ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2026. Т. 36. Вып. 2. С. 181–204.

УДК 517.977.8, 519.837.4

© *А. И. Благодатских*

ОДНОВРЕМЕННАЯ МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА В ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С РАВНЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ УЧАСТНИКОВ. СЛУЧАЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО МНОЖЕСТВА ЗНАЧЕНИЙ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В данной работе рассматривается задача простого преследования с равными возможностями:

$$\begin{array}{llll} P_i: & \dot{x}_i = u_i, \quad u_i(t) \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ E: & \dot{y} = v, \qquad v(t) \in U(t), & y(t_0) = Y^0, & t \in [t_0, \infty). \end{array}$$

Говорят, что в задаче преследования происходит многократная поимка, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать:

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha), \quad \alpha \in \Lambda, \quad \Lambda \subset \{1, 2, \ldots, n\}, \quad |\Lambda| = b \quad (n \geqslant b \geqslant 1).$$

В задаче о нестрогой одновременной многократной поимке требуется, чтобы моменты поимки совпадали:

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

Одновременная многократная поимка происходит, если совпадают наименьшие моменты поимки:

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \quad x_\alpha(s) \neq y(s), \quad s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

В терминах начальных позиций участников и других параметров получены необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки убегающего.

Ключевые слова: поимка, многократная поимка, одновременная многократная поимка, преследование, убегание, дифференциальные игры, конфликтно управляемые процессы.

DOI: 10.35634/vm260201

Введение

Дифференциальные игры двух лиц, впервые рассмотренные Р. Айзексом [1], в настоящее время представляют собой содержательную математическую теорию [2–5] (метод Л. С. Понтрягина, метод экстремального прицеливания Н. Н. Красовского и другие).

Естественным обобщением дифференциальных игр двух лиц являются задачи преследования–убегания с участием группы управляемых объектов хотя бы с одной из противоборствующих сторон, при этом наибольшую трудность для исследований представляют задачи конфликтного взаимодействия между двумя группами управляемых объектов. Специфика этих задач (например, невыпуклость и несвязность объединения множеств достижимости преследователей или целевых множеств убегающих) требует создания новых методов их исследования, отличных от методов, разработанных для игр двух лиц.

Задача простого группового преследования с равными возможностями рассматривалась Л. А. Петросяном, им были получены достаточные условия поимки убегающего [6], Б. Н. Пшеничный получил необходимые и достаточные условия поимки убегающего [7]. Н. Л. Григоренко ввел понятие многократной поимки, для задачи с простыми движениями и равными возможностями им представлены необходимые и достаточные условия многократной поимки убегающего [8]. А. А. Чикрием [9] и Н. Н. Петровым [10] были получены достаточные условия многократной поимки убегающего в конфликтно управляемых процессах и в примере Л. С. Понтрягина с равными возможностями. Н. Н. Петровым и Н. А. Соловьевой рассмотрены рекуррентные дифференциальные игры при равных возможностях участников: для примера Л.С. Понтрягина [11, 12] и конфликтно управляемого процесса [13] получены достаточные условия многократной поимки убегающего; для примера Л.С. Понтрягина [14] и конфликтно управляемого процесса [15] получены достаточные условия поимки не менее q убегающих при условии, что каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей. Задачу о многократной поимке не менее q убегающих с равными возможностями участников при указанном выше условии рассмотрели Н. Н. Петров и А. Я. Нарманов, были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования для случая простых движений [16], а также достаточные условия завершения преследования в задаче с дробными производными и простой матрицей [17]. Н. Н. Петров и Е. С. Можегова рассмотрели задачу группового преследования убегающего, описываемую в заданной временной шкале линейной системой с простой матрицей, были получены достаточные условия многократной поимки убегающего [18].

В работах [19–21] введены понятия нестрогой одновременной и одновременной многократных поимок убегающего, для задач простого преследования, конфликтно управляемых процессов, а также примера Л. С. Понтрягина с равными возможностями приведены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия разрешимости. Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то говорят, что происходит нестрогая одновременная многократная поимка убегающего. Наконец, если совпадают наименьшие моменты поимки, то происходит одновременная многократная поимка убегающего.

Задача об одновременной многократной поимке группы убегающих [22–26] рассматривалась в двух аспектах: в [24,25] с точки зрения суммарной кратности поимок всех убегающих — получены необходимые и достаточные условия суммарных многократной, нестрогой одновременной многократной и одновременной многократной поимок использующих жестко скоординированное управление убегающих в нестационарном конфликтно управляемом процессе с равными возможностями всех игроков; синхронная реализация одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности рассматривалась в [22,23,26] — получены необходимые и достаточные условия разрешимости указанной задачи.

В работах [27–29] введены понятия и получены необходимые и достаточные условия многократной, нестрогой одновременной многократной и одновременной многократной поимок убегающего в задаче простого группового преследования и конфликтно управляемом процессе с равными возможностями при наличии третьей группы участников — защитников убегающего.

Данная работа продолжает исследования о разрешимости задач об одновременной многократной поимке. В отличие от работ [19–29], в которых множество значений допустимых управлений участников задавалось либо компактом, либо непрерывным многозначным отображением, в настоящей статье рассмотрен случай кусочно-непрерывного множества значений допустимых управлений. Для задачи простого преследования с равными возможностями получены необходимые, достаточные, а также необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки убегающего. Управления преследователей, гарантирующие указанный вид поимки не позднее некоторого конечного момента времени, построены в явном виде. Рассмотрен ряд модельных примеров.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лица: n преследователей $P_1, P_2, \dots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lllll} P_i & : & \dot{x}_i = u_i, & u_i(t) \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E & : & \dot{y} = v, & v(t) \in U(t), & y(t_0) = Y^0, \end{array} \tag{1.1}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь и далее $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; $U(t)$ — измеримое по Лебегу многозначное отображение из $[t_0, \infty)$ в множество всех непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^k$; $I(q) = \{1, 2, \dots, q\}$ для всех $q \geqslant 1$; $\langle a, c\rangle$ — скалярное произведение векторов $a, c \in \mathbb{R}^k$; $|a| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$, $a \in \mathbb{R}^k$; $S(c, r) = \{a \in \mathbb{R}^k\colon |a - c| \leqslant r\}$ — замкнутый шар с центром в точке c радиуса r; $\mathcal{I}$ — единичная матрица соответствующей размерности.

Определение 1.1. *Допустимым управлением* будем называть любую измеримую по Лебегу на $[t_0, \infty)$ однозначную ветвь многозначного отображения $U(t)$.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots$ — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q\to\infty} \theta_q = \infty$).

Определение 1.2. *Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ*, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$ допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ i \in I(n),\ y(\theta_q)\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots.$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Определение 1.3. *Кусочно-программной контрстратегией $\mathfrak{U}_i$ преследователя P_i, $i \in I(n)$, соответствующей разбиению σ*, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$ и сужению $\big(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})\big)$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t, \theta_q, x_\alpha(\theta_q), \alpha \in I(n), y(\theta_q), \big(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})\big)\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots.$$

Действия преследователей можно трактовать так: имеется центр управления, который каждому преследователю P_i, $i \in I(n)$, пошагово строит допустимое управление $u_i(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы преследователей).

Для каждого $q \in I(n)$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \dots, i_q\}\colon i_1 < i_2 < \dots < i_q,\ i_1, i_2, \dots, i_q \in I(n)\big\},$$

мощность которого совпадает с числом сочетаний из n по q, то есть $|\Omega(q)| = C_n^q$.

Определение 1.4. В игре Γ возможна *b-кратная поимка* ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \ \text{ при всех } \ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что в игре Γ возможны следующие ситуации: каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза; убегающий E может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз (но не более чем n).

Определение 1.5. В игре Γ возможна *нестрогая одновременная b-кратная поимка*, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau) \ \text{ при всех } \ \alpha \in \Lambda.$$

Определение 1.6. В игре Γ возможна *одновременная b-кратная поимка*, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \ x_\alpha(s) \neq y(s) \ \text{ при всех } \ s \in [t_0, \tau), \ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки можно не указывать и говорить, что в игре Γ возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

§ 2. Решение задачи

Будем считать, что для множества значений допустимых управлений выполнены

Предположение 2.1. Существуют кусочно-непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и кусочно-непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \ \text{ для всех } \ t \in [t_0, \infty). \tag{2.1}$$

Предположение 2.2. Матрица $B^{-1}(t)$ является кусочно-непрерывной на $[t_0, \infty)$.

Отметим, что существование матрицы $B^{-1}(t)$ при всех $t \in [t_0, \infty)$ следует из предположения 2.1. Вместе с тем, из предположения 2.1 не следует предположение 2.2. (Например, для матрицы

$$B(t) = \begin{cases} (1-t)\mathcal{I}, & \text{если } t \in [0, 1), \\ \mathcal{I}, & \text{если } t \in [1, \infty), \end{cases}$$

предположение 2.1 выполнено на промежутке $[0, \infty)$, при $t = 1$ элементы главной диагонали матрицы $B(t)$ терпят разрыв первого рода. Для обратной матрицы

$$B^{-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-t}\mathcal{I}, & \text{если } t \in [0, 1), \\ \mathcal{I}, & \text{если } t \in [1, \infty), \end{cases}$$

предположение 2.2 на промежутке $[0,\infty)$ не выполнено, при $t=1$ элементы главной диагонали матрицы $B^{-1}(t)$ терпят разрыв второго рода.)

