds \leqslant \psi_0^2(t) \int_\Omega \Bigl||\nabla x| - |\nabla y|\Bigr|^2 ds \leqslant \psi_0^2(t)\|x - y\|_X^2.$$

Таким образом, условие $\mathbf{B}_2$ выполнено при $\mathcal{N}_2(t, M) = \|B\|\psi_0(t) = \psi_0(t)$. Отсюда очевидно, что и условие $\mathbf{B}_7$ тоже выполнено за счет ограниченности непрерывной функции $\psi_0(t)$. Для проверки условия $\mathbf{B}_6$ разделим множество Ω на два подмножества:

$$\Omega_+ = \bigl\{s \in \Omega\colon |u(s)| \geqslant |v(s)|\bigr\}, \quad \Omega_- = \bigl\{s \in \Omega\colon |u(s)| < |v(s)|\bigr\}.$$

Пользуясь условиями $\mathbf{\Psi}_2$, $\mathbf{\Psi}_5$, рассмотрим:

$$\int_{\Omega_+} \Bigl|\psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr)u - \psi\bigl(t, |\nabla x|, |v|\bigr)v \pm \psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr)v\Bigr|^2 ds \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{\Omega_+} \Bigl|\psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr)u - \psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr)v\Bigr|^2 ds + 2\int_{\Omega_+} \Bigl|\psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr)v - \psi\bigl(t, |\nabla x|, |v|\bigr)v\Bigr|^2 ds \leqslant$$
$$\leqslant 2c_1^2 \int_{\Omega_+} |u - v|^2\, ds + 2\psi_1^2(t) \int_{\Omega_+} |u - v|^2\, ds \leqslant 2\bigl(c_1^2 + \psi_1^2(t)\bigr)\|u - v\|_U^2.$$

Аналогичную оценку получаем и для множества Ω_-. Таким образом, условие $\mathbf{B}_6$ выполнено при $\mathcal{N}_4(t, M) = 2\sqrt{c_1^2 + \psi_1^2(t)}$. Проверим условие $\mathbf{B}_4$. По условию $\mathbf{\Psi}_2$

$$\bigl[b(t, x, C\xi), \xi\bigr] = \int_\Omega \Bigl(\psi\bigl(t, |\nabla x|, |C\xi|\bigr)C\xi \cdot \nabla\xi\Bigr)\, ds = \int_\Omega \psi\bigl(t, |\nabla x|, |\nabla\xi|\bigr)\bigl|\nabla\xi\bigr|^2\, ds \geqslant c\,\|\xi\|_X^2.$$

Таким образом, условие $\mathbf{B}_4$ выполнено при $\beta_0 = c$. Для проверки условия $\mathbf{B}_5$, при $u = C\xi_1 = \nabla\xi_1$, $v = C\xi_2 = \nabla\xi_2$, $w = \nabla(\xi_1 - \xi_2) = u - v$ рассмотрим

$$\int_{\Omega_+} \Bigl(\psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr)u - \psi\bigl(t, |\nabla x|, |v|\bigr)v \pm \psi\bigl(t, |\nabla x|, |v|\bigr)u\Bigr) \cdot w\, ds \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\Omega_+} \Bigl(\psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr) - \psi\bigl(t, |\nabla x|, |v|\bigr)\Bigr)\, u \cdot w\, ds + \int_{\Omega_+} \psi\bigl(t, |\nabla x|, |v|\bigr)\, |w|^2\, ds.$$

Заметим, что на Ω_+ согласно неравенству Коши–Буняковского справедлива оценка:

$$u \cdot w = |u|^2 - u \cdot v \geqslant |u|^2 - |u|\,|v| \geqslant |u|^2 - |u|^2 = 0.$$

При этом по условию $\mathbf{\Psi}_3$, $\psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr) - \psi\bigl(t, |\nabla x|, |v|\bigr) \geqslant 0$. Стало быть,

$$\int_{\Omega_+} \Bigl(\psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr)u - \psi\bigl(t, |\nabla x|, |v|\bigr)v\Bigr) \cdot w\, ds \geqslant \int_{\Omega_+} \psi\bigl(t, |\nabla x|, |v|\bigr)\, \bigl|w\bigr|^2\, ds.$$

Аналогичную оценку получаем и для множества Ω_-. И по условию $\mathbf{\Psi}_2$ получаем:

$$\bigl[b(t, x, C\xi_1) - b(t, x, C\xi_2), \xi_1 - \xi_2\bigr] \geqslant \int_{\Omega_+} \psi\bigl(t, |\nabla x|, |v|\bigr)\, \bigl|w\bigr|^2\, ds + \int_{\Omega_-} \psi\bigl(t, |\nabla x|, |u|\bigr)\, \bigl|w\bigr|^2\, ds \geqslant$$
$$\geqslant c \int_\Omega |w|^2\, ds = c\,\|w\|_U^2 = c\,\|\xi_1 - \xi_2\|_X^2.$$

То есть условие $\mathbf{B}_5$ выполнено при $\beta_1 = c$. Итак, условия $\mathbf{B}_1$–$\mathbf{B}_7$ выполняются.

Рассмотрим управляемое нелинейное эволюционное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f\bigl(t, x(t), u(t)\bigr), \quad t \in [0; T]; \quad x(0) = x_0; \quad f(\cdot, x, u) = f_1(\cdot, x) + b(\cdot, x, u), \tag{1.1}$$

относительно $x \in \mathbf{C}^1(0, T; X)$; производная по времени понимается в сильном смысле. Исследуемая проблема управляемости (задача управления) состоит в том, чтобы посредством управления u перевести систему (1.1) из заданного начального состояния x_0 в заданное конечное состояние x_1 к моменту времени $T > 0$. Далее мы уточним эту постановку, несколько расширив пространство решений, что позволит нам рассматривать управления из класса W. Прежде всего, надо указать, как мы понимаем решение задачи (1.1).

В случае $u \in \mathbf{C}(0,T;U)$ задача (1.1) эквивалентна интегральному уравнению (с интегралом Бохнера), см., например, [29, теорема 10.3.5, с. 667] (при $A(t) = 0$, $U(t,\tau) = I$):

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f\big(s, x(s), u(s)\big)\, ds, \quad t \in [0;T]; \quad x \in E(T). \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) имеет смысл и для кусочно непрерывных управлений $u \in K\mathbf{C}(0,T;U)$; решения будут кусочно гладкими, то есть $x \in K\mathbf{C}^1(0,T;X)$. Уравнение (1.1) тоже имеет смысл, если понимать сильную производную в смысле почти всюду. Далее будем работать с уравнением (1.2). Исследуем разрешимость задачи управления:

Для заданного конечного состояния $x_1 \in X$ найти управление $u \in W$, которому отвечает хотя бы одно решение $x = x(t;u)$ уравнения (1.2) такое, что $x(T;u) = x_1$.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобка двойственности между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ (действие функционала из $\mathcal{X}^*$ на элемент из $\mathcal{X}$). Как известно [32, глава V, § 7, с. 236], гильбертово пространство X рефлексивно и в качестве скобки двойственности можно взять скалярное произведение $[\cdot,\cdot]_X$, если (в соответствии с теоремой Рисса) отождествить X и X^*. Следующее утверждение — теорема Минти–Браудера [33, теорема 2.1].

Лемма 1. *Пусть во всем рефлексивном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ задан хеминепрерывный монотонный оператор $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, удовлетворяющий условию коэрцитивности:*

$$\big\langle F(x), x\big\rangle \geqslant \gamma\big(\|x\|_{\mathcal{X}}\big)\|x\|_{\mathcal{X}}, \quad \text{где} \quad \gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty.$$

Тогда для каждого $y \in \mathcal{X}^*$ уравнение $F[x] = y$ имеет решение $x \in \mathcal{X}$.

Для $\tau \in [0;T]$, $x \in E(\tau)$ определим оператор $F = F_{\tau,x}\colon X \to X$ формулой:

$$F_{\tau,x}[\xi] = \int_0^\tau b\big(s, x(s), C(s)\xi\big)\, ds, \quad \xi \in X.$$

В силу условий $\mathbf{B}_4$–$\mathbf{B}_6$ оператор $F_{\tau,x}$ сильно монотонный, коэрцитивный и непрерывный. Поэтому по лемме 1 уравнение $F_{\tau,x}[\xi] = \eta$ имеет решение $\xi \in X$ $\forall\, \eta \in X$. А за счет сильной монотонности (для этого достаточно было бы строгой) решение единственно, то есть определен однозначный обратный оператор $F^{-1}_{\tau,x}\colon X \to X$. Пользуясь условием $\mathbf{B}_4$, можем оценить норму решения: $\big[\eta = F_{\tau,x}(\xi), \xi\big]_X \geqslant \beta_0\tau\|\xi\|^2$, откуда по неравенству Коши–Буняковского $\|\xi\|_X = \big\|F^{-1}_{\tau,x}[\eta]\big\|_X \leqslant \dfrac{1}{\beta_0\tau}\|\eta\|_X$.

