УДК 517.977

© *А. В. Ким*

# ПРОГРАММНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ТЕОРИИ ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Данная статья продолжает изложение для систем с последействием завершенной, то есть полностью аналогичной конечномерным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, теории позиционных дифференциальных игр Н. Н. Красовского–А. И. Субботина. Теория строится на основе разработанного автором подхода, позволяющего конструктивно перенести на системы с последействием все результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

*Ключевые слова*: дифференциальные игры, функционально-дифференциальные уравнения, $i$-гладкий анализ.

DOI: 10.35634/vm260205

## Введение

Данная статья продолжает изложение для систем с последействием завершенной, то есть полностью аналогичной конечномерным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, теории позиционных дифференциальных игр Н. Н. Красовского–А. И. Субботина [1]. Теория строится на основе разработанного автором [2] подхода, позволяющего конструктивно переносить на системы с последействием все результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1], используя понятия, обозначения и конструкции $i$-гладкого анализа [3]. В рамках такого подхода, в случае исчезновения запаздывания, все получаемые результаты и формулы данной статьи преобразуются в соответствующие результаты и формулы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. В данной статье представлены обобщения §§ 29–34 книги [1]. В формулировках утверждений в скобках приводится нумерация соответствующих утверждений в [1]. Ссылки на формулы и утверждения статьи [2] обозначаются префиксом I.

В данной статье изучается классическая задача [1] теории позиционных дифференциальных игр. Система находится под управляющими воздействиями *первого* и *второго игроков*, зависит от собственного последействия на полуинтервале длины $\tau > 0$, а возможные *движения* ее *фазового вектора* определяются [1, 2] некоторым функционально-дифференциальным уравнением. Согласно [1, 2], через $x[t]$ будем обозначать *конструктивные* движения, получаемые предельным переходом от л о м а н ы х Э й л е р а, а через $x(t)$ — *обобщенные* движения, являющиеся решением соответствующего изучаемой системе уравнения в к о н т и н г е н ц и я х. Рассматриваемая задача состоит в нахождении такого позиционного способа управления первого игрока, который при любых возможных действиях второго игрока обеспечивал бы встречу $n$-мерного фазового вектора $x[t]$ с замкнутым множеством достижимости $M_c \subset [t_0, \vartheta] \times \mathrm{R}^n$ в момент времени $t = \sigma \leqslant \vartheta$, сохраняя *состояние* $\{t, x[t]\}$, начиная с начального момента времени $t = t_0$, в замкнутой области допустимости $N_c \subset [t_0, \vartheta] \times \mathrm{R}^n$, причем $\{t, x[t]\} \notin M_c$ при $t_0 \leqslant t < \sigma$. В частности, нас будут особенно интересовать случаи, когда множество $M_c$ будет обрываться на гиперплоскости $M_c(\vartheta) = [\{t, x\} \in M_c, t = \vartheta]$, являющейся сечением этого множества $M_c$ при $t = \vartheta$, то есть когда это множество $M_c$ будет лежать целиком в области $t \leqslant \vartheta$.

Сформулируем используемые в статье понятия $i$-гладкого анализа [3].

**Определение 0.1.** $Q[-\tau, 0]$ — пространство $n$-мерных функций, определенных на $[-\tau, 0]$ и имеющих не более конечного числа точек разрыва первого рода, в которых они непрерывны справа. $Q[-\tau, 0)$ — сужение пространства $Q[-\tau, 0]$ на полуинтервал $[-\tau, 0)$. $H = \mathrm{R}^n \times Q[-\tau, 0)$ — пространство с элементами $h = \{h_x, h_y\}$, $h_x \in \mathrm{R}^n$ и $h_y \in Q[-\tau, 0)$, и нормой

$$\|h\|_H = \max\{\|h_x\|, \sup_{s\in[-\tau,0)} \|h_y(s)\|\}.$$

Обозначение $h$ будем использовать для произвольного элемента пространства $H$, а, при рассмотрении фазового вектора $x$ или другой функции из пространства $Q[t-\tau, t]$, через $x_t = \{x[t],\, x[t+s]\big|_{s\in[-\tau,0)}\}$ будем обозначать элемент пространства $H$, состоящий из значения функции $x$ в точке $t$ и ее последействия на полуинтервале $[t-\tau, t)$.

**Определение 0.2.** Для $h \in H$ и $\Delta > 0$ через $E_\Delta[h]$ обозначим множество всех функций $Y\colon [-\tau, \Delta] \to \mathrm{R}^n$ таких, что

(1) $Y(0) = h_x$,
(2) $Y(s) = h_y(s)$ при $-\tau \leqslant s < 0$,
(3) $Y(s)$ непрерывна на $[0, \Delta]$.

Обобщая теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, будем рассматривать функционалы, заданные на пространстве $\mathrm{R} \times H$:

$$F[t, h]\colon \mathrm{R} \times H \to \mathrm{R}. \tag{0.1}$$

**Определение 0.3.** Для функционала (0.1) и фиксированных $t \in \mathrm{R}$, $h \in H$, а также фиксированной функции $Y \in E[h]$, где $E[h] = \bigcup\limits_{\Delta>0} E_\Delta[h]$, построим функцию

$$\hat{\psi}_Y(\xi) = F[t, h_x, Y(\xi+s)\big|_{s\in[-\tau,0)}], \tag{0.2}$$

определенную при $\xi \in [0, \Delta)$, причем интервал $[0, \Delta)$ зависит от выбора функции $Y$. Функционал (0.1) имеет в точке $\{t, h\} \in \mathrm{R} \times H$ *инвариантную производную* $\frac{\partial F}{\partial i}$, если для любой функции $Y \in E[h]$ функция (0.2) имеет в нуле конечную правую производную $\frac{\partial\hat{\psi}_Y}{\partial\xi}\Big|_{\xi=+0}$ инвариантную относительно $Y \in E[h]$, то есть значение правой производной $\frac{\partial\hat{\psi}_Y}{\partial\xi}$ в нуле одно для всех $Y \in E[h]$.

**Определение 0.4.** Функционал (0.1) *равномерно непрерывен по сдвигу*, если найдется такое $\Delta > 0$, что при любых $t \in \mathrm{R}$, $h \in H$ и $Y \in E_\Delta[h]$ функция $\phi_Y(\xi) = F(\xi, Y_{\xi-t})$ непрерывна при $\xi \in [t, t+\Delta]$.

## § 1. Программное поглощение (содержательный аспект)

В этом разделе мы опишем программную конструкцию, которая явится вспомогательным средством для решения позиционных игровых задач сближения–уклонения. Имея в виду материал предыдущей статьи [2], поставим сначала задачу подобрать такую программную конструкцию, которая позволила бы вычислять функционал $\varepsilon(t, h)$ из следующей теоремы, доказательство которой полностью соответствует доказательству соответствующей теоремы в [1] с дополнительным применением конструкций инвариантной производной.