Далее, из (2.1) получаем, что

$$U(t)=B^{-1}(t)S(0,1)-g(t)\ \text{ для всех }\ t\in[t_0,\infty). \tag{2.2}$$

Отметим, что из локальной ограниченности матрицы $B^{-1}(t)$ и функции $g(t)$ следует и локальная ограниченность многозначного отображения $U(t)$, то есть для любого $T\geqslant t_0$ существует $r>0$, что $U(t)\subset S(0,r)$ для всех $t\in[t_0,T]$. Отсюда следует, что решение системы (1.1) продолжимо на $[t_0,\infty)$ при выборе любых допустимых управлений.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2. Тогда при каждом $t\in[t_0,\infty)$ многозначное отображение $U(t)$ является строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное значение $t\in[t_0,\infty)$. Тот факт, что $U(t)$ является компактом в $\mathbb{R}^k$ следует из (2.2), а также свойств матрицы $B^{-1}(t)$ и функции $g(t)$. Докажем выпуклость $U(t)$. Для этого выберем любые $w_1,w_2\in U(t)$, а также число $\alpha\in[0,1]$. Из (2.1) получим, что

$$\begin{gathered}B(t)(w_1+g(t))=s_1\in S(0,1),\quad B(t)(w_2+g(t))=s_2\in S(0,1),\\ B(t)\big(\alpha w_1+(1-\alpha)w_2+g(t)\big)=\alpha B(t)\big(w_1+g(t)\big)+(1-\alpha)B(t)\big(w_2+g(t)\big)=\\ =\alpha s_1+(1-\alpha)s_2\in S(0,1).\end{gathered}$$

Из последней цепочки равенств и (2.1) следует, что $\alpha w_1+(1-\alpha)w_2\in U(t)$, и выпуклость компакта $U(t)$ доказана.

Предположим, что $U(t)$ при некотором $t\in[t_0,\infty)$ не является строго выпуклым компактом. Тогда найдутся различные $w_1,w_2\in\partial U(t)$ $(w_1\neq w_2)$ такие, что

$$\alpha w_1+(1-\alpha)w_2\in\partial U(t)\ \text{ для всех }\ \alpha\in[0,1]$$

(целый отрезок лежит на границе компакта $U(t)$). Далее, из (2.1) получим, что

$$\begin{gathered}B(t)\big(w_1+g(t)\big)=s_1\in\partial S(0,1),\quad B(t)\big(w_2+g(t)\big)=s_2\in\partial S(0,1),\quad s_1\neq s_2,\\ B(t)\big(\alpha w_1+(1-\alpha)w_2+g(t)\big)=\alpha B(t)\big(w_1+g(t)\big)+(1-\alpha)B(t)\big(w_2+g(t)\big)=\\ =\alpha s_1+(1-\alpha)s_2\in\partial S(0,1)\ \text{ для всех }\ \alpha\in[0,1].\end{gathered}$$

Последнее означает, что $S(0,1)$ не является строго выпуклым компактом (целый отрезок лежит на $\partial S(0,1)$). Но это не так. Полученное противоречие означает, что $U(t)$ при каждом $t\in[t_0,\infty)$ является строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$.

Осталось доказать гладкость границы $U(t)$ при каждом $t\in[t_0,\infty)$. Отметим, что компакт $B^{-1}(t)S(0,1)$ имеет гладкую границу поскольку матрица $B^{-1}(t)$ невырожденная. Параллельный перенос компакта не влияет на его гладкость, поэтому множество $B^{-1}(t)S(0,1)-g(t)$ тоже является компактом с гладкой границей. Теперь гладкость границы $U(t)$ при каждом $t\in[t_0,\infty)$ следует из представления (2.2). □

Для всех $w\in W$, $\xi\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w,\xi;W)=\sup\big\{\lambda\geqslant 0\colon (w-\lambda\xi)\in W\big\}. \tag{2.3}$$

Тогда $\lambda(w,\xi;S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w-\lambda\xi|\leqslant 1$, решая которое получаем, что

$$\lambda(w,\xi;S(0,1))=\frac{\langle w,\xi\rangle+\sqrt{\langle w,\xi\rangle^2+|\xi|^2\big(1-|w|^2\big)}}{|\xi|^2}\ \text{ для всех }\ w\in S(0,1)\ \text{ и }\ \xi\neq 0. \tag{2.4}$$

Сделанные предположения допускают переход от $U(t)$ к $S(0,1)$. А именно, из (2.1), (2.3), (2.4) получим, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ имеют место равенства

$$\begin{gathered}\lambda(w,\xi;U(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0\colon (w-\lambda\xi) \in U(t)\bigr\} = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0\colon B(t)\bigl(w-\lambda\xi+g(t)\bigr) \in B(t)\bigl(U(t)+g(t)\bigr)\bigr\} = \\ = \sup\Bigl\{\lambda \geqslant 0\colon \Bigl(B(t)\bigl(w+g(t)\bigr)-\lambda B(t)\xi\Bigr) \in S(0,1)\Bigr\} = \\ = \lambda\bigl(B(t)\bigl(w+g(t)\bigr), B(t)\xi; S(0,1)\bigr) = \frac{1}{|B(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B(t)\bigl(w+g(t)\bigr), B(t)\xi\rangle + \\ + \sqrt{\langle B(t)\bigl(w+g(t)\bigr), B(t)\xi\rangle^2 + |B(t)\xi|^2\bigl(1-|B(t)(w+g(t))|^2\bigr)}\ \Bigr).\end{gathered} \tag{2.5}$$

Учитывая, что $X_i^0 \neq Y^0$, $i \in I(n)$, а также равенства (2.3), (2.5) получим, что каждая функция

$$\lambda_i(v,t) = \lambda\bigl(v, X_i^0 - Y^0; U(t)\bigr) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0\colon \bigl(v-\lambda(X_i^0-Y^0)\bigr) \in U(t)\bigr\} \tag{2.6}$$

кусочно-непрерывна на множестве $\bigl\{(v,t) \in \mathbb{R}^k \times [t_0,\infty)\colon v \in U(t)\bigr\}$. Следовательно, при любом допустимом управлении $v(t)$ получаем функции $\lambda_i(v(t),t)$ (одного аргумента t) измеримые по Лебегу на $[t_0,\infty)$.

Введем обозначения

$$\delta_0(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v,t), \qquad \Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s)\,ds. \tag{2.7}$$

Лемма 2.2. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2 и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда функция* $\delta_0(t)$ *кусочно-непрерывна и положительна на* $[t_0,\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.7), (2.6), (2.5) получаем, что

$$\begin{gathered}\delta_0(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda\bigl(v, X_\alpha^0 - Y^0; U(t)\bigr) = \\ = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda\bigl(B(t)\bigl(v+g(t)\bigr), B(t)(X_\alpha^0-Y^0); S(0,1)\bigr).\end{gathered}$$

Используя соотношение (2.1), имеем

$$\begin{gathered}\min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda\bigl(B(t)\bigl(v+g(t)\bigr), B(t)(X_\alpha^0-Y^0); S(0,1)\bigr) = \\ = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda\bigl(s, B(t)(X_\alpha^0-Y^0); S(0,1)\bigr).\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\delta_0(t) = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda\bigl(s, b_\alpha(t); S(0,1)\bigr), \ \text{ где } \ b_i(t) = B(t)(X_i^0-Y^0), \ i \in I(n). \tag{2.8}$$

Отметим, что все функции $b_i(t) \neq 0$ и кусочно-непрерывны на $[t_0,\infty)$. Из последнего утверждения следует, что (2.8) можно преобразовать с применением (2.4), получим

$$\delta_0(t) = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \frac{\langle s, b_\alpha(t)\rangle + \sqrt{\langle s, b_\alpha(t)\rangle^2 + |b_\alpha(t)|^2\bigl(1-|s|^2\bigr)}}{|b_\alpha(t)|^2}. \tag{2.9}$$

Из равенства (2.9) и указанных выше свойств $b_i(t)$, $i \in I(n)$, следует, что функция $\delta_0(t)$ кусочно-непрерывна на $[t_0,\infty)$.