Лемма 2. *Для любых $\tau \in [0;T]$, $x_i \in E(\tau)$, $\|x_i\| \leqslant M$, $i = 1,2$, $\eta \in X$ таких, что $M_0\big\|F^{-1}_{\tau,x_i}[\eta]\big\|_X \leqslant M$, $i = 1,2$, имеет место оценка:*

$$\big\|F^{-1}_{\tau,x_1}[\eta] - F^{-1}_{\tau,x_2}[\eta]\big\|_X \leqslant \frac{1}{\beta_1\tau}\int_0^\tau \mathcal{N}_2(s,M)\,\big\|x_1(s) - x_2(s)\big\|_X\, ds.$$

Доказательство. Положим $\xi_i = F^{-1}_{\tau,x_i}[\eta]$, откуда $\eta = F_{\tau,x_i}[\xi_i]$, $i = 1,2$,

$$0 = F_{\tau,x_1}[\xi_1] - F_{\tau,x_2}[\xi_2] =$$

$$= \int_0^\tau \Big[b\big(s, x_1(s), C(s)\xi_1\big) - b\big(s, x_2(s), C(s)\xi_2\big) \pm b\big(s, x_1(s), C(s)\xi_2\big)\Big]\, ds =$$

$$= \int_0^\tau \Big\{b\big(\cdot, x_1, C\xi_1\big) - b\big(\cdot, x_1, C\xi_2\big)\Big\}_1(s)\, ds + \int_0^\tau \Big\{b\big(\cdot, x_1, C\xi_2\big) - b\big(\cdot, x_2, C\xi_2\big)\Big\}_2(s)\, ds.$$

Отсюда по условию **B**$_5$, неравенству Коши–Буняковского и условию **B**$_2$ получаем:

$$\beta_1\tau \left\|\xi_1-\xi_2\right\|_X^2 \leqslant \int_0^\tau \big[\{\ldots\}_1, \xi_1-\xi_2\big]\,ds = \left|\int_0^\tau \big[\{\ldots\}_2, \xi_1-\xi_2\big]\,ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\tau \mathcal{N}_2(s,M)\left\|x_1(s)-x_2(s)\right\|_X ds\,\left\|\xi_1-\xi_2\right\|_X. \qquad \square$$

Лемма 3. *Для любых* $\tau\in[0;T]$, $x\in E(\tau)$, $\eta_i\in X$, $i=1,2$, *имеет место оценка:*

$$\left\|F^{-1}_{\tau,x}[\eta_1]-F^{-1}_{\tau,x}[\eta_2]\right\|_X \leqslant \frac{1}{\beta_1\tau}\left\|\eta_1-\eta_2\right\|_X.$$

Доказательство. Положим $\xi_i=F^{-1}_{\tau,x}[\eta_i]$, откуда $\eta_i=\displaystyle\int_0^\tau b\big(s,x(s),C(s)\xi_i\big)\,ds$, $i=1,2$. Согласно условию **B**$_5$, получаем:

$$[\eta_1-\eta_2,\xi_1-\xi_2]=\int_0^\tau\Big[b\big(s,x(s),C(s)\xi_1\big)-b\big(s,x(s),C(s)\xi_2\big),\xi_1-\xi_2\Big]\,ds \geqslant \beta_1\tau\left\|\xi_1-\xi_2\right\|_X^2.$$

Остается воспользоваться неравенством Коши–Буняковского. $\square$

§ 2. Цепочечная управляемость на $[0;T]$

Положим $\zeta_0=\max\big\{\|x_0\|_X,\|x_1\|_X\big\}$. Сделаем следующие предположения.

(**R**$_1$) При некотором $0<\kappa<\dfrac{K_2(\zeta_0)}{\beta_0}$ имеем: $\varepsilon\equiv\rho-\dfrac{K_2(\zeta_0+\kappa M_0)}{\beta_0}>0$.

(**R**$_2$) Имеем: $\|x_1-x_0\|_X\leqslant\varepsilon\beta_0T$.

Замечание 1. Константа β_0 задана условием **B**$_4$. Финальное время $T>0$ будем считать произвольно фиксированным. Выберем произвольно константы $c>0$, $\zeta_0=\|x_0\|+c$ и будем считать, что $\rho>\dfrac{K_2(\zeta_0)}{\beta_0}$, см. условие **F**$_4$. Фактически, это априорная оценка минимально необходимого ресурса управления. Рассмотрим функцию $\alpha(\tau)=\rho-\dfrac{K_2(\zeta_0+\tau)}{\beta_0}$. Она непрерывна в силу непрерывности функции $K_2(\cdot)$. При этом по построению, $\alpha(0)>0$. Тогда, согласно классической теореме об устойчивости знака непрерывной функции, функция $\alpha(\tau)$ сохраняет положительный знак и в некоторой окрестности нуля. Это означает, что найдется $\tau_0>0$ такое, что $\alpha(\tau)>0$ для всех $\tau\in[-\tau_0;\tau_0]$. Подберем число $\kappa>0$ настолько малым, чтобы $\kappa M_0\leqslant\tau_0$, $\kappa<\dfrac{K_2(\zeta_0)}{\beta_0}$. В итоге получим, что $\varepsilon\equiv\alpha(\kappa M_0)>0$. Выбирая наконец x_1 из условия: $\|x_1-x_0\|_X\leqslant\min\{c,\varepsilon\beta_0T\}$, получаем, что все параметры, участвующие в условиях **R**$_1$, **R**$_2$, существуют. При такой трактовке получается, что либо финальное состояние x_1 должно быть достаточно близко к начальному x_0, либо финальное время $T>0$ должно быть достаточно велико. Это предположение естественно, учитывая, что ресурс управления ρ (см. определение множества W) предполагается сколь угодно близким к априорно минимально необходимому. Если же ресурс управления ρ можно выбрать сколь угодно большим, то возможна следующая альтернативная трактовка. Будем считать, что параметры $x_0,x_1\in X$, $\zeta_0=\max\big\{\|x_0\|_X,\|x_1\|_X\big\}$, M_0, β_0 и $T>0$ заданы. Зафиксируем произвольно $0<\kappa<\dfrac{K_2(\zeta_0)}{\beta_0}$ и выберем $\rho>0$ настолько большим, чтобы для $\varepsilon\equiv\rho-\dfrac{K_2(\zeta_0+\kappa M_0)}{\beta_0}$ выполнялись оценки: $\varepsilon>0$, $\varepsilon\geqslant\dfrac{\|x_1-x_0\|_X}{\beta_0T}$. Тогда вновь получается, что условия **R**$_1$, **R**$_2$

выполняются. Это опять же естественно: если x_0 и x_1 сколь угодно далеки друг от друга, а финальное время как угодно мало, то ресурс управления для перевода системы из x_0 в x_1 должен быть достаточно велик. Интуитивно понятно, что иначе и быть не может.

Положим $\sigma = \zeta_0 + \kappa M_0$, $\sigma_\rho = \zeta_0 + \rho M_0 \geqslant \sigma$, и выберем число $\delta > 0$, исходя из условий:

$$\forall\, h \subset [0;T],\ \operatorname{mes} h \leqslant \delta\colon\ \int_h \bigl\{\mathcal{N}_1(s,\sigma) + \mathcal{N}_3(s,\sigma_\rho)\bigr\}\, ds \leqslant \kappa M_0, \quad \frac{T}{\delta} = k \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

$$\int_h \mathcal{N}(s,\sigma)\, ds \leqslant \frac{1}{6}, \quad \frac{K_1(\sigma) + K_3(\sigma_\rho)}{\beta_1} \int_h M_0 \mathcal{N}_4(s,\sigma_\rho)\, ds \leqslant \frac{1}{3}, \quad \int_h \mathcal{N}_2(s,\sigma_\rho)\, ds \leqslant \frac{1}{3}. \tag{2.2}$$

Выберем разбиение отрезка: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $t_i = i\delta$, $i = \overline{0,k}$, а также числа $\lambda_i = \dfrac{i}{k}$, $i = \overline{0,k}$. Для $\lambda \in [0;1]$ обозначим: $x_\lambda = x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$. По условию **R**$_2$

$$\|x_{\lambda_i} - x_{\lambda_{i-1}}\|_X = (\lambda_i - \lambda_{i-1})\|x_1 - x_0\|_X = \frac{1}{k}\, \|x_1 - x_0\|_X \leqslant \gamma \equiv \varepsilon\beta_0\delta.$$

Рассмотрим t_1-локальную задачу управления: найти управление $u_1 \in \mathbf{C}(0,t_1;U)$ вида $u_1 = C(t)\xi$, $\xi \in X$, $\|\xi\|_X \leqslant \rho$, такое, что существует соответствующее решение $x = x(t;u_1)$ уравнения (1.2) на $[0;t_1]$, удовлетворяющее условию $x(t_1;u_1) = x_{\lambda_1}$. Иначе говоря, требуется найти $\xi \in X$, $x \in E(t_1 = \delta)$, для которых выполняются соотношения:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f_1\bigl(s,x(s)\bigr)\, ds + \int_0^t b\bigl(s,x(s),C(s)\xi\bigr)\, ds, \quad t \in [0;t_1 = \delta]; \quad x(\delta) = x_{\lambda_1}.$$