**Теорема 1.1** (Теорема 23.1). *Предположим, что удалось найти непрерывный функционал $\varepsilon(t, h)$, удовлетворяющий условиям*

$$\varepsilon(t, h) > c \ \textit{при} \ \{t, h_x\} \notin N_c$$

*и*

$$\varepsilon(\vartheta, h) > c \ \textit{при} \ \{\vartheta, h_x\} \notin M_c,$$

*и имеющий непрерывные частные производные* $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$, $\frac{\partial\varepsilon}{\partial h_{xj}}$ $(j = 1, \ldots, n)$ *и непрерывные инвариантные производные* $\frac{\partial\varepsilon}{\partial i_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ *в области*

$$t < \vartheta, \ \ c < \varepsilon(t, h) < c + \beta \ \ (\beta - \textit{постоянная}), \tag{1.1}$$

*и такой, что в области* (1.1) *выполняется неравенство*

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left( \left[ \frac{\partial\varepsilon}{\partial h_x} \right]' f(t, h, u, v) + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial i} \right) \leqslant 0.$$

*Пусть далее стратегия* $U_c^0 \div u_c^0(t, h)$ *задана условием*

$$\max_{v \in Q} \left( \left[ \frac{\partial\varepsilon}{\partial h_x} \right]' f(t, h, u_c^0(t, h), v) \right) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left( \left[ \frac{\partial\varepsilon}{\partial h_x} \right]' f(t, h, u, v) \right) \tag{1.2}$$

*в области* (1.1)*; вне этой области* $u_c^0(t, h)$ *может принимать любые значения.*

*Тогда, если* $\varepsilon(t_0, h_0) \leqslant c$*, то для всякого движения* $x[t] = x[t, t_0, h_0, U_c^0]$ *выполняется условие встречи*

$$\{\sigma, x(\sigma)\} \in M_c, \ \ \{t, x(t)\} \in N_c \ \textit{при} \ t_0 \leqslant t \leqslant \sigma$$

*при* $\sigma \leqslant \vartheta$*.*

Тем самым мы получили бы средство строить стратегию $U_c^0 \div u_c^0(t, h)$, определяемую из условий минимакса (1.2) и разрешающую задачу сближения I.4.1. Чтобы подойти к задаче подбора такой конструкции, отметим прежде всего, что стратегия $U_c^0 \div u_c^0(t, h)$, построенная по функционалу $\varepsilon(t, h)$ в соответствии с условиями теоремы 1.1, гарантирует, между прочим, встречу всех движений $x[t, t_0, h_0, U_c^0]$ с $M_c$ даже так, что выполняется условие

$$\{\vartheta, x[\vartheta]\} \in M_c, \tag{1.3}$$

хотя значение $t = \vartheta$ может и не быть первым моментом $\sigma$ встречи с $M_c$ для того или иного движения $x[t, t_0, h_0, U_c^0]$. Сосредоточим поэтому внимание пока на таком решении задачи I.4.1, которое гарантирует во всяком случае встречу (1.3) в зафиксированный заранее момент времени $t = \vartheta$. При этом будем всюду ниже в этом разделе полагать, что множество $N_c$ совпадает со всем пространством $\{t, h_x\}$. Собственно говоря, способ построения $u$-стабильного моста $W_u^\vartheta$, годного для решения задачи I.4.1 о сближении $x[t]$ с $M_c$ в момент $t = \vartheta$, был уже описан в разделе I.11. Для этого, согласно материалу из раздела I.11, достаточно выбросить из полупространства $t \leqslant \vartheta$ все те позиции $\{t_*, h_*\}$, для каждой из которых, как для начальной, разрешима задача I.4.2 об уклонении от сечения $M_c(\vartheta)$ множества $M_c$. Те позиции $\{t, h\}$, которые останутся в полупространстве $t \leqslant \vartheta$, и составят максимальный $u$-стабильный мост $W_u^\vartheta$, ведущий на $M_c(\vartheta)$. Стало быть, позиция $\{t_*, h_*\}$ $(t_* \leqslant \vartheta)$ будет лежать на максимальном мосту $W_u^\vartheta$ тогда и только тогда, когда при всяком выборе стратегии $V \div v(t, h)$ среди движений $x[t] = x[t, t_0, h_0, V]$ найдется по крайней мере одно движение $x[t]$, удовлетворяющее включению $x[\vartheta] \in M_c(\vartheta)$. Иначе говоря, $\{t_*, h_*\} \in W_u^\vartheta$ тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon_0^*(t_*, h_*, \vartheta) = c, \tag{1.4}$$

где

$$\varepsilon_0^*(t_*, h_*, \vartheta) = \max_V \min_{x[\cdot]} \rho_\vartheta(x[\vartheta, t_*, h_*, V], M_c) + c. \tag{1.5}$$

Здесь и в других аналогичных случаях символ $\rho_\vartheta(x, M_c)$ обозначает евклидово расстояние от точки $\{\vartheta, x\} \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}^n$ до сечения $M_c(\vartheta)$ множества $M_c$. Существование решения $V^0 \div v^0(t,h)$ и $x^0[t]$ задачи (1.5) для всякой позиции $\{t_*, h_*\}$ $(t_* \leqslant \vartheta)$ было установлено в [2] при выборе функционала $\varphi(x[t], t_* \leqslant t \leqslant \vartheta) = \sigma(x[\vartheta]) = \rho_\vartheta(x[\vartheta], M_c) + c$.

Итак, максимальный $u$-стабильный мост $W_u^\vartheta$, гарантированный леммой I.11.1, в данном случае есть множество позиций $\{t_*, h_*\}$ $(t_* \leqslant \vartheta)$, для которых выполняется условие (1.4). Более того, если окажется, что функционал $\varepsilon_0^*(t,h,\vartheta)$ в области $c < \varepsilon_0^*(t,h,\vartheta) < c + \beta$, $t < \vartheta$, является функционалом инвариантно дифференцируемым, то он будет удовлетворять всем условиям теоремы 1.1. Таким образом, мы как будто наметили способ построения функционала $\varepsilon(t,h)$ из теоремы 1.1 в виде решения $\varepsilon_0^*(t,h,\vartheta)$ задачи (1.5) для всякой позиции $\{t,h\} = \{t_*, h_*\}$. Однако на самом деле мы не получили, очевидно, чего-либо нового, просто повторив изложенное в разделе I.11, правда, для специфического случая, когда множество $N_c$ совпадает со всем пространством $\{t, h_x\}$, а множество $M_c$ совпадает с его сечением $M_c(\vartheta)$. Найти функционал $\varepsilon_0^*(t,h,\vartheta)$ прямым решением задачи (1.5) в нетривиальных случаях трудно, ибо это решение в принципе будет требовать перебора всех позиционных стратегий $V$, отождествляемых каждая с каким либо функционалом $v(t,h)$, стесненным только условием $v(t,h) \in Q$.

Попробуем выйти из положения, подменив задачу (1.5) другой задачей, менее трудной в принципе. При отыскании величины $\varepsilon_0^*(t_*, h_*, \vartheta)$ по смыслу задачи (1.5), как сказано выше, надлежит перебрать все возможные функционалы $v(t,h) \in Q$ от двух переменных $t$ и $h$. Это и делает задачу весьма трудной. Сузим, однако, класс стратегий $V$, оставив лишь такие стратегии $V \div v(t)$, которые задаются функциями $v(t) \in Q$, зависящими только от одной переменной $t$. Такие стратегии $V$ будем именовать *программами*, а порождаемые ими движения $x[t]$ — *программными движениями*. Тогда вместо позиционной задачи (1.5) мы можем рассмотреть аналогичную ей программную задачу: найти величину

$$\varepsilon_0(t_*, h_*, \vartheta) = \sup_V \min_{x[\cdot]} \rho_\vartheta(x[\vartheta, t_*, h_*, V], M_c) + c, \tag{1.6}$$

где верхняя грань берется уже только по всем с т р а т е г и я м – п р о г р а м м а м $V \div v(t)$. (Мы не пишем в условии (1.6) символ $\max_V$ вместо символа $\sup_V$ из осторожности, так как априори неизвестно, действительно ли достигается такой максимум на какой-либо программе $V^0 \div v^0(t)$.)