Предположим теперь, что, вопреки утверждению леммы, найдется такое $t^* \in [t_0, \infty)$, что $\delta_0(t^*) = 0$. Тогда из (2.8) следует, что найдется элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(b)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda$, для которого $\lambda(s^*, b_\alpha(t^*); S(0,1)) = 0$. Построим множество

$$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n-b+1}\} \in \Omega(n-b+1)$$

по следующему правилу. Выберем элемент

$$q_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, b\} \in \Omega(b) \ \text{ из условия } \ \lambda(s^*, b_{q_1}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

затем такой элемент

$$q_2 \in L_2 = (L_1 \cup \{b+1\}) \setminus \{q_1\} \in \Omega(b) \ \text{ такой, что } \ \lambda(s^*, b_{q_2}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

далее элемент

$$q_3 \in L_3 = (L_2 \cup \{b+2\}) \setminus \{q_2\} \in \Omega(b) \ \text{ такой, что } \ \lambda(s^*, b_{q_3}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

и так далее. На последнем шаге построим множество

$$L_{n-b+1} = (L_{n-b} \cup \{n\}) \setminus \{q_{n-b}\} \in \Omega(b)$$

и выберем элемент

$$q_{n-b+1} \in L_{n-b+1} \ \text{ по условию } \ \lambda(s^*, b_{q_{n-b+1}}(t^*); S(0,1)) = 0.$$

По построению для множества $Q \in \Omega(n-b+1)$ справедливо равенство

$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{q \in Q} \lambda(s, b_q(t^*); S(0,1)) = 0,$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \{b_q(t^*),\ q \in Q\} = \operatorname{Int} \operatorname{co} \{B(t^*)(X_q^0 - Y^0),\ q \in Q\}.$$

Поскольку матрица $B(t^*)$ невырожденная, то

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \{X_q^0 - Y^0,\ q \in Q\}.$$

А так как матрица $B(t)$ невырожденная при всех $t \in [t_0, \infty)$, то

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \{B(t)(X_q^0 - Y^0),\ q \in Q\} \ \text{ для всех } \ t \in [t_0, \infty).$$

Таким образом, построенное выше множество $Q \in \Omega(n-b+1)$ обладает свойством

$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{q \in Q} \lambda(s, b_q(t); S(0,1)) = 0 \ \text{ для всех } \ t \in [t_0, \infty),$$

которое означает, что для любого $t \in [t_0, \infty)$ найдется элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(b)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda$, для которого

$$\lambda(s^*, b_\alpha(t); S(0,1)) = 0.$$

Из последнего утверждения, (2.8) и (2.7) следует, что

$$\delta_0(t) = 0 \ \text{ при всех } \ t \in [t_0, \infty) \ \text{ и } \ \Delta_0 = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\delta_0(t) > 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2 и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда*

$$\inf_{t\in[t_0,T]} \delta_0(t) > 0 \ \ \textit{для любого} \ \ T \in [t_0, \infty).$$

Доказательство. Из леммы 2.2 следует, что

$$\inf_{t\in[t_0,T]} \delta_0(t) \geqslant 0 \ \ \text{для любого} \ \ T \in [t_0, \infty).$$

Предположим, что существует такое конечное значение $T_1 \in [t_0, \infty)$, что

$$\inf_{t\in[t_0,T_1]} \delta_0(t) = 0.$$

Поскольку функция $\delta_0(t)$ положительна и кусочно-непрерывна на $[t_0, \infty)$, то найдется ее точка разрыва первого рода $t_1 \in [t_0, T_1]$, для которой

$$\lim_{t\to t_1-0} \delta_0(t) = 0 \ \ \text{или} \ \ \lim_{t\to t_1+0} \delta_0(t) = 0.$$

Без ограничения общности, будем считать, что имеет место первое равенство. Тогда, с учетом (2.8) и (2.6) получаем, что

$$\begin{gathered}
0 = \lim_{t\to t_1-0} \delta_0(t) = \lim_{t\to t_1-0} \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(s, B(t)(X_\alpha^0 - Y^0); S(0,1)) = \\
= \lim_{t\to t_1-0} \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0\colon (s - \lambda B(t)(X_\alpha^0 - Y^0)) \in S(0,1)\bigr\} = \\
= \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0\colon (s - \lambda B^*(X_\alpha^0 - Y^0)) \in S(0,1)\bigr\}, \\
\text{где} \ \ B^* = \lim_{t\to t_1-0} B(t).
\end{gathered} \tag{2.10}$$

Если матрица B^* невырожденная, то аналогично доказательству леммы 2.2 показывается, что

$$\min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0\colon (s - \lambda B^*(X_\alpha^0 - Y^0)) \in S(0,1)\bigr\} > 0.$$

Последнее неравенство противоречит (2.10). Значит матрица B^* вырожденная и

$$\det B^* = \det \lim_{t\to t_1-0} B(t) = \lim_{t\to t_1-0} \det B(t) = 0. \tag{2.11}$$

Из (2.11), с учетом равенства

$$\det B^{-1}(t) = \frac{1}{\det B(t)} \ \ \text{для всех} \ \ t \in [t_0, \infty),$$

получаем, что

$$\lim_{t\to t_1-0} |\det B^{-1}(t)| = \infty. \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что в точке t_1 матрица $B^{-1}(t)$ терпит разрыв второго рода, а значит она не является кусочно-непрерывной на $[t_0, \infty)$ и предположение 2.2 не выполнено.

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения. □

Лемма 2.4. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2 и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда существует конечный момент* $T > t_0$ *такой, что для любого допустимого управления* $v(t)$ *найдется такое множество* $\Lambda \in \Omega(b)$, *что*

$$\int_{t_0}^{T} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds \geqslant 1 \ \ \textit{для всех} \ \ \alpha \in \Lambda.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеют место соотношения

$$\max_{\Lambda\in\Omega(b)}\min_{\alpha\in\Lambda}\int_{t_0}^{t}\lambda_\alpha(v(s),s)\,ds \geqslant \frac{1}{C_n^b}\sum_{\Lambda\in\Omega(b)}\min_{\alpha\in\Lambda}\int_{t_0}^{t}\lambda_\alpha(v(s),s)\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{C_n^b}\sum_{\Lambda\in\Omega(b)}\int_{t_0}^{t}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(v(s),s)\,ds = \frac{1}{C_n^b}\int_{t_0}^{t}\sum_{\Lambda\in\Omega(b)}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(v(s),s)\,ds \geqslant \frac{1}{C_n^b}\int_{t_0}^{t}\delta_0(s)\,ds.$$

Так как $\Delta_0=\infty$, то существует конечный момент $T>t_0$, определяемый из условия

$$\frac{1}{C_n^b}\int_{t_0}^{T}\delta_0(s)\,ds \geqslant 1,$$

для которого найдется множество $\Lambda\in\Omega(b)$, удовлетворяющее требуемому свойству. □

Пусть

$$T_0=\min\Big\{T>t_0\colon \inf_{v(\cdot)}\max_{\Lambda\in\Omega(b)}\min_{\alpha\in\Lambda}\int_{t_0}^{T}\lambda_\alpha(v(s),s)\,ds\geqslant 1\Big\}, \tag{2.13}$$

где инфимум берется по всем допустимым управлениям $v(t)$.

Из леммы 2.4 следует, что $T_0<\infty$, если выполнены предположения 2.1, 2.2 и $\Delta_0=\infty$, при этом

$$\frac{1}{C_n^b}\int_{t_0}^{T_0}\delta_0(s)ds \geqslant 1. \tag{2.14}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2 и $\Delta_0=\infty$. Тогда в игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение системы (1.1) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$x_i(t)=X_i^0+\int_{t_0}^{t}u_i(s)\,ds,\quad y(t)=Y^0+\int_{t_0}^{t}v(s)\,ds \ \text{ для всех } \ i\in I(n),\ t\in[t_0,\infty).$$

Следовательно,

$$x_i(t)-y(t)=(X_i^0-Y^0)+\int_{t_0}^{t}(u_i(s)-v(s))\,ds \ \text{ для всех } \ i\in I(n),\ t\in[t_0,\infty).$$

Пусть $v(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T_0$, — произвольное допустимое управление убегающего E. Из определения (2.13) момента T_0 следует, что существует момент $\tau\in(t_0,T_0]$, являющийся корнем уравнения

$$1-\max_{\Lambda\in\Omega(b)}\min_{\alpha\in\Lambda}\int_{t_0}^{t}\lambda_\alpha(v(s),s)\,ds=0,$$

а также множество $\Lambda_0\in\Omega(b)$ такое, что

$$1-\int_{t_0}^{\tau}\lambda_\alpha(v(s),s)\,ds\leqslant 0 \ \text{ для всех } \ \alpha\in\Lambda_0.$$

Пусть $\tau_i\in[t_0,\infty)$, $i\in I(n)$, — минимальное значение такое, что

$$1-\int_{t_0}^{\tau_i}\lambda_i(v(s),s)\,ds=0$$

(если указанного значения не существует, то полагаем $\tau_i = \infty$). Отметим, что

$$\tau_\alpha \in (t_0, \tau] \subset (t_0, T_0] \text{ для всех } \alpha \in \Lambda_0.$$

Функциональная зависимость вида $u_i(t) = g(v(t))$, $t \in [t_0, \infty)$, в соответствии с правилами игры Γ, реализуется преследователем P_i, $i \in I(n)$, следующим образом: в момент $t = \theta_0 = t_0$ преследователь P_i узнает $v(t)$, $t \in [\theta_0, \theta_1)$, и вычисляет

$$u_i(t) = g(v(t)), \quad t \in [\theta_0, \theta_1);$$

в момент $t = \theta_1$ преследователь P_i получает информацию про $v(t)$, $t \in [\theta_1, \theta_2)$, и находит

$$u_i(t) = g(v(t)), \quad t \in [\theta_1, \theta_2);$$

в момент $t = \theta_2$ преследователю P_i становится известно $v(t)$, $t \in [\theta_2, \theta_3)$, и он может определить

$$u_i(t) = g(v(t)), \quad t \in [\theta_2, \theta_3),$$

и так далее.