Здесь функция $x(t)$ и параметр $\xi \in X$ взаимно зависят друг от друга. При этом соотношение $x(\delta) = x_{\lambda_1}$ согласно определению оператора $F_{\delta,x}[\xi]$ и его обратимости (уже установленной ранее) означает, что зависимость параметра ξ от x следующая:

$$\xi = F_{\delta,x}^{-1}\left[x_{\lambda_1} - x_0 - \int_0^\delta f_1\bigl(s,x(s)\bigr)\, ds\right] \equiv \omega_\delta[x].$$

Определенная таким образом функция (оператор) $\omega_\delta[x]$ будет играть существенную роль в наших дальнейших построениях, поскольку позволяет задачу поиска функции $x(t)$ и параметра $\xi \in X$ заменить задачей поиска функции $x(t)$ (а параметр ξ будет определяться по ней указанным выше образом). Определим оператор

$$\mathcal{F}_\delta[x](t) = x_0 + \int_0^t f_1\bigl(s,x(s)\bigr)\, ds + \int_0^t b\bigl(s,x(s),C(s)\omega_\delta[x]\bigr)\, ds, \quad t \in [0;t_1 = \delta], \quad x \in E(\delta).$$

Таким образом, требуется найти $x \in E(\delta)$ как решение операторного уравнения:

$$x = \mathcal{F}_\delta[x], \quad x \in E(\delta), \tag{2.3}$$

удовлетворяющее условию: $\bigl\|\omega_\delta[x]\bigr\|_X \leqslant \rho$. Положим $\Omega(\delta) = \bigl\{x \in E(\delta)\colon \|x\| \leqslant \sigma\bigr\}$.

Лемма 4. *Для любого* $x \in \Omega(\delta)$ *имеем:* $\bigl\|\omega_\delta[x]\bigr\|_X \leqslant \rho$.

Доказательство. По доказанному ранее и условиям **F**$_3$, **F**$_4$, **R**$_2$, получаем:

$$\bigl\|\omega_\delta[x]\bigr\|_X \leqslant \frac{1}{\beta_0\delta}\left[\frac{1}{k}\, \|x_1 - x_0\|_X + \int_0^\delta \mathcal{N}_1(s,\sigma)\, ds\right] \leqslant \varepsilon + \frac{K_2(\sigma)}{\beta_0} = \rho. \qquad \square$$

Лемма 5. $\mathcal{F}_\delta\colon \Omega(\delta) \to \Omega(\delta)$.

Доказательство. Выберем произвольно $x \in \Omega(\delta)$. В силу условий $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{B}_1$ ясно, что $\mathcal{F}_\delta[x] \in E(\delta) = \mathbf{C}(0, \delta; X)$. Пользуясь леммой 4 (откуда $\big\|C(t)\omega_\delta[x]\big\|_X \leqslant M_0\rho$), а также условиями $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{B}_3$, (2.1), для $t \in [0; \delta]$ оценим

$$\big\|\mathcal{F}_\delta[x](t)\big\|_X \leqslant \zeta_0 + \int_0^\delta \mathcal{N}_1(s, \sigma)\, ds + \int_0^\delta \mathcal{N}_3(s, \sigma_\rho)\, ds \leqslant \zeta_0 + \kappa M_0 = \sigma. \qquad \square$$

Лемма 6. *Оператор $\mathcal{F}_\delta$ является сжимающим на $\Omega(\delta)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольно $x, y \in \Omega(\delta)$. Положим

$$\eta_1 = x_{\lambda_1} - x_0 - \int_0^\delta f_1\big(s, x(s)\big)\, ds, \quad \eta_2 = x_{\lambda_1} - x_0 - \int_0^\delta f_1\big(s, y(s)\big)\, ds.$$

Согласно лемме 4 имеет место оценка

$$\big\|\omega_\delta[x]\big\|_X \leqslant \rho \quad \Rightarrow \quad M_0\big\|F_{\delta,x}^{-1}[\eta_1]\big\|_X = M_0\big\|\omega_\delta[x]\big\|_X \leqslant M_0\rho \leqslant \zeta_0 + M_0\rho = \sigma_\rho.$$

Совершенно аналогично лемме 4 доказывается, что $M_0\big\|F_{\delta,y}^{-1}[\eta_1]\big\|_X \leqslant \sigma_\rho$.

Непосредственно из леммы 2 отсюда вытекает, что

$$r_1 \equiv \big\|(F_{\delta,x}^{-1} - F_{\delta,y}^{-1})[\eta_1]\big\|_X \leqslant \frac{1}{\beta_1\delta}\int_0^\delta \mathcal{N}_2(s, \sigma_\rho)\, \big\|x(s) - y(s)\big\|_X\, ds.$$

При этом очевидно, что $\big\|x(s) - y(s)\big\|_X \leqslant \|x - y\|_{E(\delta)}$ для всех $s \in [0; \delta]$.

И непосредственно по лемме 3

$$\big\|F_{\delta,y}^{-1}[\eta_1] - F_{\delta,y}^{-1}[\eta_2]\big\|_X \leqslant \frac{1}{\beta_1\delta}\|\eta_1 - \eta_2\|_X,$$

где

$$\|\eta_1 - \eta_2\|_X = \bigg\|\int_0^\delta \Big\{f_1\big(s, x(s)\big) - f_1\big(s, y(s)\big)\Big\}\, ds\bigg\|_X \leqslant \int_0^\delta \Big\|f_1\big(s, x(s)\big) - f_1\big(s, y(s)\big)\Big\|_X\, ds.$$

И пользуясь условием $\mathbf{F}_2$, получаем:

$$r_2 \equiv \big\|F_{\delta,y}^{-1}[\eta_1] - F_{\delta,y}^{-1}[\eta_2]\big\|_X \leqslant \frac{1}{\beta_1\delta}\int_0^\delta \mathcal{N}(s, \sigma)\, ds\|x - y\|_{E(\delta)}.$$

Собирая полученные оценки для r_1, r_2 и пользуясь условиями $\mathbf{B}_7$, $\mathbf{F}_4$, имеем:

$$r_1 \leqslant \frac{K_3(\sigma_\rho)}{\beta_1}\,\|x - y\|_{E(\delta)}, \quad r_2 \leqslant \frac{K_1(\sigma)}{\beta_1}\,\|x - y\|_{E(\delta)}.$$

Используя стандартный прием «добавим и вычтем», рассмотрим

$$\omega_\delta[x] - \omega_\delta[y] = F_{\delta,x}^{-1}[\eta_1] - F_{\delta,y}^{-1}[\eta_2] \pm F_{\delta,y}^{-1}[\eta_1] = (F_{\delta,x}^{-1} - F_{\delta,y}^{-1})[\eta_1] + F_{\delta,y}^{-1}[\eta_1] - F_{\delta,y}^{-1}[\eta_2].$$

Таким образом,

$$\big\|\omega_\delta[x] - \omega_\delta[y]\big\|_X \leqslant r_1 + r_2 \leqslant \frac{K_1(\sigma) + K_3(\sigma_\rho)}{\beta_1}\,\|x - y\|_{E(\delta)}.$$

Обозначим $\mathcal{F}^1_\delta[x](t) = x_0 + \int_0^t f_1\big(s, x(s)\big)\, ds$, $\mathcal{F}^2_\delta[x](t) = \int_0^t b\big(s, x(s), C(s)\omega_\delta[x]\big)\, ds$.

В соответствии с условиями $\mathbf{F}_2$, (2.2) имеем:

$$\big\|\mathcal{F}^1_\delta[x](t) - \mathcal{F}^1_\delta[y](t)\big\|_X \leqslant \int_0^t \Big\| f_1\big(s, x(s)\big) - f_1\big(s, y(s)\big)\Big\|_X\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\delta \mathcal{N}(s, \sigma)\, ds\, \|x - y\|_{E(\delta)} \leqslant \frac{1}{6}\, \|x - y\|_{E(\delta)}.$$

Аналогичным образом, в соответствии с условиями $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_6$ и леммой 4, имеем:

$$\big\|\mathcal{F}^2_\delta[x](t) - \mathcal{F}^2_\delta[y](t)\big\|_X \leqslant \int_0^t \Big\| b\big(s, x(s), C(s)\omega_\delta[x]\big) - b\big(s, x(s), C(s)\omega_\delta[y]\big)\Big\|_X\, ds +$$
$$+ \int_0^t \Big\| b\big(s, x(s), C(s)\omega_\delta[y]\big) - b\big(s, y(s), C(s)\omega_\delta[y]\big)\Big\|_X\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\delta M_0 \mathcal{N}_4(s, \sigma_\rho)\, ds\, \big\|\omega_\delta[x] - \omega_\delta[y]\big\|_X + \int_0^\delta \mathcal{N}_2(s, \sigma_\rho)\, ds\, \|x - y\|_{E(\delta)}.$$

Теперь, пользуясь условием (2.2), получаем: $\big\|\mathcal{F}^2_\delta[x](t) - \mathcal{F}^2_\delta[y](t)\big\|_X \leqslant \frac{2}{3}\, \|x - y\|_{E(\delta)}$.