Сравним решения $\varepsilon_0^*$ и $\varepsilon_0$ задач (1.5) и (1.6). Ясно, что $\varepsilon_0(t,h,\vartheta) \leqslant \varepsilon_0^*(t,h,\vartheta)$, так как в (1.5) максимум вычисляется на более широком классе стратегий $V$. Стало быть, максимальный $u$-стабильный мост $W_u^\vartheta$, заданный условием $\varepsilon_0^*(t,h,\vartheta) = c$ $(t \leqslant \vartheta)$, содержится во множестве $W^{(\vartheta)}$, которое мы определим условием $\varepsilon_0(t,h,\vartheta) = c$ $(t \leqslant \vartheta)$. Очевидно, это множество $W^{(\vartheta)} = [\{t,h\} \colon t \leqslant \vartheta,\ \varepsilon_0(t,h,\vartheta) = c]$ обладает следующим свойством. Позиция $\{t_*, h_*\} \in W^{(\vartheta)}$ тогда и только тогда, когда при всяком выборе программы $V \div v(t) \in Q$ найдется по крайней мере одно движение $x[t, t_*, h_*, V]$, которое встретится с $M_c$ при $t = \vartheta$. В таком случае будем говорить, что процесс (I.1.1) *программно поглощает* $M_c$ из позиции $\{t_*, h_*\}$ в момент $\vartheta$. Само множество $W^{(\vartheta)}$ будем именовать *множеством программного поглощения* цели $M_c$ в момент $\vartheta$.

Итак, $W_u^\vartheta \subset W^{(\vartheta)}$. Если при этом окажется, что множества $W^{(\vartheta)}$ действительно шире, чем $W_u^\vartheta$ (а такие случаи возможны), то множество $W^{(\vartheta)}$ не будет нужным нам $u$-стабильным мостом, и функционал $\varepsilon_0(t,h,\vartheta)$ не удается использовать в качестве нужного нам функционала $\varepsilon(t,h)$, удовлетворяющего условиям теоремы 1.1. Однако нередки случаи, когда на самом деле $W_u^\vartheta = W^{(\vartheta)}$, и функционал $\varepsilon_0(t,h,\vartheta)$ при $c < \varepsilon_0 < c + \beta$ оказывается даже функционалом инвариантно дифференцируемым. Тогда вспомогательная задача (1.6) на программный максимин, которую, вообще говоря, легче решать, чем аналогичную позиционную задачу (1.5), может оказаться хорошим подспорьем для решения исходной позиционной задачи I.4.1 о сближении с множеством $M_c$ в момент $\vartheta$. Таким образом, представляют интерес те достаточные условия, при выполнении которых множество $W^{(\vartheta)} = [\{t,h\}\colon t \leqslant \vartheta,\ \varepsilon_0(t,h,\vartheta) = c]$ будет совпадать с максимальным $u$-стабильным мостом $W_u^\vartheta = [\{t,h\}\colon t \leqslant \vartheta,\ \varepsilon_0^*(t,h,\vartheta) = c]$, ведущим на $M_c(\vartheta)$. Изучению таких условий будет посвящена следующая статья. Однако исследование задачи (1.6), сформулированной для движений $x[t,t_*,h_*,V]$, порожденных стратегиями–программами $V \div v(t) \in Q$, по ряду формальных причин оказывается не очень удобным. Поэтому стратегии–программы $V \div v(t)$ и программные движения $x[t] = x[t,t_*,h_*,V]$, порожденные ими, мы заменим ниже некоторыми более формально определяемыми программами $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ и порождаемыми ими программными движениями $x(t,t_*,h_*,\eta_{(\cdot)})$, $\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ (где $\eta_{(\cdot)} = [\eta_t\colon t_* \leqslant t \leqslant \vartheta]$), которые будут иметь тот же самый содержательный смысл, однако выраженный в более завуалированной форме.

Читатель, которого не заинтересует переход от конструктивных движений $x[t,t_*,h_*, V \div v(t)]$ и стратегий-программ $V \div v(t)$ к программным движениям $x(t,t_*,h_*,\eta_{(\cdot)})$ и программам $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ из раздела 2, может в дальнейших разделах подменить эти программные движения $x(t,t_*,h_*,\eta_{(\cdot)})$ обычными конструктивными движениями $x[t,t_*,h_*,V \div v(t)]$. Наиболее существенные изменения, которые требуются при такой подмене, мы отметим по ходу дела.

## § 2. Программные управления и движения

В этом разделе мы определим программные управления и программные движения. Пусть фазовый вектор системы $x[t]$, как и всюду в этой статье, изменяется в соответствии с уравнением (I.1.1), и управления $u$ и $v$ стеснены соответствующими ограничениями. Функционал $f(t,h,u,v)$ в правой части уравнения движения (I.1.1) в этой статье удобно предполагать имеющим непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ и непрерывные инвариантные производные $\frac{\partial f}{\partial i_j}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$.

Рассмотрим вероятностные меры [1] $\eta_t(du,dv)$, зависящие от параметра $t \in [t_0,\vartheta)$ и определенные при всяком значении $t$ на множестве $P \times Q$ из векторного пространства $\{u\} \times \{v\}$. Будем полагать, что рассматриваемые ниже функции $\eta = \eta_t$, значениями которых являются вероятностные меры $\eta_t(du,dv)$, удовлетворяют следующему условию слабой измеримости по $t$. При всяком выборе непрерывной функции $\alpha(u,v)$ функция

$$\beta(t) = \int\limits_P \int\limits_Q \alpha(u,v)\eta_t(du,dv)$$

должна быть *измеримой по Лебегу* [1] функцией на полуинтервале $[t_0,\vartheta)$. Меры $\eta_t(du,dv)$ можно подменить функциями распределения $F_t(u,v)$ [1], зависящими от параметра $t \in [t_0,\vartheta)$ и определенными при всяком $t$ для векторных случайных величин $\{u,v\}$, значения которых с вероятностью единица сосредоточены на множестве $P \times Q$. При этом надлежит рассматривать такие функции распределения $F = F_t$, которые удовлетворяют следующему условию слабой измеримости по $t$. При всяком выборе непрерывной функции $\alpha(u,v)$ функция

$$\beta(t) = \iint\limits_{\{u,v\}} \alpha(u,v)\, dF_t(u,v)$$

должна быть измеримой по Лебегу функцией на полуинтервале $[t_0,\vartheta)$.

Рассмотрим также функции $\nu = \nu(t)$ $(t_0 \leqslant t < \vartheta)$, значениями которых являются вероятностные меры $\nu_t(dv)$, определенные на множестве $Q$ из векторного пространства $\{v\}$.

Полагаем, что функции $\nu = \nu_t$ удовлетворяют следующему условию слабой измеримости по $t$. При всяком выборе непрерывной функции $\alpha(v)$ функция

$$\beta(t) = \int\limits_Q \alpha(v)\nu_t(dv)$$

должна быть измеримой по Лебегу функцией на полуинтервале $[t_0, \vartheta)$. Иначе, можно рассматривать функции распределения $F_t(v)$, определенные при всяком $t$ для векторных случайных величин $v$, значения которых с вероятностью единица сосредоточены на множестве $Q$. При этом функции $F = F_t$ должны удовлетворять следующему условию слабой измеримости. При всяком выборе непрерывной функции $\alpha(v)$ функция

$$\beta(t) = \int\limits_{\{v\}} \alpha(v)\, dF_t(v)$$

должна быть измеримой функцией на полуинтервале $[t_0, \vartheta)$.