Задаем допустимые управления преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = \begin{cases} v(t) - \lambda_i(v(t), t)(X_i^0 - Y^0), & t \in [t_0, \min\{\tau_i, T_0\}] \\ v(t), & t > \min\{\tau_i, T_0\}. \end{cases}$$

Тогда для всех $\alpha \in \Lambda_0$

$$x_\alpha(\tau) - y(\tau) = (X_\alpha^0 - Y^0)\left(1 - \int_{t_0}^{\tau_\alpha} \lambda_\alpha(v(s), s)ds\right) = 0. \qquad \square$$

Для каждого единичного вектора $l \in \mathbb{R}^k$ определим функцию $v_l(t) \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, по следующему условию:

$$\langle u(t) - v_l(t), l \rangle < 0 \text{ для всех } u(t) \in U(t) \setminus \{v_l(t)\} \text{ и } t \in [t_0, \infty). \tag{2.15}$$

Лемма 2.5. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2. Тогда для каждого фиксированного единичного вектора $l \in \mathbb{R}^k$ функция $v_l(t)$ существует, единственна и*

$$v_l(t) = B^{-1}(t)\frac{(B^{-1}(t))^{\mathrm{T}} l}{|(B^{-1}(t))^{\mathrm{T}} l|} - g(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольный единичный вектор $l \in \mathbb{R}^k$. Из строгой выпуклости и компактности множества $U(t)$ следует, что $\max\limits_{v(t)\in U(t)} \langle v(t), l \rangle$ достигается на единственном векторе $v_l(t)$ при всех $t \in [t_0, \infty)$. Отсюда сразу следует (2.15).

Из равенств

$$\langle v_l(t), l \rangle = \max_{v(t)\in U(t)} \langle v(t), l \rangle = \max_{v(t)\in B^{-1}(t)S(0,1)-g(t)} \langle v(t), l \rangle$$

получим, что

$$v_l(t) = B^{-1}(t)s_l(t) - g(t), \tag{2.16}$$

где $s_l(t)$ — решение экстремальной задачи

$$\langle s_l(t), l \rangle = \max_{s(t)\in S(0,1)} \langle B^{-1}(t)s(t), l \rangle.$$

Далее, имеющие место равенства

$$\max_{s(t)\in S(0,1)}\langle B^{-1}(t)s(t),l\rangle=\max_{s(t)\in S(0,1)}\langle s(t),(B^{-1}(t))^{\mathrm{T}}l\rangle=\left\langle\frac{(B^{-1}(t))^{\mathrm{T}}l}{|(B^{-1}(t))^{\mathrm{T}}l|},(B^{-1}(t))^{\mathrm{T}}l\right\rangle$$

означают, что для каждого $t\in[t_0,\infty)$ вектор

$$s_l(t)=\frac{(B^{-1}(t))^{\mathrm{T}}l}{|(B^{-1}(t))^{\mathrm{T}}l|} \tag{2.17}$$

является единственным решением вспомогательной экстремальной задачи.

Из (2.16) и (2.17) получаем требуемое единственное представление для $v_l(t)$. □

Лемма 2.6. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2. Если в процессе игры* Γ *для некоторого единичного вектора* $l\in\mathbb{R}^k$*, номера* $p\in I(n)$ *и момента* $\theta_q\geqslant t_0$ *реализовалась ситуация*

$$\langle x_p(\theta_q)-y(\theta_q),l\rangle\leqslant 0,\quad x_p(\theta_q)\neq y(\theta_q),$$

то, определяя допустимое продолжение управления убегающего E *равенством*

$$v(t)=v_l(t)\ \text{ для всех }\ t\in[\theta_q,\infty),$$

получим выполнимость неравенств

$$\langle x_p(t)-y(t),l\rangle\leqslant 0,\quad x_p(t)\neq y(t)\ \text{ для всех }\ t\in[\theta_q,\infty)$$

при всех допустимых продолжениях управления $u_p(t)$*,* $t\in[\theta_q,\infty)$*, преследователя* P_p*.*

Доказательство. В силу (2.15), леммы 2.5, условий настоящей леммы и теоремы Коши

$$\langle x_p(t)-y(t),l\rangle=\langle x_p(\theta_q)-y(\theta_q),l\rangle+\int_{\theta_q}^{t}\langle u_p(s)-v_l(s),l\rangle\,ds\leqslant 0\ \text{ для всех }\ t\in[\theta_q,\infty),$$

причем равенство возможно только в случае, если $u_p(s)=v_l(s)$ почти всюду на $[\theta_q,t]$, но в этом случае $x_p(t)\neq y(t)$, так как $x_p(\theta_q)\neq y(\theta_q)$. Если

$$\langle x_p(t)-y(t),l\rangle<0,$$

то $x_p(t)\neq y(t)$. Следовательно, $x_p(t)\neq y(t)$ для всех $t\in[\theta_q,\infty)$. □

Условие 2.1. $Y^0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{X_p^0,\ p\in K\}$ для всех множеств $K\in\Omega(n-b+1)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2. Тогда условие 2.1 является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ*.*

Доказательство. Пусть условие 2.1 не выполнено. Тогда существует (хотя бы одно) множество $Q\in\Omega(n-b+1)$ такое, что $Y^0\notin\operatorname{Int}\operatorname{co}\{X_q^0,q\in Q\}$. Из теоремы отделимости следует, что существует единичный вектор $l\in\mathbb{R}^k$ такой, что $\langle h,l\rangle\leqslant 0$ для всех $h\in\operatorname{co}\{X_q^0-Y^0,q\in Q\}$, поэтому

$$\langle X_q^0-Y^0,l\rangle\leqslant 0\ \text{ для всех }\ q\in Q.$$

По (2.15) определим допустимое управление убегающего E следующим образом:

$$v(t)=v_l(t)\ \text{ для всех }\ t\in[t_0,\infty).$$

В силу леммы 2.6 при любых допустимых управлениях $u_i(t)$ преследователей P_i выполнено неравенство $x_q(t)\neq y(t)$ для всех $t\in[t_0,\infty)$, $q\in Q$.

Оставшиеся $|I(n)\setminus Q|=n-(n-b+1)=b-1$ преследователей не могут осуществить b-кратную поимку. □

В основе построенных при доказательстве теоремы 2.1 управлений преследователей, обеспечивающих нестрогую одновременную b-кратную поимку (а следовательно, и b-кратную поимку) не позже момента T_0, определенного по (2.13), лежит стратегия параллельного преследования; однако эти управления не обеспечивают совпадения b наименьших моментов поимки, то есть не решают задачу об одновременной b-кратной поимке.

Построим управления преследователей, решающих задачу об одновременной b-кратной поимке, причем вновь не позднее момента T_0, определенного по (2.13).

Теорема 2.3. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2 и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная b-кратная поимка.*

Доказательство. Неформально, при осуществлении одновременной b-кратной поимки группой преследователей, предпишем каждому из них действовать так: сначала сблизиться с убегающим (максимально быстро, насколько это позволяет стратегия параллельного преследования) на расстояние, зависящее от параметров игры; сопровождать убегающего (снова используя стратегию параллельного преследования — выбирать управление равное управлению убегающего) до наступления некоторого момента; осуществить одновременную b-кратную поимку в составе группы захвата.

При любых допустимых управлениях решения (1.1) имеют вид

$$x_i(t) = X_i^0 + \int_{t_0}^{t} u_i(s)\,ds, \quad y(t) = Y^0 + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds \ \text{ для всех } \ i \in I(n),\ t \in [t_0, \infty).$$

Следовательно, для всех $i \in I(n)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$x_i(t) - y(t) = (X_i^0 - Y^0) + \int_{t_0}^{t} (u_i(s) - v(s))\,ds.$$

Допустимые управления преследователей P_i, $i \in I(n)$, будут иметь следующий вид:

$$u_i(t) = v(t) - h_i(t)\lambda_i(v(t), t)(X_i^0 - Y^0), \quad t \in [t_0, \infty),$$

где функции $h_i(t) \in [0, 1]$ являются кусочно-постоянными и могут менять свое значение лишь в моменты $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_q < \ldots$, определенные разбиением σ.

Тогда для всех $i \in I(n)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$x_i(t) - y(t) = (X_i^0 - Y^0)\big(1 - G_i(t)\big), \ \text{ где } \ G_i(t) = \int_{t_0}^{t} h_i(s)\lambda_i(v(s), s)\,ds. \tag{2.18}$$

Таким образом, чтобы добиться одновременной b-кратной поимки, достаточно для любого разбиения σ и допустимого управления $v(t)$ определить функции $h_i(t) \in [0, 1]$ так, чтобы нашлись множество $\Lambda^* \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых выполнены соотношения

$$G_\alpha(\tau) = 1, \quad G_\alpha(t) < 1 \ \text{ при всех } \ t \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda^*. \tag{2.19}$$

Для всех $\Lambda \in \Omega(b)$, $i \in I(n)$, $a \leqslant c$, $a, c \in [t_0, \infty)$, введем обозначения

$$L(\Lambda; a, c) = \int_a^c \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s)\,ds, \qquad L_i(a, c) = \int_a^c \lambda_i(v(s), s)\,ds. \tag{2.20}$$

В дальнейшем будем учитывать, что при всех $\Lambda \in \Omega(b)$, $i \in I(n)$, $a \in [t_0, \infty)$ и любых допустимых управлениях $v(t)$ функции $L(\Lambda; a, t)$ и $L_i(a, t)$ непрерывны по t на промежутке $[a, \infty)$.