Таким образом, $\big\|\mathcal{F}_\delta[x] - \mathcal{F}_\delta[y]\big\|_{E(\delta)} \leqslant \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) \|x - y\|_{E(\delta)} = \frac{5}{6}\, \|x - y\|_{E(\delta)}$. □

Непосредственно из лемм 4–6 и в соответствии с принципом сжимающих отображений Каччопполи–Банаха [32, глава XVI, § 1, теорема 1] получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнение* (2.3) *имеет решение* $x \in E(\delta) = \mathbf{C}(0, \delta; X)$, *удовлетворяющее оценкам:* $\|x\|_{E(\delta)} \leqslant \sigma$, $\big\|\omega_\delta[x]\big\|_X \leqslant \rho$. *Иначе говоря,* t_1*-локальная задача управления имеет решение вида* $u_1(t) = C(t)\xi$, $\xi = \omega_\delta[x] \in X$.

Предполагая, что уже найдено управление $u = \widetilde{u} \in K\mathbf{C}(0, t_{i-1}; U)$ такое, что

$$x(t_j; \widetilde{u}) = x_{\lambda_j}, \quad \widetilde{u}(t) = C(t)\xi_j, \quad \xi_j \in X, \quad \|\xi_j\|_X \leqslant \rho, \quad t \in [t_{j-1}; t_j], \quad j = \overline{1, i-1},$$

рассмотрим t_i-локальную задачу управления: найти управление $\widehat{u} \in \mathbf{C}(t_{i-1}, t_i; U)$ такое, что $\widehat{u}(t) = C(t)\xi_i$, $\xi_i \in X$, $\|\xi_i\|_X \leqslant \rho$, $x(t_i; u) = x_{\lambda_i}$ при

$$u(t) = \begin{cases} \widetilde{u}(t), & t \in [0; t_{i-1}), \\ \widehat{u}(t), & t \in [t_{i-1}; t_i]. \end{cases}$$

В соответствии с уравнением (1.2) решение $x(t)$, отвечающее управлению $u(t)$, на $[0; t_{i-1}]$ совпадает с решением, отвечающим управлению $\widetilde{u}(t)$, а на $[t_{i-1}; t_i]$ представляется в виде

$$x(t) = x_0 + \int_0^{t_{i-1}} f\big(s, x(s; \widetilde{u}), \widetilde{u}(s)\big)\, ds + \int_{t_{i-1}}^t f\big(s, x(s), \widehat{u}(s)\big)\, ds =$$
$$= x(t_{i-1}; \widetilde{u}) + \int_{t_{i-1}}^t f\big(s, x(s), \widehat{u}(s)\big)\, ds = x_{\lambda_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^t f\big(s, x(s), \widehat{u}(s)\big)\, ds,$$

то есть может рассматриваться как решение уравнения:

$$x(t) = x_{\lambda_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^t f\big(s, x(s), \widehat{u}(s)\big)\, ds, \quad t \in [t_{i-1}; t_i], \quad x \in \mathbf{C}(t_{i-1}, t_i; X). \tag{2.4}$$

Если сделать замены $\tau = t - t_{i-1}$, $r = s - t_{i-1}$, $\widehat{x}(\tau) = x(t_{i-1} + \tau)$, $\widehat{w}(\tau) = \widehat{u}(t_{i-1} + \tau)$, уравнение (2.4) можно переписать в виде:

$$\widehat{x}(\tau) = x_{\lambda_{i-1}} + \int_0^\tau f\big(t_{i-1} + r, \widehat{x}(r), \widehat{w}(r)\big)\, dr, \quad \tau \in [0; \delta], \quad \widehat{x} \in E(\delta). \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) имеет вид уравнения (1.2) на $[0; \delta]$, с тем лишь отличием, что вместо x_0 выступает $x_{\lambda_{i-1}}$, а вместо функции f — ее сдвиг по первому аргументу на t_{i-1}. Поэтому для t_i-локальной задачи управления ситуация t_1-локальной задачи управления полностью воспроизводится, и стало быть, к ней (после указанных замен) применима теорема 1. Повторяя описанный процесс по индукции, заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* **F**$_1$–**F**$_4$, **B**$_1$–**B**$_7$, **R**$_1$, **R**$_2$. *Тогда найдутся число* $\delta > 0$, *определяемое по правилам* (2.1), (2.2) *и соответственно, числа* $k = \dfrac{T}{\delta} \in \mathbb{N}$, $t_i = i\delta$, $\lambda_i = \dfrac{i}{k}$, $i = \overline{0, k}$, *такие, что существует управление* $u \in W$ *вида*

$$u(t) = \big\{C(t)\xi_i,\ \xi_i \in X,\ t \in (t_{i-1}; t_i],\ i = \overline{1, k}\big\},$$

удовлетворяющее условиям: $x(t_i; u) = x_{\lambda_i}$, $i = \overline{1, k}$, $x(T; u) = x_1$, $\|\xi_i\|_X \leqslant \rho$, $i = \overline{1, k}$. *Это означает, что глобальная задача управления имеет решение* $u(t)$.

Замечание 2. Анализ проведенных рассуждений показывает, что условия **B**$_4$, **B**$_5$ можно ослабить следующим образом.

(**B**$'_1$) Существует невозрастающая функция $\beta_0 \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что для любых чисел $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant T$ имеем:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big[b\big(s, x(s), C(s)\xi\big), \xi\Big]\, ds \geqslant \beta_0(M)(\tau_2 - \tau_1)\|\xi\|^2 \quad \forall\, \xi \in X,\ x \in E(T),\ \|x\|_{E(T)} \leqslant M.$$

(**B**$'_2$) Существует невозрастающая функция $\beta_1 \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что для любых чисел $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant T$ и любых $x \in E(T)$, $\|x\|_{E(T)} \leqslant M$, $\xi_1, \xi_2 \in X$ имеем:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big[b\big(s, x(s), C(s)\xi_1\big) - b\big(s, x(s), C(s)\xi_2\big), \xi_1 - \xi_2\Big]\, ds \geqslant \beta_1(M)(\tau_2 - \tau_1)\|\xi_1 - \xi_2\|^2.$$

Отличие состоит в том, что условие **R**$_1$ надо заменить следующим.

(**R**$'_1$) Пусть существует число $\varkappa > 0$, удовлетворяющее неравенству:

$$\varkappa < \frac{K_2(\zeta_0)}{\beta_0(\zeta_0 + \varkappa M_0)}, \tag{2.6}$$

и для соответствующего числа $\sigma = \zeta_0 + \varkappa M_0$ имеем: $\varepsilon \equiv \rho - \dfrac{K_2(\sigma)}{\beta_0(\sigma)} > 0$.

После того, как число σ выбрано, полагаем $\beta_0 = \beta_0(\sigma)$, $\beta_1 = \beta_1(\sigma)$ и дословно воспроизводим все последующие рассуждения.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* **F**$_1$–**F**$_4$, **B**$_1$–**B**$_3$, **B**$'_1$, **B**$'_2$, **B**$_6$, **B**$_7$, **R**$'_1$, **R**$_2$. *Тогда справедливо утверждение теоремы* 2.

Замечание 3. Согласно теореме об устойчивости знака непрерывной функции, для разрешимости неравенства (2.6) достаточно, чтобы функция $\beta_0(\cdot)$ была непрерывной и выполнялась оценка $\dfrac{K_2(\zeta_0)}{\beta_0(\zeta_0)} > 0$. Тогда непрерывная функция $\psi(\varkappa) = \dfrac{K_2(\zeta_0)}{\beta_0(\zeta_0 + \varkappa M_0)} - \varkappa$ сохранит положительный знак и в некоторой окрестности точки $\varkappa = 0$.

§ 3. Пример: сильно нелинейное псевдопараболическое уравнение

К уравнению (1.1), и соответственно (1.2), могут быть сведены многие эволюционные системы, связанные с сильно нелинейными дифференциальными уравнениями псевдопараболического типа. Следуя [34], рассмотрим, в частности, начально-краевую задачу, связанную с (сначала неуправляемым) уравнением вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta\varphi - |\varphi|^{q_1}\varphi\big) + \Delta\varphi + |\varphi|^{q_2}\varphi = 0, \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.1}$$

где $q_i > 0$, $i = 1, 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0;1]$, $n \geqslant 1$. Для получения необходимых оценок в [34] предполагается дополнительно, что $q_i < \dfrac{4}{n-2}$ при $n \geqslant 3$, $q_1 \geqslant 1$.