Имея какую-нибудь слабо измеримую функцию $\eta = \eta_t$, мы можем построить меру на $[t_0, \vartheta) \times P \times Q$:

$$\eta^*(dt, du, dv) = \eta_t(du, dv)\, dt, \tag{2.1}$$

где эта мера — произведение $\eta_t\, dt$ — понимается в соответствии с известным определением [1]. На языке функций распределения $F$: имея какую-нибудь слабо измеримую функцию $F = F_t$, можно построить функцию

$$F^*(t, u, v) = \int\limits_{t_0}^{t} F_\xi(u, v)\, d\xi.$$

Напомним [1], что меры $\eta^*$ (2.1) образуют л и н е й н ы е ф у н к ц и о н а л ы [1]

$$\beta_{\eta^*}(\alpha) = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \int\limits_P \int\limits_Q \alpha(t, u, v)\eta_t(du, dv)\, dt,$$

определенные на пространстве $\{\alpha(t, u, v)\}$ непрерывных функций $\alpha(t, u, v)$ ($t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $u \in P$, $v \in Q$); или, на языке функций распределения,

$$\beta_{F^*}(\alpha) = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \iint\limits_{\{u,v\}} \alpha(t, u, v)\, dF^*(t, u, v).$$

Всюду в дальнейшем под *слабой сходимостью* рассматриваемых функций $\eta = \eta_t$ ($t_0 \leqslant t < \vartheta$) (или функций $F = F_t$ ($t_0 \leqslant t < \vartheta$)) будем понимать с л а б у ю с х о д и м о с т ь [1] в пространстве соответствующих функционалов $\beta_\eta(\alpha)$ ($\beta_F(\alpha)$). Стало быть, будем говорить, что последовательность $\eta^{(k)} = \eta_t^{(k)}$ ($t_0 \leqslant t < \vartheta$, $k = 1, 2, \ldots$) (последовательность $F^{(k)} = F_t^{(k)}$ ($t_0 \leqslant t < \vartheta$, $k = 1, 2, \ldots$)) при $k \to \infty$ слабо сходится к функции $\eta^0 = \eta_t^0$ ($t_0 \leqslant t < \vartheta$) (к функции $F^0 = F_t^0$ ($t_0 \leqslant t < \vartheta$)) тогда и только тогда, когда при всяком выборе непрерывной функции $\alpha = \alpha(t, u, v)$ будет выполняться предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{\eta^{(k)}}(\alpha) = \beta_{\eta^0}(\alpha) \qquad \left(\lim_{k\to\infty} \beta_{F^{(k)}}(\alpha) = \beta_{F^0}(\alpha)\right).$$

Из известных свойств вероятностных мер [1] вытекает, что множество всех возможных мер $\eta^*(dt,du,dv)$ вида $\eta_t(du,dv)\,dt$ (2.1) является множеством слабо замкнутым и слабо компактным в себе [1]. Это означает, что из всякой последовательности $\{\eta^{(k)} = \eta_t^{(k)}\ (t_0 \leqslant t < \vartheta)\}$ $(k = 1,2,\ldots)$ можно выбрать подпоследовательность $\{\eta^{(k_j)} = \eta_t^{(k_j)}\ (t_0 \leqslant t < \vartheta)\}$ $(j = 1,2,\ldots)$, которая будет сходиться слабо (в определенном выше смысле) к функции $\eta^0 = \eta_t^0\ (t_0 \leqslant t < \vartheta)$.

Всякую слабо измеримую функцию $\eta = \eta_t\ (t_0 \leqslant t < \vartheta)$, значениями которой являются вероятностные меры $\eta_t(du,dv)$ на $P\times Q$, будем именовать *программным управлением* $\eta = \eta_t$ на полуинтервале $[t_0,\vartheta)$.

*Программным движением* $x(t,t_*,h_*,\eta_{(\cdot)})$ $(t_0 \leqslant t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ на отрезке $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, порожденным программным управлением $\eta = \eta_t$ из позиции $\{t_*,h_*\}$, будем называть решение функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x} = \int\limits_P \int\limits_Q f(t,h,u,v)\eta_t(du,dv), \tag{2.2}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x_{t_*} = h_*. \tag{2.3}$$

Будем полагать подынтегральный функционал в правой части функционально-дифференциального уравнения (2.2) при всех тех значениях его аргументов, которые только могут встретиться, непрерывным, локально липшицевым по $h$, равномерно непрерывным по сдвигу и удовлетворяющим условию линейного роста

$$\|f(t,h,u,v)\| \leqslant \kappa\,(1+\|h\|_H), \quad \kappa = \text{const}. \tag{2.4}$$

Стандартными в теории функционально-дифференциальных уравнений методами [3] доказывается, что при сформулированных условиях при всяком выборе начальной позиции $\{t_*,h_*\}$ и программного управления $\eta_t$ на полуинтервале $[t_*,\vartheta)$ существует единственное программное движение $x(t,t_*,h_*,\eta_{(\cdot)})$ являющееся, стало быть, решением $x(t)$ уравнения (2.2). Это движение $x(t)$ является абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяющей начальному условию (2.3) и равенству (2.2) при почти всех значениях $t$ из полуинтервала $[t_*,\vartheta)$.

На языке функций распределения $F_t(u,v)$ программным движением $x(t,t_*,h_*,F)$ следует называть решение функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x} = \int\limits_P \int\limits_Q f(t,h,u,v)\,dF_t(du,dv)$$

снова, разумеется, при начальном условии (2.3).

Пусть, далее, $\nu = \nu_t\ (t_0 \leqslant t < \vartheta)$ — некоторая зафиксированная функция, слабо измеримая по $t$ в том смысле, как это определено выше в этом разделе, значениями которой являются вероятностные меры $\nu_t(dv)$ на Q. Будем называть *элементарной программой* $\{\eta_{(\cdot)},[t_*,\vartheta);\,\nu_{(\cdot)}\}_\Pi$ второго игрока на полуинтервале $[t_*,\vartheta)$ множество всех программных управлений $\eta = \eta_t$, которые при почти всех значениях $t$ из полуинтервала $t_* \leqslant t < \vartheta$ удовлетворяют равенству

$$\int\limits_P \eta_t(du,dv) = \eta_t(P,dv) = \nu_t(dv).$$

Из известных свойств мер $\eta_t \cdot dt$ и $\nu_t \cdot dt$ вытекает, что всякая элементарная программа $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\, \nu_{(\cdot)}\}_\Pi$ является выпуклым, слабо замкнутым и слабо компактным в себе множеством программных управлений $\eta = \eta_t$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$.

Слабое замыкание какого-либо объединения элементарных программ будем называть *программой* второго игрока и такую программу для полуинтервала $[t_*, \vartheta)$ будем обозначать символом $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi$ или короче — $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$. Иногда, если надо будет подчеркнуть, что программа $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ имеет отношение к какому-нибудь объекту, например, к начальной позиции $\{t_*, h_*\}$, символы этого объекта также будем включать в число аргументов, характеризующих программу, например: $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\, \nu_{(\cdot)};\, h_*\}_\Pi$.

Все данные здесь определения имеют пока совершенно формальный характер. Их отношение к рассматриваемым нами позиционным игровым задачам выяснится позднее.

Подчеркнем также, что введенным формальным понятиям программных управлений $\eta = \eta_t$ и движений $x(t)$ не придается сейчас никакого вероятностного смысла, хотя в их конструкциях и используются вероятностные меры $\eta_t(du, dv)$.