Определим функции $h_i(t)$ и тем самым полностью определим управления преследователей.

Шаг 0. Момент $t = \theta_0 = t_0$. Необходимо определить $h_i(\theta_0) \in [0,1]$ для всех $i \in I(n)$.

Преследователи P_i знают разбиение σ, момент T_0 из формулы (2.13) и $v(t)$ для $t \in [\theta_0, \theta_1)$. Преследователи P_i вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\tau = \min\bigl\{t \in (\theta_0, \theta_1]\colon \text{ существует } \Lambda^* \in \Omega(b) \text{ такое, что } L(\Lambda^*; \theta_0, t) = 1\bigr\}. \tag{2.21}$$

Вариант 0.1. Существует момент $\tau \in (\theta_0, \theta_1]$. Тогда

$$\begin{gathered} h_\alpha(\theta_0) = \frac{1}{L_\alpha(\theta_0, \tau)}, \quad \text{если } \alpha \in \Lambda^*; \quad h_\beta(\theta_0) = 0, \quad \text{если } \beta \in I(n) \setminus \Lambda^*; \\ h_i(t) = h_i(\theta_0), \quad t \in [\theta_0, \theta_1), \; i \in I(n). \end{gathered} \tag{2.22}$$

Здесь и далее, если (2.21) определяет несколько множеств Λ^*, то, в соответствии с лексикографическим порядком, выберем первое (минимальное) из них. Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda^*$

$$1 = L(\Lambda^*; \theta_0, \tau) = \int_{\theta_0}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s), s)\, ds \leqslant \int_{\theta_0}^{\tau} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds = L_\alpha(\theta_0, \tau),$$

поэтому

$$h_\alpha(\theta_0) = \frac{1}{L_\alpha(\theta_0, \tau)} \leqslant 1 \text{ для всех } \alpha \in \Lambda^*.$$

Далее, из определения (2.21) момента τ на данном шаге следует, что

$$L(\Lambda^*; \theta_0, t) < L(\Lambda^*; \theta_0, \tau) \text{ при всех } t \in [\theta_0, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_0, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$ имеем

$$\begin{gathered} L_\alpha(t, \tau) = \int_t^\tau \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds \geqslant \int_t^\tau \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s), s)\, ds = L(\Lambda^*; \theta_0, \tau) - L(\Lambda^*; \theta_0, t) > 0 \text{ и} \\ L_\alpha(\theta_0, t) < L_\alpha(\theta_0, t) + L_\alpha(t, \tau) = L_\alpha(\theta_0, \tau). \end{gathered} \tag{2.23}$$

Выполнены соотношения (2.19) (происходит одновременная b-кратная поимка), поскольку из (2.18), (2.20), (2.22), (2.23) следует, что при всех $t \in [\theta_0, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$

$$\begin{gathered} G_\alpha(\tau) = h_\alpha(\theta_0) \int_{\theta_0}^{\tau} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds = \frac{1}{L_\alpha(\theta_0, \tau)} L_\alpha(\theta_0, \tau) = 1, \\ G_\alpha(t) = h_\alpha(\theta_0) \int_{\theta_0}^{t} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds = \frac{1}{L_\alpha(\theta_0, \tau)} L_\alpha(\theta_0, t) < 1. \end{gathered}$$

Покажем теперь, используя (2.20) и (2.14), что если $T_0 \leqslant \theta_1$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

$$\begin{gathered} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} L(\Lambda; \theta_0, T_0) \geqslant \frac{1}{C_n^b} \sum_{\Lambda \in \Omega(b)} L(\Lambda; \theta_0, T_0) = \frac{1}{C_n^b} \sum_{\Lambda \in \Omega(b)} \int_{\theta_0}^{T_0} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds = \\ = \frac{1}{C_n^b} \int_{\theta_0}^{T_0} \sum_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds \geqslant \frac{1}{C_n^b} \int_{\theta_0}^{T_0} \delta_0(s)\, ds \geqslant 1. \end{gathered}$$

Следовательно, момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_1$ существует.

Вариант 0.2. Момента $\tau \in (\theta_0, \theta_1]$ не существует (это возможно только при $\theta_1 < T_0$).

Выберем и зафиксируем произвольное значение δ^* из условия

$$0 < \delta^* \leqslant \inf_{t\in[t_0,T_0]} \delta_0(t), \tag{2.24}$$

существование δ^* следует из леммы 2.3.

Определим

$$q^* = \max\{q \geqslant 0\colon \theta_q < T_0\}. \tag{2.25}$$

Отметим, что $T_0 \leqslant \theta_{q^*+1}$.

Вычислим

$$d^* = d^*(\sigma, T_0) = \min\{\theta_1 - \theta_0, \theta_2 - \theta_1, \ldots, \theta_{q^*} - \theta_{q^*-1}, T_0 - \theta_{q^*}\} > 0. \tag{2.26}$$

В начальный момент $t = t_0 = \theta_0$ (по сути до начала игры) определим как близко преследователь P_i должен сближаться с убегающим E

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\sigma, T_0) = \frac{\delta^* d^*}{C_n^b} > 0. \tag{2.27}$$

Определим $h_i(t)$ для всех $i \in I(n)$ и $t \in [\theta_0, \theta_1)$ следующим образом:

$$h_i(\theta_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } L_i(\theta_0,\theta_1) \leqslant 1-\varepsilon^*, \\ \dfrac{1-\varepsilon^*}{L_i(\theta_0,\theta_1)}, & \text{если } L_i(\theta_0,\theta_1) > 1-\varepsilon^*, \end{cases} \qquad h_i(t) = h_i(\theta_0). \tag{2.28}$$

Тогда

$$G_i(\theta_1) = h_i(\theta_0)\int_{\theta_0}^{\theta_1} \lambda_i(v(s),s)\,ds = h_i(\theta_0)L_i(\theta_0,\theta_1) =$$

$$= \begin{cases} 1\cdot L_i(\theta_0,\theta_1), & \text{если } L_i(\theta_0,\theta_1) \leqslant 1-\varepsilon^*, \\ \dfrac{1-\varepsilon^*}{L_i(\theta_0,\theta_1)} L_i(\theta_0,\theta_1), & \text{если } L_i(\theta_0,\theta_1) > 1-\varepsilon^*, \end{cases} = \begin{cases} L_i(\theta_0,\theta_1), & \text{если } h_i(\theta_0) = 1, \\ 1-\varepsilon^*, & \text{если } h_i(\theta_0) < 1. \end{cases}$$

Получили, что

$$G_i(\theta_1) \leqslant 1-\varepsilon^* \ \text{ для всех } \ i \in I(n).$$

Шаг 1. Момент $t = \theta_1$ ($\theta_1 < T_0$). Необходимо определить $h_i(\theta_1) \in [0,1]$ для всех $i \in I(n)$.

Преследователи P_i знают $v(t)$, $t \in [\theta_1, \theta_2)$, а также на предыдущем шаге вычислили $\varepsilon^* > 0$. Преследователи P_i вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{gathered} \tau = \min\bigl\{t \in (\theta_1,\theta_2]\colon \text{ существует } \Lambda^* \in \Omega(b) \\ \text{такое, что } \min_{\alpha^*\in\Lambda^*} G_{\alpha^*}(\theta_1) + L(\Lambda^*;\theta_1,t) = 1\bigr\}. \end{gathered} \tag{2.29}$$

Вариант 1.1. Существует момент $\tau \in (\theta_1, \theta_2]$. Тогда

$$\begin{gathered} h_\alpha(\theta_1) = \frac{1-G_\alpha(\theta_1)}{L_\alpha(\theta_1,\tau)}, \ \text{ если } \ \alpha \in \Lambda^*; \quad h_\beta(\theta_1) = 0, \ \text{ если } \ \beta \in I(n)\setminus\Lambda^*; \\ h_i(t) = h_i(\theta_1), \quad t \in [\theta_1,\theta_2), \ i \in I(n). \end{gathered} \tag{2.30}$$

Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda^*$

$$1 - G_\alpha(\theta_1) \leqslant 1 - \min_{\alpha^*\in\Lambda^*} G_{\alpha^*}(\theta_1) = L(\Lambda^*;\theta_1,\tau) = \int_{\theta_1}^{\tau} \min_{\alpha^*\in\Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s),s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\theta_1}^{\tau} \lambda_\alpha(v(s),s)\,ds = L_\alpha(\theta_1,\tau),$$

поэтому для всех $\alpha \in \Lambda^*$

$$h_\alpha(\theta_1) = \frac{1 - G_\alpha(\theta_1)}{L_\alpha(\theta_1, \tau)} \leqslant \frac{1 - G_\alpha(\theta_1)}{1 - G_\alpha(\theta_1)} = 1.$$