Подчеркнем, что неуправляемая задача (3.1) используется здесь как вспомогательная, поскольку для нее требуются соответствующие результаты, в частности, некоторые оценки, полученные в [34]. Основным объектом исследования будет управляемый аналог задачи (3.1), а именно уравнение (3.5), см. далее. Но для того, чтобы обосновать выполнение абстрактных условий управляемости, приходится устанавливать некоторые свойства операторов, порождаемых задачей (3.1) — см. леммы 7–14 далее. Как показано в [34], задача (3.1) возникает при исследовании квазистационарных процессов в проводящих средах без дисперсии (в частности, в полупроводниках). Уравнение (3.1) — это частный случай уравнения [35]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta\varphi - |\varphi|^{q_1}\varphi\big) + \Delta\varphi + g(t,\varphi) = 0, \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь φ — это потенциал электрического поля, а $g(t,\varphi)$ характеризует источники или стоки тока свободных электронов из примесных центров или в примесные центры кристаллической решетки полупроводников, в зависимости от того, являются ли они донорами или акцепторами. Конкретный вид функции $g(t,\varphi)$ зависит от параметров кристаллической решетки. В (3.1) используется простое модельное распределение $g(t,\varphi) = \lambda|\varphi|^q\varphi$, $q \geqslant 0$, где $\lambda < 0$ для донорных и $\lambda > 0$ для акцепторных примесных центров соответственно; $\lambda = 0$ при отсутствии примесных центров.

Обозначим $X = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Для сведéния уравнения (3.1) к операторному дифференциальному уравнению в X будем действовать аналогично [34], только вместо скобок двойственности между $X = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и его сопряженным пространством $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ мы, в соответствии с нашей абстрактной схемой, будем использовать в X скалярное произведение $[\varphi,\psi] = (\nabla\varphi,\nabla\psi)_{L_2^n} = \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi(s)\cdot\nabla\psi(s)\,ds$, $\varphi,\psi \in X$, корректное в силу неравенства Пуанкаре–Фридрихса, и отождествлять X с X^* в соответствии с теоремой Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

Пусть $\varphi(x,t)$ — классическое (то есть достаточной гладкости) решение уравнения (3.1). Непосредственной проверкой устанавливается, что справедливо равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(|\varphi|^{q_1}\varphi\big) = (q_1+1)|\varphi|^{q_1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Домножим тождество (3.1) на произвольную $\omega \in X$ и проинтегрируем по Ω:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi\,\omega\,ds - (q_1+1)\int_\Omega |\varphi|^{q_1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\omega\,ds + \int_\Omega \Delta\varphi\,\omega\,ds + \int_\Omega |\varphi|^{q_2}\varphi\,\omega\,ds = 0.$$

Используя интегрирование по частям и домножая на (-1), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\omega]+(q_1+1)a_{q_1}[\varphi]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\omega\right)+[\varphi,\omega]-a_{q_2}[\varphi](\varphi,\omega)=0,\quad a_{q_i}[\varphi](\chi,\omega)=\int_\Omega|\varphi|^{q_i}\chi\,\omega\,ds.$$

Зафиксируем произвольно число $\sigma\in(0;1)$ и рассмотрим билинейную форму

$$a_{\sigma,1}[\varphi](\chi,\omega)=(q_1+1)a_{q_1}[\varphi](\chi,\omega)+\sigma\,[\chi,\omega].$$

При выполнении неравенства (мы используем обозначения [34]) $p_3=q_1+2<\dfrac{2n}{n-2}$, согласно теореме вложения С. Л. Соболева, справедливо непрерывное (и компактное) вложение $X\subset L_{p_3}(\Omega)$. Соответственно,

$$|\varphi(\cdot,t)|^{q_1}\chi\omega\in L_1(\Omega),\ \chi\omega\in L_{\widetilde{p}_3}(\Omega),\ |\varphi(\cdot,t)|^{q_1}\in L_{\widetilde{p}_3'}(\Omega),\quad \widetilde{p}_3=\frac{p_3}{2},\ \widetilde{p}_3'=\frac{p_3}{p_3-2}=\frac{q_1+2}{q_1},$$

и согласно неравенству Гёльдера,

$$\big|a_{q_1}[\varphi](\chi,\omega)\big|\leqslant\|\varphi\|^{q_1}_{L_{p_3}}\|\chi\omega\|_{L_{\widetilde{p}_3}}\leqslant\|\varphi\|^{q_1}_{L_{p_3}}\|\chi\|_{L_{p_3}}\|\omega\|_{L_{p_3}}.$$

С учетом непрерывного вложения пространств $X\subset L_{p_3}(\Omega)$ отсюда ясно, что билинейная форма $a_{\sigma,1}[\varphi](\chi,\omega)$ ограничена и, очевидно, коэрцитивна с константой σ. Поэтому согласно теореме Лакса–Мильграма [36, глава III, 7, с. 134] существует ЛОО $R_{\sigma,1}(\varphi)$, обратимый на всем пространстве X и такой, что

$$a_{\sigma,1}[\varphi](\chi,\omega)=\big[R_{\sigma,1}(\varphi)\chi,\omega\big],\qquad \big\|R_{\sigma,1}(\varphi)\big\|\leqslant(q_1+1)\kappa^{p_3}\|\varphi\|^{q_1}_X+\sigma,\qquad \big\|R_{\sigma,1}(\varphi)^{-1}\big\|\leqslant\sigma^{-1},$$

где κ — константа непрерывного вложения $X\subset L_{p_3}(\Omega)$.

Аналогичные рассуждения можем провести и для билинейной формы

$$a_{\sigma,2}[\varphi](\chi,\omega)=a_{q_2}[\varphi](\chi,\omega)+\sigma\,[\chi,\omega].$$

В результате получаем, что классическое решение удовлетворяет тождеству:

$$\left[J(\varphi)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]+(\sigma+1)\varphi-R_{\sigma,2}(\varphi)\varphi,\omega\right]_X=0\quad\forall\omega\in X,\tag{3.2}$$

где

$$J(\varphi)\chi=(1-\sigma)\chi+R_{\sigma,1}(\varphi)\chi,\qquad\big\|J(\varphi)\big\|\leqslant1+(q_1+1)\kappa^{p_3}\|\varphi\|^{q_1}_X.$$

Стало быть, сильное обобщенное решение исходного уравнения (3.1) можно понимать как функцию $\varphi\in\mathbf{C}^1(0,T;X)$, удовлетворяющую тождеству (3.2).

Очевидно, что $\big[R_{\sigma,1}(\varphi)\chi,\chi\big]=a_{\sigma,1}[\varphi](\chi,\chi)\geqslant\sigma\|\chi\|^2_X$. Поэтому $\big[J(\varphi)\chi,\chi\big]\geqslant\|\chi\|^2_X$, то есть ЛОО $J(\varphi)\colon X\to X^*=X$ сильно монотонный. Отсюда [31, глава III, § 2, следствие 2.3, с. 97] вытекает, что существует обратный ЛОО $J(\varphi)^{-1}$, который является сильно монотонным. В частности, для всех $\xi,\varphi\in X$, $\|\varphi\|_X\leqslant M$, имеем:

$$\big[J(\varphi)^{-1}\xi,\xi\big]\geqslant\frac{1}{\big\|J(\varphi)\big\|^2}\|\xi\|^2\geqslant\beta_0(M)\,\|\xi\|^2,\quad\beta_0(M)=\big(1+(q_1+1)\kappa^{p_3}M^{q_1}\big)^{-2}.\tag{3.3}$$

Поэтому тождество (3.2) равносильно уравнению в пространстве X:

$$\frac{d\varphi}{dt}=G\big[\varphi(t)\big],\quad t\in[0;T];\quad\varphi(0)=\varphi_0\in X;\quad G(\varphi)=J(\varphi)^{-1}\big[R_{\sigma,2}(\varphi)\varphi-(\sigma+1)\varphi\big].\tag{3.4}$$

Если обозначить $f_1(t,\varphi)=G(\varphi)$, то нам нужно убедиться, что выполнены условия $\mathbf{F}_1$–$\mathbf{F}_4$. Так как явной зависимости от t нет, для выполнения $\mathbf{F}_1$ достаточно $\mathbf{F}_2$.

Лемма 7. *Для любого* $\varphi \in X$ *имеем:* $\bigl\|J(\varphi)^{-1}\bigr\| \leqslant 1$.

Доказательство. Для $\xi \in X$ положим $\eta = J(\varphi)^{-1}[\xi]$. Тогда по доказанному и по неравенству Коши–Буняковского

$$\|\eta\|_X^2 \leqslant \bigl[J(\varphi)\eta, \eta\bigr] = [\xi, \eta] \leqslant \|\xi\|_X \|\eta\|_X \quad \Rightarrow \quad \|\eta\|_X \leqslant \|\xi\|_X. \qquad \square$$

Лемма 8. *Для любых* $\varphi, \psi \in L_{p_3}(\Omega)$ *имеем:* $\|\varphi^{q_1-1}\psi\|_{L_{\widetilde{p}_3'}} \leqslant \|\varphi\|_{L_{p_3}}^{q_1-1}\|\psi\|_{L_{p_3}}$.