## § 3. Свойства программных движений

В этом разделе мы обсудим некоторые свойства программных движений $x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)})$ и совокупностей $\{x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)})\}$ таких движений, которые порождаются всевозможными программными управлениями $\eta_t$ из некоторой программы $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi$ второго игрока. При этом будем предполагать правую часть $f$ уравнения (I.1.1) функционалом непрерывно дифференцируемым по конечномерной составляющей и имеющим непрерывную инвариантную производную по функциональной составляющей и, как всегда, будем предполагать выполненными условия, сформулированные в разделе 2. Некоторые утверждения в этом разделе мы приведем без подробного доказательства, так как они устанавливаются стандартными в теории функционально-дифференциальных уравнений рассуждениями с добавлением лишь технических деталей, отвечающих используемому здесь аппарату обобщенных управляющих функций $\eta = \eta_t$, изображаемых мерами $\eta_t(du, dv)$.

Прежде всего надлежит заметить, что программные движения $x(t) = x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)})$ $(t_0 \leqslant t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, которые при фиксированных $\{t_*, h_*\}$ и $\eta = \eta_t$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ являются абсолютно непрерывными функциями от переменной $t$ — решениями уравнения (2.2), в то же время изменяются непрерывно при изменении начальной позиции $\{t_*, h_*\}$ или программного управления $\eta = \eta_t$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$. Именно, справедливы следующие утверждения.

**Лемма 3.1** (Лемма 32.1). *Каковы бы ни были значения $\varepsilon > 0$, отрезок $[t_0, \vartheta]$ и ограниченная область $G$ пространства $\{h\}$, можно указать число $\delta > 0$ такое, что для любых двух программных движений $x^{(1)}(t) = x(t, t_*^{(1)}, h_*^{(1)}, \eta_{(\cdot)})$ и $x^{(2)}(t) = x(t, t_*^{(2)}, h_*^{(2)}, \eta_{(\cdot)})$ будет выполнено неравенство*

$$\|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)\| \leqslant \varepsilon \tag{3.1}$$

*при всех $t$ из отрезка $\max(t_*^{(1)}, t_*^{(2)}) \leqslant t \leqslant \vartheta$, если только $t_*^{(1)} \in [t_0, \vartheta]$, $t_*^{(2)} \in [t_0, \vartheta]$, $h_*^{(1)} \in G$, $h_*^{(2)} \in G$ и*

$$|t_*^{(1)} - t_*^{(2)}| \leqslant \delta,\ \|h_*^{(1)} - h_*^{(2)}\|_H \leqslant \delta. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале рассмотрим случай, когда $t_* = t_*^{(1)} = t_*^{(2)}$. Функция в правой части функционально-дифференциального уравнения (2.2) локально липшицева с соответствующей константой Липшица $L$, тогда на отрезке $[t_0, \vartheta]$ выполнено

$$\left\|\frac{d(x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t))}{dt}\right\| \leqslant L \cdot \max_{\xi \in [t-\tau, t]} \|x^{(1)}(\xi) - x^{(2)}(\xi)\|, \tag{3.3}$$

в силу чего справедливо

$$\max_{\xi\in[t_*,t]}\left\|\frac{d(x^{(1)}(\xi)-x^{(2)}(\xi))}{d\xi}\right\| \leqslant L\cdot\max\left\{\|h_*^{(1)}-h_*^{(2)}\|_H,\ \max_{\xi\in[t_*,t]}\|x^{(1)}(\xi)-x^{(2)}(\xi)\|\right\}\leqslant$$
$$\leqslant L\cdot\max_{\xi\in[t_*,t]}\|x^{(1)}(\xi)-x^{(2)}(\xi)\|+L\cdot\|h_*^{(1)}-h_*^{(2)}\|_H. \quad (3.4)$$

Оценим интеграл от левой части неравенства (3.4) снизу

$$\int_{t_*}^{t}\max_{\xi\in[t_*,\zeta]}\left\|\frac{d(x^{(1)}(\xi)-x^{(2)}(\xi))}{d\xi}\right\|d\zeta \geqslant \max_{\xi\in[t_*,t]}\int_{t_*}^{\xi}\left\|\frac{d(x^{(1)}(\zeta)-x^{(2)}(\zeta))}{d\zeta}\right\|d\zeta\geqslant$$
$$\geqslant \max_{\xi\in[t_*,t]}\|x^{(1)}(\xi)-x^{(2)}(\xi)\|-\|h_{*x}^{(1)}-h_{*x}^{(2)}\|. \quad (3.5)$$

В силу неравенств (3.4) и (3.5) выполнено

$$\max_{\xi\in[t_*,t]}\|x^{(1)}(\xi)-x^{(2)}(\xi)\|\leqslant L\cdot\int_{t_*}^{t}\max_{\xi\in[t_*,\zeta]}\|x^{(1)}(\xi)-x^{(2)}(\xi)\|d\zeta+$$
$$+L|\vartheta-t_0|\|h_*^{(1)}-h_*^{(2)}\|_H+\|h_{*x}^{(1)}-h_{*x}^{(2)}\|.$$

Воспользуемся интегральным неравенством Гронуолла–Беллмана, тогда

$$\max_{\xi\in[t_*,t]}\|x^{(1)}(\xi)-x^{(2)}(\xi)\|\leqslant\left(L|\vartheta-t_0|\|h_*^{(1)}-h_*^{(2)}\|_H+\|h_{*x}^{(1)}-h_{*x}^{(2)}\|\right)e^{L|\vartheta-t_0|}$$

и, выбирая

$$\delta\leqslant\frac{\epsilon}{L|\vartheta-t_0|+1}e^{-L|\vartheta-t_0|}, \quad (3.6)$$

имеем

$$\|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)\|\leqslant\varepsilon. \quad (3.7)$$

Далее, в лемме 3.2, мы убедимся, что программные движения равномерно ограничены, в том числе, если их начальные условия различны, но лежат в ограниченой области пространства $\{h\}$, тогда константа Липшица $L$ в неравенстве (3.3) может быть выбрана независимо, какими бы ни были программные движения $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$. При таком выборе константы Липшица $L$ в неравенстве (3.3) правая часть неравенства (3.6) является положительной постоянной, не зависящей от рассматриваемых программных движений $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$, следовательно, может быть выбрана постоянная $\delta>0$, удовлетворяющая неравенству (3.6), такая, что неравенство (3.7) будет выполнено при любом выборе программных движений $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$, удовлетворяющих условиям леммы.

Справедливость леммы для случая $t_*^{(1)}<t_*^{(2)}$ следует из того, что, в силу непрерывности решения функционально-дифференциального уравнения (2.2), каково бы ни было $\delta>0$, можно указать число $\gamma>0$ такое, что

$$\max_{\xi\in(t_*^{(1)},t_*^{(2)}]}\|x^{(1)}(t_*^{(1)})-x^{(1)}(\xi)\|\leqslant\frac{\delta}{2},$$

если только $|t_*^{(1)}-t_*^{(2)}|\leqslant\gamma$, что, в свою очередь, при условии $\|h_*^{(1)}-h_*^{(2)}\|_H\leqslant\frac{\delta}{2}$, приводит к

$$\max_{\xi\in[t_*^{(2)}-\tau,t_*^{(2)}]}\|x^{(1)}(\xi)-x^{(2)}(\xi)\|\leqslant\delta,$$

то есть к выполнению условий доказанного выше в начальной точке $t_*=t_*^{(2)}$. □

**Лемма 3.2** (Лемма 32.2). *Каковы бы ни были отрезок $[t_0,\vartheta]$, ограниченная область $G$ пространства $\{h\}$, программное управление $\eta=\eta^0_t$ $(t_0\leqslant t<\vartheta)$ и сходящаяся к ней слабо последовательность $\{\eta^{(k)}_{(\cdot)}\}$ $(k=1,2,\ldots)$ программных управлений $\eta^{(k)}=\eta^{(k)}_t$ $(t_0\leqslant t<\vartheta)$, для всякого значения $\varepsilon>0$ найдется число $k(\varepsilon)$ такое, что будет выполнено неравенство*

$$\|x(t,t_*,h_*,\eta^{(k)}_{(\cdot)})-x(t,t_*,h_*,\eta^0_{(\cdot)})\|\leqslant\varepsilon$$