Далее, из определения (2.29) момента τ на данном шаге следует, что

$$L(\Lambda^*; \theta_1, t) < L(\Lambda^*; \theta_1, \tau) \ \text{ при всех } \ t \in [\theta_1, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_1, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$ имеем

$$L_\alpha(t, \tau) = \int_t^\tau \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds \geqslant \int_t^\tau \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s), s)\, ds = L(\Lambda^*; \theta_1, \tau) - L(\Lambda^*; \theta_1, t) > 0 \ \text{ и}$$
$$L_\alpha(\theta_1, t) < L_\alpha(\theta_1, t) + L_\alpha(t, \tau) = L_\alpha(\theta_1, \tau). \tag{2.31}$$

Выполнены соотношения (2.19) (то есть происходит одновременная b-кратная поимка), поскольку из (2.18), (2.20), (2.30), (2.31) следует, что при всех $t \in [\theta_1, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$

$$G_\alpha(\tau) = G_\alpha(\theta_1) + h_\alpha(\theta_1) \int_{\theta_1}^\tau \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds = G_\alpha(\theta_1) + \frac{1 - G_\alpha(\theta_1)}{L_\alpha(\theta_1, \tau)} L_\alpha(\theta_1, \tau) = 1,$$
$$G_\alpha(t) = G_\alpha(\theta_1) + h_\alpha(\theta_1) \int_{\theta_1}^t \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds = G_\alpha(\theta_1) + \frac{1 - G_\alpha(\theta_1)}{L_\alpha(\theta_1, \tau)} L_\alpha(\theta_1, t) < 1.$$

($G_i(t) \leqslant G_i(\theta_1) \leqslant 1 - \varepsilon^* < 1$ для всех $t \in [\theta_0, \theta_1]$ и $i \in I(n)$ поскольку на предыдущем шаге имел место вариант 0.2.)

Покажем теперь, используя (2.20) и (2.14), что если $T_0 \leqslant \theta_2$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

Предположим сначала, что из (2.28) получили, что $h_i(\theta_0) = 1$ для всех $i \in I(n)$. Тогда

$$\max_{\Lambda \in \Omega(b)} \Big(\min_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha(\theta_1) + L(\Lambda; \theta_1, T_0) \Big) \geqslant \frac{1}{C_n^b} \sum_{\Lambda \in \Omega(b)} \Big(\min_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha(\theta_1) + L(\Lambda; \theta_1, T_0) \Big) =$$
$$= \frac{1}{C_n^b} \sum_{\Lambda \in \Omega(b)} \Big(\min_{\alpha \in \Lambda} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds + \int_{\theta_1}^{T_0} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds \Big) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{C_n^b} \sum_{\Lambda \in \Omega(b)} \Big(\int_{\theta_0}^{\theta_1} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds + \int_{\theta_1}^{T_0} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds \Big) =$$
$$= \frac{1}{C_n^b} \sum_{\Lambda \in \Omega(b)} \int_{\theta_0}^{T_0} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds = \frac{1}{C_n^b} \int_{\theta_0}^{T_0} \sum_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{C_n^b} \int_{\theta_0}^{T_0} \delta_0(s)\, ds \geqslant 1.$$

Следовательно, если $h_i(\theta_0) = 1$ для всех $i \in I(n)$, то момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_2$ существует.

Предположим, что из (2.28) получили, что $h_\alpha(\theta_0) < 1$ при некоторых $\alpha \in \Lambda^*$. Тогда получим, что $G_\alpha(\theta_1) = 1 - \varepsilon^*$ и, следуя (2.24), (2.26), (2.27),

$$G_\alpha(\theta_1) + L(\Lambda^*; \theta_1, T_0) \geqslant 1 - \varepsilon^* + \frac{1}{C_n^b} \int_{\theta_1}^{T_0} \delta_0(s) ds \geqslant 1 - \varepsilon^* + \frac{\delta^*}{C_n^b}(T_0 - \theta_1) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \varepsilon^* + \frac{\delta^* d^*}{C_n^b} = 1 - \frac{\delta^* d^*}{C_n^b} + \frac{\delta^* d^*}{C_n^b} = 1,$$

то есть и в указанном случае момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_2$ существует.

Вариант 1.2. Момента $\tau \in (\theta_1, \theta_2]$ не существует (это возможно только при $\theta_2 < T_0$).

Определим $h_i(t)$ для всех $i \in I(n)$ и $t \in [\theta_1, \theta_2)$ следующим образом:

$$h_i(\theta_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_i(\theta_1) + L_i(\theta_1, \theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_i(\theta_1)}{L_i(\theta_1, \theta_2)}, & \text{если } G_i(\theta_1) + L_i(\theta_1, \theta_2) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} \qquad h_i(t) = h_i(\theta_1).$$

Тогда

$$G_i(\theta_2) = G_i(\theta_1) + h_i(\theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda_i(v(s), s)\, ds = G_i(\theta_1) + h_i(\theta_1) L_i(\theta_1, \theta_2) =$$

$$= \begin{cases} G_i(\theta_1) + 1 \cdot L_i(\theta_1, \theta_2), & \text{если } G_i(\theta_1) + L_i(\theta_1, \theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ G_i(\theta_1) + \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_i(\theta_1)}{L_i(\theta_1, \theta_2)} L_i(\theta_1, \theta_2), & \text{если } G_i(\theta_1) + L_i(\theta_1, \theta_2) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_i(\theta_1) + L_i(\theta_1, \theta_2), & \text{если } h_i(\theta_1) = 1, \\ 1 - \varepsilon^*, & \text{если } h_i(\theta_1) < 1. \end{cases}$$

В любом случае

$$G_i(\theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^* \ \text{ для всех } \ i \in I(n).$$

Шаг q ($q = 2, 3, 4, \ldots$). Момент $t = \theta_q$ ($\theta_q < T_0$). Необходимо определить $h_i(\theta_q) \in [0, 1]$ для всех $i \in I(n)$.

Преследователи P_i знают $v(t)$, $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ и $\varepsilon^* > 0$. Преследователи P_i вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{gathered} \tau = \min\bigl\{t \in (\theta_q, \theta_{q+1}] \colon \ \text{существует } \ \Lambda^* \in \Omega(b) \\ \text{такое, что } \ \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} G_{\alpha^*}(\theta_q) + L(\Lambda^*; \theta_q, t) = 1\bigr\}. \end{gathered} \tag{2.32}$$

Вариант q.1. Существует момент $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$. Тогда

$$\begin{gathered} h_\alpha(\theta_q) = \frac{1 - G_\alpha(\theta_q)}{L_\alpha(\theta_q, \tau)}, \ \text{ если } \ \alpha \in \Lambda^*; \quad h_\beta(\theta_q) = 0, \ \text{ если } \ \beta \in I(n) \setminus \Lambda^*; \\ h_i(t) = h_i(\theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \ i \in I(n). \end{gathered} \tag{2.33}$$

Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda^*$

$$1 - G_\alpha(\theta_q) \leqslant 1 - \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} G_{\alpha^*}(\theta_q) = L(\Lambda^*; \theta_q, \tau) = \int_{\theta_q}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s), s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\theta_q}^{\tau} \lambda_\alpha(v(s), s)\, ds = L_\alpha(\theta_q, \tau),$$

поэтому для всех $\alpha \in \Lambda^*$

$$h_\alpha(\theta_q) = \frac{1 - G_\alpha(\theta_q)}{L_\alpha(\theta_q, \tau)} \leqslant \frac{1 - G_\alpha(\theta_q)}{1 - G_\alpha(\theta_q)} = 1.$$

Далее, из определения (2.32) момента τ на данном шаге следует, что

$$L(\Lambda^*; \theta_q, t) < L(\Lambda^*; \theta_q, \tau) \ \text{ при всех } \ t \in [\theta_q, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_q, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$ имеем

$$L_\alpha(t,\tau) = \int_t^\tau \lambda_\alpha(v(s),s)\,ds \geqslant \int_t^\tau \min_{\alpha^*\in\Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s),s)\,ds = L(\Lambda^*;\theta_q,\tau) - L(\Lambda^*;\theta_q,t) > 0 \ \text{ и}$$
$$L_\alpha(\theta_q,t) < L_\alpha(\theta_q,t) + L_\alpha(t,\tau) = L_\alpha(\theta_q,\tau). \tag{2.34}$$

Выполнены соотношения (2.19) (то есть происходит одновременная b-кратная поимка), поскольку из (2.18), (2.20), (2.33), (2.34) следует, что при всех $t \in [\theta_q, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$

$$G_\alpha(\tau) = G_\alpha(\theta_q) + h_\alpha(\theta_q)\int_{\theta_q}^\tau \lambda_\alpha(v(s),s)\,ds = G_\alpha(\theta_q) + \frac{1-G_\alpha(\theta_q)}{L_\alpha(\theta_q,\tau)}L_\alpha(\theta_q,\tau) = 1,$$
$$G_\alpha(t) = G_\alpha(\theta_q) + h_\alpha(\theta_q)\int_{\theta_q}^t \lambda_\alpha(v(s),s)\,ds = G_\alpha(\theta_q) + \frac{1-G_\alpha(\theta_q)}{L_\alpha(\theta_q,\tau)}L_\alpha(\theta_q,t) < 1.$$

($G_i(t) \leqslant G_i(\theta_q) \leqslant 1-\varepsilon^* < 1$ для всех $t \in [\theta_0, \theta_q]$, $i \in I(n)$, поскольку на предыдущем шаге имел место вариант $(q-1).2.$)

Аналогично тому как это делалось на шаге 1 доказывается следующее утверждение: если $T_0 \leqslant \theta_{q+1}$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

Вариант q.2. Момента $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ не существует (это значит, что $\theta_{q+1} < T_0$).