Доказательство. Применим неравенство Гёльдера при $q_1' = \dfrac{q_1}{q_1-1}$:

$$\|\varphi^{q_1-1}\psi\|_{L_{\widetilde{p}_3'}} \leqslant \left(\int_\Omega \bigl(\varphi^{(q_1-1)\widetilde{p}_3'}\bigr)^{q_1'} ds\right)^{1/(\widetilde{p}_3' q_1')} \left(\int_\Omega \bigl(\psi^{\widetilde{p}_3'}\bigr)^{q_1} ds\right)^{1/(q_1\widetilde{p}_3')} = \|\varphi\|_{L_{p_3}}^{q_1-1}\|\psi\|_{L_{p_3}}. \qquad \square$$

Лемма 9. *Для любых* $\varphi_1, \varphi_2 \in L_{p_3}(\Omega)$ *имеем:*

$$\bigl\||\varphi_1|^{q_1} - |\varphi_2|^{q_1}\bigr\|_{L_{\widetilde{p}_3'}} \leqslant q_1\|\psi\|_{L_{p_3}}^{q_1-1}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_{p_3}}, \quad \psi = \max\bigl\{|\varphi_1|, |\varphi_2|\bigr\}.$$

Доказательство. Для всякого $t \in [0; 1)$ по формуле Лагранжа имеем:

$$1 - t^{q_1} = q_1(\theta)^{q_1-1}(1-t) \leqslant q_1(1-t), \quad \theta \in (t; 1).$$

Предположим, для определенности, что $|\varphi_1| \geqslant |\varphi_2|$. Тогда

$$|\varphi_1|^{q_1} - |\varphi_2|^{q_1} = |\varphi_1|^{q_1}\left(1 - \frac{|\varphi_2|^{q_1}}{|\varphi_1|^{q_1}}\right) \leqslant q_1|\varphi_1|^{q_1}\left(1 - \frac{|\varphi_2|}{|\varphi_1|}\right).$$

С учетом леммы 8, дальнейшее очевидно. □

Лемма 10. *Для любых* $\varphi_1, \varphi_2, \eta \in X$, $\|\varphi_i\|_X \leqslant M$, *имеем:*

$$\Bigl\|\bigl(R_{\sigma,1}(\varphi_1) - R_{\sigma,1}(\varphi_2)\bigr)[\eta]\Bigr\|_X \leqslant C_1 M^{q_1-1}\,\|\eta\|_X\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|_X, \quad C_1 = 2^{(q_1-1)/p_3}(q_1+1)q_1\kappa^{p_3}.$$

Доказательство. Для произвольного $\omega \in X$ имеем:

$$\Bigl[\bigl(R_{\sigma,1}(\varphi_1) - R_{\sigma,1}(\varphi_2)\bigr)[\eta], \omega\Bigr] = a_{\sigma,1}[\varphi_1](\eta,\omega) - a_{\sigma,1}[\varphi_2](\eta,\omega) =$$
$$= (q_1+1)\int_\Omega \bigl\{|\varphi_1|^{q_1} - |\varphi_2|^{q_1}\bigr\}\eta\omega\, ds,$$
$$\int_\Omega \bigl||\varphi_1|^{q_1} - |\varphi_2|^{q_1}\bigr|\,|\eta\omega|\, ds \leqslant \bigl\||\varphi_1|^{q_1} - |\varphi_2|^{q_1}\bigr\|_{L_{\widetilde{p}_3'}}\kappa^2\|\eta\|_X\|\omega\|_X.$$

Остается принять $\omega = \bigl(R_{\sigma,1}(\varphi_1) - R_{\sigma,1}(\varphi_2)\bigr)[\eta]$ и воспользоваться леммой 9. Множитель $2^{(q_1-1)/p_3}$ появляется из-за того, что $\psi = \max\bigl\{|\varphi_1|, |\varphi_2|\bigr\} \notin X$. Поэтому приходится разделять множество Ω на два подмножества Ω_+ — там, где $|\varphi_1| \geqslant |\varphi_2|$, и Ω_- — там, где $|\varphi_1| < |\varphi_2|$. Соответственно,

$$\int_\Omega |\psi|^{p_3}\, ds = \int_{\Omega_+} |\varphi_1|^{p_3}\, ds + \int_{\Omega_-} |\varphi_2|^{p_3}\, ds \leqslant 2\int_\Omega |\widetilde{\varphi}|^{p_3}\, ds,$$

где $\widetilde{\varphi}$ — та из функций φ_1, φ_2, для которой максимальна норма в $L_{p_3}(\Omega)$. □

Лемма 11. *Для любых* $\varphi_1, \varphi_2, \xi \in X$, $\|\varphi_i\|_X \leqslant M$, $\eta_i = J(\varphi_i)^{-1}[\xi]$ *имеем:*

$$\|\eta_1 - \eta_2\|_X \leqslant C_1 M^{q_1-1} \|\xi\|_X \, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$0 = J(\varphi_1)[\eta_1] - J(\varphi_2)[\eta_2] = (1-\sigma)[\eta_1 - \eta_2] + R_{\sigma,1}(\varphi_1)[\eta_1] - R_{\sigma,1}(\varphi_2)[\eta_2] \pm R_{\sigma,1}(\varphi_1)[\eta_2] = \\ = J(\varphi_1)[\eta_1 - \eta_2] + \big(R_{\sigma,1}(\varphi_1) - R_{\sigma,1}(\varphi_2)\big)[\eta_2],$$

откуда

$$\|\eta_1 - \eta_2\|_X \leqslant \big\|J(\varphi_1)^{-1}\big\| \, \Big\|\big(R_{\sigma,1}(\varphi_1) - R_{\sigma,1}(\varphi_2)\big)[\eta_2]\Big\|_X.$$

Остается воспользоваться леммой 10 и заметить, что по лемме 7

$$\big\|J(\varphi_1)^{-1}\big\| \leqslant 1, \quad \|\eta_2\|_X \leqslant \big\|J(\varphi_2)^{-1}\big\| \, \|\xi\|_X \leqslant \|\xi\|_X. \qquad \square$$

Совершенно аналогично лемме 10 доказывается следующая лемма.

Лемма 12. *Для любых* $\varphi_1, \varphi_2, \eta \in X$, $\|\varphi_i\|_X \leqslant M$, *имеем:*

$$\Big\|\big(R_{\sigma,2}(\varphi_1) - R_{\sigma,2}(\varphi_2)\big)[\eta]\Big\|_X \leqslant C_2 M^{q_1-1} \, \|\eta\|_X \, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X, \quad C_2 = 2^{(q_1-1)/p_3} q_1 \kappa^{p_3}.$$

Положим $F_\sigma(\varphi) = R_{\sigma,2}(\varphi)\varphi - (\sigma+1)\varphi$.

Лемма 13. *Для любых* $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, $\|\varphi_i\|_X \leqslant M$, *имеем:*

$$\big\|F_\sigma(\varphi_1) - F_\sigma(\varphi_2)\big\|_X \leqslant \mu_1(M) \, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X, \quad \mu_1(M) = (\kappa^{p_3} + C_2) M^{q_1} + 2\sigma + 1.$$

Доказательство. Заметим, что

$$F_\sigma(\varphi_1) - F_\sigma(\varphi_2) = R_{\sigma,2}(\varphi_1)[\varphi_1 - \varphi_2] + \big(R_{\sigma,2}(\varphi_1) - R_{\sigma,2}(\varphi_2)\big)[\varphi_2] - (\sigma+1)(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Аналогично $R_{\sigma,1}$ получаем оценку: $\big\|R_{\sigma,2}(\varphi_1)\big\| \leqslant \kappa^{p_3} M^{q_1} + \sigma$.

После этого остается воспользоваться леммой 12. $\square$

Лемма 14. *Для любых* $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, $\|\varphi_i\|_X \leqslant M$, *имеем:*

$$\big\|G(\varphi_1) - G(\varphi_2)\big\|_X \leqslant \mu_2(M) \, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X, \quad \mu_2(M) = \mu_1(M) + C_1 M^{q_1} \left(\kappa^{p_3} M^{q_1} + 2\sigma + 1\right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$G(\varphi_1) - G(\varphi_2) = J(\varphi_1)^{-1}\big[F_\sigma(\varphi_1) - F_\sigma(\varphi_2)\big] + \big(J(\varphi_1)^{-1} - J(\varphi_2)^{-1}\big) F_\sigma(\varphi_2).$$

Очевидно, что $\big\|F_\sigma(\varphi_2)\big\|_X \leqslant (\kappa^{p_3} M^{q_1} + 2\sigma + 1) M$.

После этого остается воспользоваться леммами 7, 11, 13. $\square$

Итак, для функции $f_1(t, \varphi) = G(\varphi)$ выполнено условие $\mathbf{F}_2$ при $\mathcal{N}(t, M) = \mu_2(M)$. Учитывая, что $f_1(t, 0) = G(0) = 0$, условие $\mathbf{F}_3$ тоже выполнено при $\mathcal{N}_1(t, M) = \mu_2(M)M$. Поскольку зависимость от t отсутствует, то ясно, что и условие $\mathbf{F}_4$ выполнено при $K_1(M) = \mu_2(M)$, $K_2(M) = \mu_2(M)M$. Но нам будет удобно считать, что $K_2(M) = \mu_2(M)M + 1$ — это не противоречит условию $\mathbf{F}_4$.

В [34] для задачи (3.1) доказаны: единственность решения и локальная разрешимость; при условии $q_1 \geqslant q_2$ — глобальная разрешимость; при условии $q_1 < q_2$ установлено существование максимального по времени решения и получена оценка сверху для времени разрушения решения. Глобальная разрешимость доказана также при условии достаточной малости нормы $\|\varphi_0\|_X$.