*для всех $t$ из отрезка $t_*\leqslant t\leqslant\vartheta$, если только $t_*\in[t_0,\vartheta]$, $h_*\in G$ и выполнено неравенство*

$$k\geqslant k(\varepsilon). \tag{3.8}$$

Доказательство. Подынтегральный функционал в правой части функционально-дифференциального уравнения (2.2) удовлетворяет условию линейного роста (2.4), тогда на отрезке $[t_*,\vartheta]$ выполнено

$$\begin{aligned}\|x(t,\eta_{(\cdot)})\|&\leqslant\|h_{*x}\|+\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_P\int\limits_Q\|f(\xi,h_\xi,u,v)\|\eta_\xi(du,dv)\,d\xi\leqslant\\&\leqslant\|h_{*x}\|+\kappa\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_P\int\limits_Q\eta_\xi(du,dv)\,d\xi+\kappa\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_P\int\limits_Q\|h_\xi\|_H\eta_\xi(du,dv)\,d\xi\leqslant\\&\leqslant\|h_{*x}\|+\kappa\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_P\int\limits_Q\eta_\xi(du,dv)\,d\xi+\kappa\int\limits_{t_*}^{t}\max_{\zeta\in[\xi-\tau,\xi]}\|x(\zeta,\eta_{(\cdot)})\|\int\limits_P\int\limits_Q\eta_\xi(du,dv)\,d\xi\leqslant\\&\leqslant\|h_{*x}\|+\kappa\,(1+\|h_*\|_H)\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_P\int\limits_Q\eta_\xi(du,dv)\,d\xi+\\&\qquad+\kappa\int\limits_{t_*}^{t}\max_{\zeta\in[t_*,\xi]}\|x(\zeta,\eta_{(\cdot)})\|\int\limits_P\int\limits_Q\eta_\xi(du,dv)\,d\xi.\end{aligned}\tag{3.9}$$

В силу неубывания функции в правой части неравенства (3.9) имеем

$$\begin{aligned}\max_{\zeta\in[t_*,t]}\|x(\zeta,\eta_{(\cdot)})\|&\leqslant\|h_{*x}\|+\kappa\,(1+\|h_*\|_H)\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\int\limits_P\int\limits_Q\eta_\xi(du,dv)\,d\xi+\\&\qquad+\kappa\int\limits_{t_*}^{t}\max_{\zeta\in[t_*,\xi]}\|x(\zeta,\eta_{(\cdot)})\|\int\limits_P\int\limits_Q\eta_\xi(du,dv)\,d\xi.\end{aligned}$$

Далее, полагая

$$A=\|h_{*x}\|+\kappa\,(1+\|h_*\|_H)\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\int\limits_P\int\limits_Q\eta_\xi(du,dv)\,d\xi \tag{3.10}$$

и

$$B=\kappa\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\int\limits_P\int\limits_Q\eta_\xi(du,dv)\,d\xi,$$

воспользуемся интегральным неравенством Гронуолла–Беллмана, тогда

$$\max_{\xi\in[t_*,t]} \|x(\xi,\eta_{(\cdot)})\| \leqslant Ae^B,$$

откуда следует, что программные движения равномерно ограничены, причем, в силу (3.10), константой, не зависящей от начальных условий $h_*$, если начальные условия $h_*$ лежат в ограниченной области пространства $\{h\}$.

Из вида функции в правой части функционально-дифференциального уравнения (2.2) также следует равномерная ограниченность соответствующих производных программных движений, тогда неравенство

$$\|x(t_1,\eta_{(\cdot)}) - x(t_2,\eta_{(\cdot)})\| \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} \|\dot{x}(\xi,\eta_{(\cdot)})\|\, d\xi \leqslant C|t_1 - t_2|,$$

с абсолютной постоянной $C$, означает равностепенную непрерывность соответствующих программных движений. Далее, по теореме Арцела, существует подпоследовательность $\{x(t,\eta_{(\cdot)}^{(k_m)})\}$, которая равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $\overline{x}(t)$. Докажем, что $\overline{x}(t) = x(t,\eta_{(\cdot)}^0)$. Имеем

$$\begin{aligned}\Bigg\|\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{P}\int\limits_{Q} f(t,h^{(k_m)},u,v)\eta_\xi^{(k_m)}(du,dv)\,d\xi - \int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{P}\int\limits_{Q} f(t,\overline{h},u,v)\eta_\xi^{0}(du,dv)\,d\xi\Bigg\| \leqslant \\ \leqslant \Bigg\|\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{P}\int\limits_{Q} [f(t,h^{(k_m)},u,v) - f(t,\overline{h},u,v)]\eta_\xi^{(k_m)}(du,dv)\,d\xi\Bigg\| + \\ + \Bigg\|\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{P}\int\limits_{Q} f(t,\overline{h},u,v)[\eta_\xi^{(k_m)}(du,dv) - \eta_\xi^{0}(du,dv)]\,d\xi\Bigg\|. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (3.11) стремится к нулю, так как выбранная подпоследовательность программных движений равномерно сходится к $\overline{x}(t)$. Стремление к нулю второго слагаемого в правой части неравенства (3.11) является следствием слабой сходимости последовательности программных управлений. Таким образом, переходя к пределу при $m \to \infty$ в уравнении

$$x(t,\eta_{(\cdot)}^{(k_m)}) = h_{*x} + \int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{P}\int\limits_{Q} f(t,h^{(k_m)},u,v)\eta_\xi^{(k_m)}(du,dv)d\xi,$$

получаем

$$\overline{x}(t) = h_{*x} + \int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{P}\int\limits_{Q} f(t,\overline{h},u,v)\eta_\xi^{0}(du,dv)\,d\xi. \tag{3.12}$$

Равенство (3.12) означает, что $\overline{x}(t)$ является решением задачи Коши для фукнционально-дифференциального уравнения (2.2), соотвествующим управлению $\eta_{(\cdot)}^0$. Учитывая единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения (2.2), рассуждением от противного доказывается, что вся последовательность $x(t,\eta_{(\cdot)}^{(k)})$ сходится к $\overline{x}(t)$ равномерно на $[t_*,\vartheta]$. □

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в лемме 3.1 утверждается оценка (3.1) — равномерная по $t_*$ и $h_*$ из соответствующей области $[t_0, \vartheta]$ и $G$.

Обсудим теперь свойства совокупности движений $\{x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)}), \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi\}$, порожденной какой-либо программой $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi$, в частности — свойства совокупности движений $\{x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)}), \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\ \nu_{(\cdot)}\}_\Pi\}$, порожденной какой-либо элементарной программой $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\ \nu_{(\cdot)}\}_\Pi$. Можно проверить, что при всяком выборе $\{t_*, h_*\}$, $[t_*, \vartheta)$ и программы $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi$ множество движений $\{x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)}), \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi\}$ составляет к о м п а к т н о е в с е б е в метрике пространства $C_{[t_*, \vartheta]}$ множество непрерывных функций $x[t]$ на отрезке $[t_*, \vartheta]$. Это утверждение вытекает из того обстоятельства, что программные движения $x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)})$ непрерывны в метрике $\|x(\cdot)\|_{[t_*, \vartheta]} = \max\limits_{t_* \leqslant t \leqslant \vartheta} \|x(t)\|$ пространства $C_{[t_*, \vartheta]}$ по отношению к непрерывному изменению $\eta = \eta_t$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$ в слабой топологии (см. лемму 3.2), и из слабой компактности в себе множества всех программных управлений $\eta = \eta_t$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$, составляющих программу. Далее, из лемм 3.1 и 3.2 вытекает следующее утверждение.