Определим $h_i(t)$ для всех $i \in I(n)$ и $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ следующим образом:

$$h_i(\theta_q) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_i(\theta_q) + L_i(\theta_q,\theta_{q+1}) \leqslant 1-\varepsilon^*, \\ \dfrac{1-\varepsilon^*-G_i(\theta_q)}{L_i(\theta_q,\theta_{q+1})}, & \text{если } G_i(\theta_q) + L_i(\theta_q,\theta_{q+1}) > 1-\varepsilon^*, \end{cases} \qquad h_i(t) = h_i(\theta_q).$$

Тогда

$$G_i(\theta_{q+1}) = G_i(\theta_q) + h_i(\theta_q)\int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} \lambda_i(v(s),s)\,ds = G_i(\theta_q) + h_i(\theta_q)L_i(\theta_q,\theta_{q+1}) =$$
$$= \begin{cases} G_i(\theta_q) + 1\cdot L_i(\theta_q,\theta_{q+1}), & \text{если } G_i(\theta_q)+L_i(\theta_q,\theta_{q+1}) \leqslant 1-\varepsilon^*, \\ G_i(\theta_q) + \dfrac{1-\varepsilon^*-G_i(\theta_q)}{L_i(\theta_q,\theta_{q+1})}L_i(\theta_q,\theta_{q+1}), & \text{если } G_i(\theta_q)+L_i(\theta_q,\theta_{q+1}) > 1-\varepsilon^*, \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} G_i(\theta_q) + L_i(\theta_q,\theta_{q+1}), & \text{если } h_i(\theta_q) = 1, \\ 1-\varepsilon^*, & \text{если } h_i(\theta_q) < 1. \end{cases}$$

В любом случае

$$G_i(\theta_{q+1}) \leqslant 1-\varepsilon^* \ \text{ для всех } \ i \in I(n).$$

Из (2.25) следует, что не позже чем на шаге q^* произойдет одновременная b-кратная поимка. □

Предположение 2.3. Существуют кусочно-постоянная и невырожденная на $[t_0,\infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k, которая на всем промежутке $[t_0,\infty)$ принимает конечное число значений, а также кусочно-непрерывная на $[t_0,\infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что выполнено соотношение (2.1).

Лемма 2.7. *Пусть имеет место предположение 2.3. Тогда выполнены предположения 2.1, 2.2.*

Доказательство. Предположение 2.3 сразу влечет выполнимость предположения 2.1. Далее, невырожденная на $[t_0,\infty)$ матрица $B(t)$ является кусочно-постоянной и на всем промежутке $[t_0,\infty)$ принимает конечное число значений. Такими же свойствами обладает и матрица $B^{-1}(t)$, а это означает, что имеет место и предположение 2.2. □

Лемма 2.8. *Пусть выполнены предположение 2.3 и условие 2.1. Тогда* $\Delta_0 = \infty$.

Доказательство. В силу леммы 2.7 выполнены предположения 2.1, 2.2.

Аналогично доказательству леммы 2.2 показывается, что при выполнении условия 2.1 функция $\delta_0(t) > 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$.

Невырожденная на $[t_0, \infty)$ матрица $B(t)$ является кусочно-постоянной и на всем промежутке $[t_0, \infty)$ принимает конечное число значений. Из этого факта и соотношений (2.8), (2.9) следует, что функция $\delta_0(t)$ на всем промежутке $[t_0, \infty)$ принимает конечное число значений.

Из вышеуказанных свойств функции $\delta_0(t)$ следует существование

$$\delta^* = \min_{t \in [t_0, \infty)} \delta_0(t) > 0.$$

Используя это неравенство и (2.7) получим, что

$$\Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s)\, ds \geqslant \int_{t_0}^{\infty} \delta^*\, ds = \infty. \qquad \square$$

Теорема 2.4. *Пусть выполнено предположение 2.3. Тогда условие 2.1 является необходимым и достаточным для осуществления одновременной b-кратной поимки в игре* Γ.

Доказательство. В силу леммы 2.7 выполнены предположения 2.1, 2.2 и необходимость выполнения условия 2.1 следует из теоремы 2.2.

Пусть выполнено условие 2.1. Из леммы 2.8 получаем, что $\Delta_0 = \infty$ и теперь возможность одновременной b-кратной поимки следует из теоремы 2.3. $\square$

§ 3. Примеры

Пример 3.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{3.1}$ $2+2q$ лиц: преследователей $P_1, \ldots, P_{1+2q}$ и убегающего E вида (1.1), где $q \geqslant 1$, $t_0 = 0$,

$$U(t) = \begin{cases} S\big(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), 1\big), & \text{если } \{t\} < 0{,}25, \\ S\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{2}\big), & \text{если } 0{,}25 \leqslant \{t\} < 0{,}5, \\ S\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{3}\big), & \text{если } 0{,}5 \leqslant \{t\} < 0{,}75, \\ S\big(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{4}\big), & \text{если } 0{,}75 \leqslant \{t\}, \end{cases} \quad \text{(здесь } \{\cdot\} \text{ — дробная часть числа)},$$

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{1+2q} \\ \sin \frac{2\pi i}{1+2q} \end{pmatrix}, \quad i \in I(1+2q), \quad Y^0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Предположение 2.3 выполнено:

$$B(t) = \begin{cases} \mathcal{I}, & \text{если } \{t\} < 0{,}25, \\ 2\mathcal{I}, & \text{если } 0{,}25 \leqslant \{t\} < 0{,}5, \\ 3\mathcal{I}, & \text{если } 0{,}5 \leqslant \{t\} < 0{,}75, \\ 4\mathcal{I}, & \text{если } 0{,}75 \leqslant \{t\}, \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), & \text{если } \{t\} < 0{,}25, \\ \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), & \text{если } 0{,}25 \leqslant \{t\} < 0{,}5, \\ \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), & \text{если } 0{,}5 \leqslant \{t\} < 0{,}75, \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), & \text{если } 0{,}75 \leqslant \{t\}. \end{cases}$$

Отметим, что начальные позиции преследователей образуют правильный $(1+2q)$-угольник с центром в начальной позиции убегающего. Проверяя, получаем, что при $b = 1, 2, \ldots, q$ условие 2.1 имеет место, а при $b \geqslant q+1$ условие 2.1 не выполнено. Из теоремы 2.4 следует

Утверждение 3.1. *В игре $\Gamma_{3.1}$ возможна одновременная q-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Пример 3.2. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим игру $\Gamma_{3.2}$ $2+3q$ лиц: преследователей $P_1, \ldots, P_{1+3q}$ и убегающего E вида (1.1), где $q \geqslant 1$, $t_0 = 0$,

$$U(t) = S\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix}\right), 1\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi i}{1+2q}\\ \sin\frac{2\pi i}{1+2q}\\ 0\end{pmatrix}, \quad X_l^0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\2\end{smallmatrix}\right), \quad Y^0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right),$$
$$i \in I(1+2q), \quad l = 2q+2, 2q+3, \ldots, 3q+1.$$

Предположение 2.3 выполнено: $B(t) = \mathcal{I}$ и $g(t) = (-2,-3,-4)^{\mathrm{T}}$. Из теоремы 2.4 следует

Утверждение 3.2. *В игре $\Gamma_{3.2}$ возможна одновременная q-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Покажем, что условие 2.1 в общем случае действительно не является достаточным для осуществления b-кратной поимки (см. теорему 2.2).

Пример 3.3. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{3.3}$ 6 лиц: преследователей $P_1, \ldots, P_5$ и убегающего E вида (1.1), где $t_0 = 0$,

$$U(t) = S\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), e^{-t}\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix}5\cos\frac{2\pi i}{5}\\ 5\sin\frac{2\pi i}{5}\end{pmatrix}, \quad i \in I(5), \quad Y^0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right).$$

Предположения 2.1 и 2.2 выполнены: $B(t) = e^t\mathcal{I}$, $g(t) = (0,0)^{\mathrm{T}}$, $B^{-1}(t) = e^{-t}\mathcal{I}$. Отметим, что выполнено и условие 2.1 при $b = 1, 2$. При всех допустимых управлениях

$$x_i(t) \in X_i^0 + S\big((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\big), \quad i \in I(5), \quad y(t) \in S\big((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\big), \quad t \in [0, \infty).$$

Поскольку $|X_i^0| = 5$, то

$$\Big(X_i^0 + S\big((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\big)\Big) \bigcap S\big((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\big) = \varnothing,$$

следовательно, $x_i(t) \neq y(t)$, $i \in I(5)$, $t \in [0,\infty)$, при любых допустимых управлениях игроков.

Утверждение 3.3. *В игре $\Gamma_{3.3}$ поимка невозможна.*

Покажем еще, что в предположении 2.3 ограничение о том, что матрица $B(t)$ на всем промежутке $[t_0, \infty)$ принимает лишь конечное число значений является существенным (см. теорему 2.4).