Перейдем теперь к управляемому аналогу задачи (3.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta\varphi - |\varphi|^{q_1}\varphi\big) + \Delta\varphi + |\varphi|^{q_2}\varphi = \operatorname{div} u(t), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.5}$$

где управление $u(t)$ принимает значения в $U = L_2^n(\Omega)$. Пусть оператор $B\colon U \to X$ строится аналогично примеру 2 и соответственно, $B^*[\xi] = \nabla\xi$, $\|B\| = \|B^*\| = 1$. Предположим, $z = BB^*\xi = B[\nabla\xi]$ — по определению оператора B, единственный элемент X такой, что

$$(\nabla z, \nabla\psi)_{L_2^n} = [z,\psi] = \ell[\nabla\xi](\psi) = (\nabla\xi, \nabla\psi)_{L_2^n} \quad \forall\,\psi \in X.$$

И в силу единственности, $z = \xi$. Таким образом, $BB^* = I$. Будем считать, что $C(t) = B^*$.

Аналогично (3.1), задача (3.5) представляется в виде уравнения в X:

$$\frac{d\varphi}{dt} = G\big[\varphi(t)\big] + J\big[\varphi(t)\big]^{-1}Bu, \quad t \in [0;T]; \quad \varphi(0) = \varphi_0 \in X,$$

а оно, в свою очередь, трактуется как интегральное уравнение:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f\big(\varphi(s), u(s)\big)\,ds, \quad \varphi \in E(T) = \mathbf{C}(0,T;X), \tag{3.6}$$

где $f(\varphi,u) = f_1(\varphi) + b(\varphi,u) = G(\varphi) + J(\varphi)^{-1}Bu$. В этом смысле можем считать, что $u(t)$ — кусочно постоянное управление со значениями в U.

Проверим, что функция $b(\varphi,u)$ удовлетворяет условиям $\mathbf{B}_1$–$\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_1'$, $\mathbf{B}_2'$, $\mathbf{B}_6$, $\mathbf{B}_7$.

С учетом леммы 11, условие $\mathbf{B}_1$ выполняется очевидным образом. Опять же из леммы 11 вытекает условие $\mathbf{B}_2$ с функцией $\mathcal{N}_2(t,M) = \mu_3(M) = C_1M^{q_1}$. Отсюда же следует и условие $\mathbf{B}_7$ с функцией $K_3(M) = \mu_3(M)$. Непосредственно из леммы 7 вытекают условия $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_6$ с функциями $\mathcal{N}_3(t,M) = \mathcal{N}_4(t,M) = M$. В соответствии с оценкой (3.3) и тем, что $BC = BB^* = I$, выполнено также и условие $\mathbf{B}_1'$ с указанной функцией $\beta_0(M)$. С учетом линейности $b(\varphi,u)$ по u выполнено также и условие $\mathbf{B}_2'$ при $\beta_1(M) = \beta_0(M)$.

Наконец, при использовании условия $\mathbf{R}_1'$ требуется еще разрешимость неравенства (2.6). Здесь, с учетом выбора функций $K_2(M)$, $\beta_0(M)$, можно воспользоваться замечанием 3. Таким образом, применима теорема 3.

Замечание 4. Если вместо управления $u(t)$ использовать управление с обратной связью: $v[\varphi](t) = \big(1 + (q_1+1)\kappa^{p_3}\|\varphi\|_X^{q_1}\big)^2 u(t)$, то, как видно из (3.3) и из оценки нормы $\big\|J(\varphi)\big\|$, в роли β_0 будет выступать константа $\beta_0 = 1$. В этом случае оказывается применимой теорема 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balachandran K., Dauer J. P. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: A survey // Journal of Optimization Theory and Applications. 2002. Vol. 115. No. 1. P. 7–28. https://doi.org/10.1023/A:1019668728098
2. Imanuvilov O., Leugering G., Triggiani R., Zhang Bing-Yu. Control theory of partial differential equations. New York: Chapman and Hall/CRC, 2005. https://doi.org/10.1201/9781420028317
3. Zuazua E. Exact controllability and stabilization of the wave equation. Cham: Springer, 2024. https://doi.org/10.1007/978-3-031-58857-0
4. Bhandari K., Boyer F. Boundary null-controllability of coupled parabolic systems with Robin conditions // Evolution Equations and Control Theory. 2021. Vol. 10. Issue 1. P. 61–102. https://doi.org/10.3934/eect.2020052

5. Ancona F., Nguyen Khai Tien. On the global controllability of scalar conservation laws with boundary and source controls // SIAM Journal on Control and Optimization. 2021. Vol. 59. No. 6. P. 4314–4338. https://doi.org/10.1137/20M1369221
6. Claret S., Lemoine J. Münch A. On the exact boundary controllability of semilinear wave equations // SIAM Journal on Control and Optimization. 2024. Vol. 62. No. 4. P. 1953–1976. https://doi.org/10.1137/23M1586598
7. Nunes R. S. O. Exact boundary controllability for a system of coupled wave equations in noncylindrical domains // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2025. Vol. 48. No. 6. P. 6671–6677. https://doi.org/10.1002/mma.10706
8. Nuñez-Chávez M. R. Controllability under positive constraints for quasilinear parabolic PDEs // Mathematical Control and Related Fields. 2022. Vol. 12. No. 2. P. 327–341. https://doi.org/10.3934/mcrf.2021024
9. Zhang X. Exact controllability of semilinear evolution systems and its application // Journal of Optimization Theory and Applications. 2000. Vol. 107. No. 2. P. 415–432. https://doi.org/10.1023/A:1026460831701
10. Liu Weijiu, Williams G. H. Exact internal controllability for the semilinear heat equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1997. Vol. 211. No. 1. P. 258–272. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5459
11. Balachandran K., Dauer J. P., Balasubramaniam P. Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space // Journal of Optimization Theory and Applications. 1995. Vol. 84. No. 1. P. 83–91. https://doi.org/10.1007/BF02191736
12. Mahmudov N. I. Exact null controllability of semilinear evolution systems // Journal of Global Optimization. 2013. Vol. 56. No. 2. P. 317–326. https://doi.org/10.1007/s10898-011-9823-x
13. de Jesus I. P., Oliveira A. M., Clark M. R., Oliveira P. P. A. Controllability for semilinear heat equation with globally Lipschitz nonlinearities and memory term // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2021. Vol. 60. 103277. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2020.103277
14. Floridia G. Nonnegative multiplicative controllability for semilinear multidimensional reaction-diffusion equations // Minimax Theory and its Applications. 2021. Vol. 6. No. 2. P. 341–352. https://journalmta.com/index.php/jmta/article/view/146
15. Bashirov A. E. On exact controllability of semilinear systems // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. Vol. 44. No. 9. P. 7455–7462. https://doi.org/10.1002/mma.6265
16. Ervedoza S., Lemoine J., Münch A. Exact controllability of semilinear heat equations through a constructive approach // Evolution Equations and Control Theory. 2023. Vol. 12. No. 2. P. 567–599. https://doi.org/10.3934/eect.2022042
17. Nersesyan V. Approximate controllability of nonlinear parabolic PDEs in arbitrary space dimension // Mathematical Control and Related Fields. 2021. Vol. 11. No. 2. P. 237–251. https://doi.org/10.3934/mcrf.2020035
18. Panthee M., Vielma Leal F. On the controllability and stabilization of the Benjamin equation on a periodic domain // Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. 2021. Vol. 38. No. 5. P. 1605–1652. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2020.12.004
19. Phan Duy. Approximate controllability for Navier–Stokes equations in 3D cylinders under Lions boundary conditions by an explicit saturating set // Evolution Equations and Control Theory. 2021. Vol. 10. No. 1. P. 199–227. https://doi.org/10.3934/eect.2020062
20. Liang Yixing, Fan Zhenbin, Li Gang. Process-controllability of semilinear evolution equations and applications // SIAM Journal on Control and Optimization. 2023. Vol. 61. No. 6. P. 3664–3694. https://doi.org/10.1137/23M1568211
21. Ravikumar K., Mohan M. T., Anguraj A. Approximate controllability of a non-autonomous evolution equation in Banach spaces // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2021. Vol. 11. No. 3. P. 461–485. https://doi.org/10.3934/naco.2020038
22. Cai Rui-Yang, Zhou Hua-Cheng, Kou Chun-Hai. Kalman rank criterion for the controllability of fractional impulse controlled systems // IET Control Theory and Applications. 2020. Vol. 14. No. 10. P. 1358–1364. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2019.0027

23. Camacho O., Leiva H. Impulsive semilinear heat equation with delay in control and in state // Asian Journal of Control. 2020. Vol. 22. No. 3. P. 1075–1089. https://doi.org/10.1002/asjc.2017
24. Толстых В. К. Об управляемости систем с распределенными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64. № 6. С. 959–972. https://doi.org/10.31857/S0044466924060067
25. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. https://zbmath.org/0938.93003
26. Чернов А. В. О точной глобальной управляемости полулинейного эволюционного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60. № 3. С. 399–417. https://doi.org/10.31857/S0374064124030093
27. Чернов А. В. О точной глобальной управляемости полулинейного эволюционного уравнения с нестационарным оператором // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61. № 3. С. 410–428. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=81022877
28. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. https://zbmath.org/0172.41903
29. Пугачев В. С. Лекции по функциональному анализу. М.: МАИ, 1996.
30. Brezis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New York: Springer, 2011. https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7
31. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
32. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. https://zbmath.org/0555.46001
33. Качуровский Р. И. Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах // Успехи математических наук. 1968. Т. 23. Вып. 2 (140). С. 121–168. https://www.mathnet.ru/rus/rm5611
34. Корпусов М. О. Условия глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного уравнения псевдопараболического типа // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 678–685. https://www.mathnet.ru/rus/de11282
35. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. № 12. С. 1835–1869. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf923
36. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

Поступила в редакцию 27.08.2025
Принята к публикации 06.02.2026

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А. В. Чернов. О точной глобальной управляемости нелинейного эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве при ограниченном управлении // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 1. С. 137–158.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2026. Vol. 36. Issue 1. Pp. 137–158.