**Лемма 3.3** (Лемма 32.3). *Каковы бы ни были значение $\varepsilon > 0$, отрезок $[t_0, \vartheta]$ и ограниченная область $G$ пространства $\{h\}$, можно указать число $\delta > 0$ такое, что для любых двух совокупностей программных движений $\{x(t, t_*^{(1)}, h_*^{(1)}, \eta_{(\cdot)}), \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi\}$ и $\{x(t, t_*^{(2)}, h_*^{(2)}, \eta_{(\cdot)}), \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi\}$, порожденных одной и той же программой $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$, будет справедливо неравенство*

$$\rho(\{x(t, t_*^{(2)}, h_*^{(2)}, \eta_{(\cdot)}),\ \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi\},\ \{x(t, t_*^{(1)}, h_*^{(1)}, \eta_{(\cdot)}),\ \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi\}) < \varepsilon$$

*при всех $t$ из отрезка $\max(t_*^{(1)}, t_*^{(2)}) \leqslant t \leqslant \vartheta$, если только $t_*^{(1)} \in [t_0, \vartheta]$, $t_*^{(2)} \in [t_0, \vartheta]$, $h_*^{(1)} \in G$, $h_*^{(2)} \in G$ и выполнены неравенства* (3.2).

Здесь символ $\rho(\mathcal{X}^{(1)}, \mathcal{X}^{(2)})$ означает х а у с д о р ф о в о р а с с т о я н и е между множествами $\mathcal{X}^{(1)}$ и $\mathcal{X}^{(2)}$, которое вычисляется по формуле

$$\rho(\mathcal{X}^{(1)}, \mathcal{X}^{(2)}) = \max[\sup_{x^{(1)} \in \mathcal{X}^{(1)}} \rho(x^{(1)}, \mathcal{X}^{(2)}),\ \sup_{x^{(2)} \in \mathcal{X}^{(2)}} \rho(x^{(2)}, \mathcal{X}^{(1)})], \tag{3.13}$$

причем $\rho(x, \mathcal{X})$ есть евклидово расстояние от элемента $x$ до множества $\mathcal{X}$.

Так же, как и в [1], примем без доказательства следующее утверждение.

**Лемма 3.4** (Лемма 32.4). *Каковы бы ни были отрезок $[t_0, \vartheta]$, ограниченная область $G$ пространства $\{h\}$, слабо измеримая функция $\nu^0 = \nu_t^0$ $(t_0 \leqslant t < \vartheta)$ и сходящаяся к ней слабо последовательность $\{\nu_{(\cdot)}^{(k)}(dv)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ слабо измеримых функций $\nu_t^{(k)}$ $(t_0 \leqslant t < \vartheta)$, для всякого значения $\varepsilon > 0$ найдется число $k(\varepsilon)$ такое, что будет выполнено неравенство*

$$\rho(\{x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)}),\ \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\ \nu_{(\cdot)}^{(k)}\}_\Pi\},\ \{x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)}),\ \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\ \nu_{(\cdot)}^{0}\}_\Pi\}) < \varepsilon$$

*при всех $t$ из отрезка $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, если только $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $h_* \in G$ и выполнено неравенство* (3.8).

Множество всех точек $x = x(\vartheta, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)})$ при $\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi$, следуя общепринятой терминологии, будем именовать *областью достижимости* для указанной совокупности движений $\{x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)}), \{\eta_{(\cdot)}, [t_0, \vartheta)\}_\Pi\}$ в момент $\vartheta$. Будем обозначать такую область символом $G(t_*, h_*, \vartheta; \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi)$. Из приведенных свойств движений и, в частности, из лемм 3.3 и 3.4 вытекает, что всякая область $G(t_*, h_*, \vartheta; \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi)$ есть множество з а м к н у т о е и при непрерывном изменении начальной позиции $\{t_*, h_*\}$ область достижимости $G(t_*, h_*, \vartheta; \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi)$ деформируется непрерывно; если последовательность $\nu_{(\cdot)}^{(k)}(dv)$ сходится слабо к $\nu_{(\cdot)}^0(dv)$, то последовательность $G^{(k)} = G(t_*, h_*, \vartheta; \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta), \nu_{(\cdot)}^{(k)}(dv)\}_\Pi)$ сходится к области $G^0 = G(t_*, h_*, \vartheta; \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta), \nu_{(\cdot)}^0\}_\Pi)$ в хаусдорфовой метрике $\rho$ (3.13).

## § 4. Уравнение в вариациях

В этом разделе мы рассмотрим *уравнение в вариациях*, решения которого $\delta x(t)$ описывают в линейном приближении изменение $\Delta x(t)$ программного движения $x(t, t_*, h_*, \eta_{*(\cdot)})$ при малом изменении $\Delta h = h^* - h_*$ начального состояния $h_*$ и при малом по мере на полуинтервале $[t_*, \vartheta)$ изменении $\Delta\eta_{(\cdot)} = \eta^*_{(\cdot)} - \eta_{*(\cdot)}$ программного управления $\eta_{*(\cdot)}$. Итак, рассмотрим два программных движения $x_*(t) = x(t, t_*, h_*, \eta_{*(\cdot)})$, $x^*(t) = x(t, t_*, h^*, \eta^*_{(\cdot)})$ ($t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$), являющиеся по их определению решениями функционально-дифференциального уравнения (2.2) при $\eta_t = \eta_{*t}$ и $\eta_t = \eta^*_t$ соответственно.

Разность $\Delta x(t) = x^*(t) - x_*(t)$ согласно (2.2) удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению

$$\Delta\dot{x}(t) = \int\limits_P\int\limits_Q f(t, x^*_t, u, v)\eta^*_t(du, dv) - \int\limits_P\int\limits_Q f(t, x_{*t}, u, v)\eta_{*t}(du, dv) =$$
$$= \int\limits_P\int\limits_Q [f(t, x^*_t, u, v) - f(t, x_{*t}, u, v)]\eta_{*t}(du, dv) +$$
$$+ \int\limits_P\int\limits_Q f(t, x^*_t, u, v)[\eta^*_t(du, dv) - \eta_{*t}(du, dv)].$$

Из этого уравнения вследствие инвариантной дифференцируемости функционала $f$ по $h$ и свойств коинвариантной производной [3] вытекает, что разность $\Delta x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\dot{x}(t) = \int\limits_P\int\limits_Q \left\{\frac{\partial f}{\partial h_x}\right\}_{x_{*t}} \Delta x(t)\eta_{*t}(du, dv) + \alpha(t)\cdot\Delta x(t) +$$
$$+ \int\limits_P\int\limits_Q f(t, x_{*t}, u, v)[\eta^*_t(du, dv) - \eta_{*t}(du, dv)] +$$
$$+ \int\limits_P\int\limits_Q \beta(t, u, v)\Delta x(t)[\eta^*_t(du, dv) - \eta_{*t}(du, dv)], \quad (4.1)$$