Пример 3.4. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{3.4}$ 8 лиц: преследователей $P_1, \ldots, P_7$ и убегающего E вида (1.1), где $t_0 = 0$,

$$U(t) = S\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), 1/2^q\right), \text{ если } t \in [q, q+1), \ q = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$X_i^0 = \begin{pmatrix}10\cos\frac{2\pi i}{7}\\ 10\sin\frac{2\pi i}{7}\end{pmatrix}, \quad i \in I(7), \quad Y^0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right).$$

Предположения 2.1 и 2.2 выполнены:

$$B(t) = 2^q\mathcal{I}, \quad B^{-1}(t) = 2^{-q}\mathcal{I}, \text{ если } t \in [q, q+1), \ q = 0, 1, 2, \ldots, \quad g(t) = (0,0)^{\mathrm{T}}.$$

Отметим, что матрица $B(t)$ является невырожденной и кусочно-постоянной на всем промежутке $[t_0, \infty)$, но принимает на нем бесконечное число значений и предположение 2.3 не выполнено. Условие 2.1 выполнено при $b = 1, 2, 3$. При всех допустимых управлениях

$$x_i(t) \in X_i^0 + S\Big(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), \sum_{q=0}^{\infty} 1/2^q\Big) = X_i^0 + S\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), 2\right), \qquad y(t) \in S\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), 2\right), \quad t \in [0, \infty).$$

Поскольку $|X_i^0| = 10$, то

$$\Big(X_i^0 + S\big((0,0)^{\mathrm{T}}, 2\big)\Big) \bigcap S\big((0,0)^{\mathrm{T}}, 2\big) = \varnothing,$$

следовательно, $x_i(t) \neq y(t)$, $i \in I(7)$, $t \in [0, \infty)$, при любых допустимых управлениях игроков.

Утверждение 3.4. *В игре* $\Gamma_{3.4}$ *поимка невозможна.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. https://zbmath.org/0152.38407
2. Понтрягин Л. С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды ордена Ленина Математического института имени В. А. Стеклова. 1971. Т. 112. С. 30–63. https://www.mathnet.ru/rus/tm3032
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. https://zbmath.org/0298.90067
4. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977.
5. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
6. Петросян Л. А. Игры преследования «с линией жизни» со многими участниками // Известия АН Арм. ССР. Математика. 1966. Т. 1. № 5. С. 331–340.
7. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: МГУ, 1990.
9. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
10. Петров Н. Н. Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/1997/61-5/747
11. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 178–186. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23607930
12. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 128–135. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26873985
13. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 212–218. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28409380
14. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка заданного числа убегающих в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 186. С. 108–115. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-108-115
15. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games // Сибирские электронные математические известия. 2022. Т. 19. Вып. 1. С. 371–377. https://www.mathnet.ru/rus/semr1508
16. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 193–198. https://doi.org/10.20537/vm180205
17. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче с дробными производными и простой матрицей // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 188–199. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-188-199

18. Можегова Е. С., Петров Н. Н. Многократная поимка убегающего в линейной задаче преследования во временных шкалах // Труды института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30. № 3. С. 217–228. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-3-217-228
19. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22947344
20. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/2009/73-1/54
21. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 433–440. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/2013/77-3/433
22. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 13–18. https://doi.org/10.20537/vm120302
23. Благодатских А. И. Поимка группы убегающих в конфликтно управляемом процессе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 20–26. https://doi.org/10.20537/vm130403
24. Благодатских А. И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 46–57. https://doi.org/10.20537/vm160104
25. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. No. 3. P. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8
26. Благодатских А. И. Синхронная реализация одновременных многократных поимок убегающих // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 3–26. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-01
27. Благодатских А. И. Задачи группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 13–20. https://www.mathnet.ru/rus/iimi297
28. Благодатских А. И. Задача простого группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Математическая теория игр и её приложения. 2014. Т. 6. Вып. 2. С. 32–41. https://www.mathnet.ru/rus/mgta132
29. Благодатских А. И., Банников А. С. Одновременная многократная поимка при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 10–29. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-02

Поступила в редакцию 20.02.2026
Принята к публикации 28.04.2026

Благодатских Александр Иванович, д. ф.-м. н., доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0009-0002-7557-3340
E-mail: aiblag@mail.ru

Цитирование: А. И. Благодатских. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования с равными возможностями участников. Случай нестационарного множества значений допустимых управлений специального вида // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 2. С. 181–204.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2026. Vol. 36. Issue 2. Pp. 181–204.

A. I. Blagodatskikh

Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem with equal opportunities for players. The case of a non-stationary set of values of admissible controls of a special type

Keywords: capture, multiple capture, simultaneous multiple capture, pursuit, evasion, differential games, conflict controlled processes.

MSC2020: 49N70, 49N75

DOI: 10.35634/vm260201

The present paper deals with the problem of simple pursuit with equal opportunities

$$\begin{array}{llll} P_i: & \dot{x}_i = u_i, \quad u_i(t) \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ E: & \dot{y} = v, \qquad v(t) \in U(t), & y(t_0) = Y^0, & t \in [t_0, \infty). \end{array}$$

We say that a multiple capture in the problem of pursuit holds if the specified number of pursuers catch evader, possibly at different times:

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha), \quad \alpha \in \Lambda, \quad \Lambda \subset \{1, 2, \ldots, n\}, \quad |\Lambda| = b \quad (n \geqslant b \geqslant 1).$$

The problem of nonstrict simultaneous multiple capture requires that the capture moments coincide:

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

The problem of a simultaneous multiple capture requires that the lowest capture moments coincide:

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \quad x_\alpha(s) \neq y(s), \quad s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

We obtain necessary and sufficient conditions for simultaneous multiple capture of the evader in terms of initial positions of the participants and other parameters.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965. https://zbmath.org/0125.38001
   Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967. https://zbmath.org/0152.38407
2. Pontryagin L. S. A linear differential evasion game, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1971, vol. 112, pp. 27–60.
3. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988. https://zbmath.org/0649.90101
   Original Russian text published in Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka, 1974. https://zbmath.org/0298.90067
4. Petrosyan L. A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential games of pursuit), Leningrad: Leningrad State University, 1977.
5. Chernous'ko F. L., Melikyan A. A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Control and search game problems), Moscow: Nauka, 1978.
6. Petrosyan L. A. "Life-line" pursuit games with several players, *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoi SSR. Matematika*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 331–340 (in Russian).
7. Pshenichnyi B. N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, issue 3, pp. 484–485. https://doi.org/10.1007/BF01070036
8. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods for controlling several dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990.

9. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997.
https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
Original Russian text published in Chikrii A. A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy*, Kiev: Naukova dumka, 1992.
10. Petrov N. N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, issue 5, pp. 725–732.
https://doi.org/10.1016/S0021-8928(97)00095-6
11. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 174–182.
https://doi.org/10.1134/S0081543816050163
12. Petrov N. N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, issue 5, pp. 855–861. https://doi.org/10.1134/S0005117916050088
13. Petrov N. N., Solov'eva N. A. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 212–218 (in Russian).
https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218
14. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of a given number of evaders in L. S. Pontryagin's recurrent example, *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, 2020, vol. 186, pp. 108–115 (in Russian).
https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-186-108-115
15. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2022, vol. 19, issue 1, pp. 371–377. https://www.mathnet.ru/eng/semr1508
16. Petrov N. N., Narmanov A. Ya. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of a simple pursuit, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 193–198 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180205
17. Petrov N. N., Narmanov A. Ya. Multiple capture of a given number of evaders in a problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 188–199 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-188-199
18. Mozhegova E. S., Petrov N. N. Multiple capture of an evader in the linear pursuit problem on time scales, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2024, vol. 327, suppl. 1, pp. S215–S225.
https://doi.org/10.1134/S0081543824070162
19. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22947344
20. Blagodatskikh A. I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, issue 1, pp. 36–40.
https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.03.010
21. Blagodatskikh A. I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, issue 3, pp. 314–320.
https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.09.007
22. Blagodatskikh A. I. Simultaneous multiple capture of evaders in a simple group pursuit problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 3, pp. 13–18 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm120302
23. Blagodatskikh A. I. Capture of a group of evaders in a conflict-controlled process, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 4, pp. 20–26 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm130403
24. Blagodatskikh A. I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 46–57 (in Russian).
https://doi.org/10.20537/vm160104

25. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, no. 3, pp. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8
26. Blagodatskikh A. I. Synchronous implementation of simultaneous multiple captures of evaders, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 3–26 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-01
27. Blagodatskikh A. I. Problems of group pursuit with equal opportunities in a presence of defenders for an evader, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 13–20 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/iimi297
28. Blagodatskikh A. I. A simple group pursuit problem with equal opportunities and the presence of evader's defenders, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, issue 4, pp. 716–721. https://doi.org/10.1134/S0005117916040159
29. Blagodatskikh A. I., Bannikov A. S. Simultaneous multiple capture in the presence of evader's defenders, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 10–29 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-02

Received 20.02.2026
Accepted 28.04.2026

Aleksandr Ivanovich Blagodatskikh, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0009-0002-7557-3340
E-mail: aiblag@mail.ru

Citation: A. I. Blagodatskikh. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem with equal opportunities for players. The case of a non-stationary set of values of admissible controls of a special type, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 2, pp. 181–204.