A. V. Chernov

On exact global controllability of nonlinear evolution equation in a Hilbert space under bounded control

Keywords: nonlinear ordinary differential equation in a Hilbert space, exact global controllability, bounded control, strongly nonlinear pseudoparabolic equation.

MSC2020: 93B28, 93C10, 93C20, 93C25

DOI: 10.35634/vm260107

For a Cauchy problem associated with a nonlinear ordinary differential equation in a Hilbert space X, we obtain sufficient conditions for exact controllability to a given final state (as well as to given intermediate states at intermediate times) over arbitrarily fixed (without additional conditions) time interval under a constraint on the control norm value. This is a generalization of a similar result previously obtained by the author for the case of an operator differential equation with a stationary linear operator and linearly incoming control without a constraint on the norm. As before, the Minty–Browder theorem is used, as well as the chain technology for sequentially continuing the solution of the control system to intermediate states. As an example (of independent interest), a strongly nonlinear pseudoparabolic partial differential equation describing the evolution of an electric field in a semiconductor is considered.

REFERENCES

1. Balachandran K., Dauer J. P. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: A survey, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2002, vol. 115, no. 1, pp. 7–28. https://doi.org/10.1023/A:1019668728098
2. Imanuvilov O., Leugering G., Triggiani R., Zhang Bing-Yu. *Control theory of partial differential equations*, New York: Chapman and Hall/CRC, 2005. https://doi.org/10.1201/9781420028317
3. Zuazua E. *Exact controllability and stabilization of the wave equation*, Cham: Springer, 2024. https://doi.org/10.1007/978-3-031-58857-0
4. Bhandari K., Boyer F. Boundary null-controllability of coupled parabolic systems with Robin conditions, *Evolution Equations and Control Theory*, 2021, vol. 10, issue 1, pp. 61–102. https://doi.org/10.3934/eect.2020052
5. Ancona F., Nguyen Khai Tien. On the global controllability of scalar conservation laws with boundary and source controls, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, vol. 59, no. 6, pp. 4314–4338. https://doi.org/10.1137/20M1369221
6. Claret S., Lemoine J. Münch A. On the exact boundary controllability of semilinear wave equations, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2024, vol. 62, no. 4, pp. 1953–1976. https://doi.org/10.1137/23M1586598
7. Nunes R. S. O. Exact boundary controllability for a system of coupled wave equations in noncylindrical domains, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2025, vol. 48, no. 6, pp. 6671–6677. https://doi.org/10.1002/mma.10706
8. Nuñez-Chávez M. R. Controllability under positive constraints for quasilinear parabolic PDEs, *Mathematical Control and Related Fields*, 2022, vol. 12, no. 2, pp. 327–341. https://doi.org/10.3934/mcrf.2021024
9. Zhang X. Exact controllability of semilinear evolution systems and its application, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2000, vol. 107, no. 2, pp. 415–432. https://doi.org/10.1023/A:1026460831701
10. Liu Weijiu, Williams G. H. Exact internal controllability for the semilinear heat equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1997, vol. 211, no. 1, pp. 258–272. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5459

11. Balachandran K., Dauer J. P., Balasubramaniam P. Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1995, vol. 84, no. 1, pp. 83–91. https://doi.org/10.1007/BF02191736
12. Mahmudov N. I. Exact null controllability of semilinear evolution systems, *Journal of Global Optimization*, 2013, vol. 56, no. 2, pp. 317–326. https://doi.org/10.1007/s10898-011-9823-x
13. de Jesus I. P., Oliveira A. M., Clark M. R., Oliveira P. P. A. Controllability for semilinear heat equation with globally Lipschitz nonlinearities and memory term, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2021, vol. 60, 103277. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2020.103277
14. Floridia G. Nonnegative multiplicative controllability for semilinear multidimensional reaction-diffusion equations, *Minimax Theory and its Applications*, 2021, vol. 6, no. 2, pp. 341–352. https://journalmta.com/index.php/jmta/article/view/146
15. Bashirov A. E. On exact controllability of semilinear systems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, vol. 44, no. 9, pp. 7455–7462. https://doi.org/10.1002/mma.6265
16. Ervedoza S., Lemoine J., Münch A. Exact controllability of semilinear heat equations through a constructive approach, *Evolution Equations and Control Theory*, 2023, vol. 12, no. 2, pp. 567–599. https://doi.org/10.3934/eect.2022042
17. Nersesyan V. Approximate controllability of nonlinear parabolic PDEs in arbitrary space dimension, *Mathematical Control and Related Fields*, 2021, vol. 11, no. 2, pp. 237–251. https://doi.org/10.3934/mcrf.2020035
18. Panthee M., Vielma Leal F. On the controllability and stabilization of the Benjamin equation on a periodic domain, *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 2021, vol. 38, no. 5, pp. 1605–1652. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2020.12.004
19. Phan Duy. Approximate controllability for Navier–Stokes equations in 3D cylinders under Lions boundary conditions by an explicit saturating set, *Evolution Equations and Control Theory*, 2021, vol. 10, no. 1, pp. 199–227. https://doi.org/10.3934/eect.2020062
20. Liang Yixing, Fan Zhenbin, Li Gang. Process-controllability of semilinear evolution equations and applications, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2023, vol. 61, no. 6, pp. 3664–3694. https://doi.org/10.1137/23M1568211
21. Ravikumar K., Mohan M. T., Anguraj A. Approximate controllability of a non-autonomous evolution equation in Banach spaces, *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2021, vol. 11, no. 3, pp. 461–485. https://doi.org/10.3934/naco.2020038
22. Cai Rui-Yang, Zhou Hua-Cheng, Kou Chun-Hai. Kalman rank criterion for the controllability of fractional impulse controlled systems, *IET Control Theory and Applications*, 2020, vol. 14, no. 10, pp. 1358–1364. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2019.0027
23. Camacho O., Leiva H. Impulsive semilinear heat equation with delay in control and in state, *Asian Journal of Control*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 1075–1089. https://doi.org/10.1002/asjc.2017
24. Tolstykh V. K. Controllability of distributed parameter systems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2024, vol. 64, no. 6, pp. 1211–1223. https://doi.org/10.1134/S0965542524700453
25. Fursikov A. V. *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*, Providence: AMS, 2000. https://zbmath.org/1027.93500
26. Chernov A. V. On the exact global controllability of a semilinear evolution equation, *Differential Equations*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 374–392. https://doi.org/10.1134/S0012266124030091
27. Chernov A. V. On exact global controllability of a semilinear evolution equation with a time-varying operator, *Differential Equations*, 2025, vol. 61, no. 3, pp. 388–409. https://doi.org/10.1134/S0012266125030097
28. Krein S. G. *Lineinye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* (Linear differential equations in a Banach space), Moscow: Nauka, 1967. https://zbmath.org/0172.41903
29. Pugachev V. S. *Lektsii po funktsional'nomu analizu* (Lectures on functional analysis), Moscow: Moscow Aviation Institute, 1996.
30. Brezis H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, New York: Springer, 2011. https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7

31. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen* (Nonlinear operator equations and operator differential equations), Berlin: Akademie, 1974. https://zbmath.org/0289.47029
32. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional analysis*, Oxford: Pergamon Press, 1982. https://zbmath.org/0484.46003
33. Kachurovskii R. I. Non-linear monotone operators in Banach spaces, *Russian Mathematical Surveys*, 1968, vol. 23, no. 2, pp. 117–165. https://doi.org/10.1070/RM1968v023n02ABEH001239
34. Korpusov M. O. Global solvability conditions for an initial-boundary value problem for a nonlinear equation of pseudoparabolic type, *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 5, pp. 712–720. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0206-2
35. Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. Three-dimensional nonlinear evolution equations of pseudoparabolic type in problems of mathematical physics, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 12, pp. 1765–1797. https://zbmath.org/1121.35329
36. Yosida K. *Functional analysis*, Berlin–Heidelberg: Springer, 1995. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61859-8

Received 27.08.2025
Accepted 06.02.2026

Andrei Vladimirovich Chernov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A. V. Chernov. On exact global controllability of nonlinear evolution equation in a Hilbert space under bounded control, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 1, pp. 137–158.