где матрица-функция $\alpha(t)$ стремится к нулевой равномерно на отрезке $[t_*, \vartheta]$, матрица-функция $\beta(t, u, v)$ остается ограниченной, когда $\max\limits_{t_* \leqslant t \leqslant \vartheta} \|\Delta x(t)\| \to 0$. Здесь символ $\left\{\frac{\partial f}{\partial h_x}\right\}_{x_{*t}}$ обозначает матрицу Якоби $\left\{\frac{\partial f_i}{\partial h_{xj}}\right\}$ ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$) вектор-функционала $f$ по конечномерной составляющей $h_x$, вычисляемую вдоль движения $x_*(t)$. Предположим, что

$$\|\Delta x(t_*)\| \leqslant \delta_x$$

и программные управления $\eta^*_t$ и $\eta_{*t}$ ($t_* \leqslant t < \vartheta$) отличаются лишь на множестве $T \subset [t_*, \vartheta)$, мера которого $\mu(T)$ удовлетворяет неравенству

$$\mu(T) \leqslant \delta_T.$$

Тогда, решая уравнение (4.1) по формуле Коши [3], получим

$$\Delta x(t) = S(t, t_*)_{x_*(\cdot)}\Delta x_*(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_P\int\limits_Q S(t, \xi)_{x_*(\cdot)} f(\xi, x_{*\xi}, u, v) \times$$
$$\times [\eta^*_\xi(du, dv) - \eta_{*\xi}(du, dv)]\, d\xi + \beta(t), \quad (4.2)$$

где вектор-функция $\beta(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\beta(t)\| \leqslant o(\delta_x + \delta_T) \ \ (t_* \leqslant t \leqslant \vartheta),$$

причем символ $o(\delta)$ означает бесконечно малую более высокого порядка, чем бесконечно малая $\delta$. В равенстве (4.2) символ $S(t,\xi)_{x_*(\cdot)}$ означает фундаментальную матрицу решений для однородного линейного функционально-дифференциального уравнения в вариациях $\delta x$:

$$\delta\dot{x} = L(t)\,\delta x, \tag{4.3}$$

отвечающего уравнению (4.1), где, стало быть,

$$L(t) = \int\limits_P \int\limits_Q \left\{\frac{\partial f}{\partial h_x}\right\}_{x_{*t}} \eta_{*t}(du, dv).$$

В дальнейшем нас часто будет интересовать изменение $\Delta\omega$ некоторой непрерывно дифференцируемой функции $\omega(x_*(t)) = \omega(x(t, t_*, h_*, \eta_{*(\cdot)}))$ при малых изменениях начального состояния $h_*$ или при малых изменениях программного управления $\eta_{*t}$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$, определяющих данное движение $x_*(t) = x(t, t_*, h_*, \eta_{*(\cdot)})$. Это изменение $\Delta\omega$ изображается равенством

$$\Delta\omega = \left[\frac{\partial\omega}{\partial h_x}\right]'_{x_{*t}} \Delta x(t) + o(\|\Delta x(t)\|). \tag{4.4}$$

Здесь и ниже $\left[\frac{\partial\omega}{\partial h_x}\right]$ есть вектор $\left\{\frac{\partial\omega}{\partial h_{xi}},\ i = 1, \ldots, n\right\}$.

Согласно (4.2) с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно бесконечно малых $\delta_x$ и $\delta_t$ мы можем заменить величину $\Delta\omega$ (4.4) ее вариацией $\delta\omega = \left[\frac{\partial\omega}{\partial h_x}\right]'_{x_{*t}} \delta x(t)$, которая изображается равенством

$$\begin{aligned}
\delta\omega = \left[\frac{\partial\omega}{\partial h_x}\right]'_{x_{*t}} \delta x(t) = \left[\frac{\partial\omega}{\partial h_x}\right]'_{x_{*t}} S(t, t_*)_{x_*(t)} \delta x(t_*) + {}\\
+ \int\limits_{t_*}^{t} \int\limits_P \int\limits_Q \left[\frac{\partial\omega}{\partial h_x}\right]'_{x_{*t}} S(t,\xi) f(\xi, x_{*\xi}, u, v) \times [\eta^*_\xi(du, dv) - \eta_{*\xi}(du, dv)]d\xi = \\
= s'(t, t_*)\delta x(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} \int\limits_P \int\limits_Q s'(t,\xi) f(\xi, x_{*\xi}, u, v)\delta\eta_\xi(du, dv)d\xi,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

причем вектор $\left[\frac{\partial\omega}{\partial h_x}\right]$ вычисляется в точке $h = x_t(t, t_*, h_*, \eta_{*(\cdot)})$.

Здесь символ $s(t,\xi)$ обозначает вектор $S'(t,\xi)\left[\frac{\partial\omega}{\partial h_x}\right]_{x_{*t}}$. Фундаментальная матрица решений $S(t,\xi)$, уравнения (4.3), рассматриваемая как функция от переменной $\xi$, удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению [3]

$$\frac{dS'(t,\xi)}{d\xi} = -L'(\xi)S'(t,\xi). \tag{4.6}$$

Отсюда следует, что вектор-функция $s(t,\xi)$, фигурирующая в равенстве (4.5), удовлетворяет уравнению

$$\frac{ds(t,\xi)}{d\xi} = -L'(\xi)s(t,\xi), \tag{4.7}$$

как это вытекает из равенства (4.6) после умножения этого равенства справа на вектор $l = \left[\frac{\partial\omega}{\partial h_x}\right]_{x_{*t}}$. Наконец, так как при $\xi = t$ фундаментальная матрица $S(t,\xi)$ по ее определению обращается в единичную матрицу $S(t,t) = E$, то для вектор-функции $s(t,\xi)$ из (4.5), являющейся, как мы видели, решением уравнения (4.7), выполняется краевое условие

$$s(t,t) = l = \left[\frac{\partial\omega}{\partial h_x}\right]_{x_{*t}}.$$

## § 5. Вспомогательные программные задачи

Пусть $\omega(t,x,m)$ — некоторая функция, непрерывная по переменным $\{t,x\}$ и параметру $m$, может быть — векторному, из какого-то векторного пространства $\{m\}$. Будем предполагать, что функция $\omega(t,x,m)$ в области $\omega(t,x,m) > c$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial\omega}{\partial x_i}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Пусть, далее, в пространстве $\{t,m\}$ дано ограниченное замкнутое множество $M$, сечения которого гиперплоскостью $t = \mathrm{const}$ будем, как обычно, обозначать символами $M(t) = [\{\zeta,m\} \in M, \zeta = t]$. Пусть, далее

$$\rho(t,x) = \min_{m\in M(t)} \omega(t,x,m).$$

В частности, может быть, что пространство $\{m\}$ совпадает с пространством $\{x\}$, роль множества $M$ может тогда играть часть множества $M_c$, содержащаяся в какой-нибудь сфере $\|x\| \leqslant R$ достаточно большого радиуса, а роль функции $\omega(t,x,m)$ — величина

$$\omega(t,x,m) = \|x - m\| + c. \tag{5.1}$$

Тогда, в частности, будет

$$\rho(\vartheta,x) = \rho_\vartheta(x,M_c) + c \ \text{ при } \ \|x\| + \rho_\vartheta(x,M_c) \leqslant R,$$

где, как и раньше, символ $\rho_\vartheta(x,M_c)$ обозначает евклидово расстояние от точки $\{\vartheta,x\}$ до сечения $M_c(\vartheta)$ множества $M_c$ гиперплоскостью $t = \vartheta$. Первая из вспомогательных программных задач формулируется следующим образом.

**Задача 5.1** (Задача 34.1). Задано значение $\vartheta$, при котором множество $M(\vartheta)$ не пусто. Задана начальная позиция $\{t_*,h_*\}$ $(t_* \leqslant \vartheta)$ и выбрана программа $\{\eta_{(\cdot)},[t_*,\vartheta)\}_\Pi$. Среди программных управлений $\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)},[t_*,\vartheta)\}_\Pi$ требуется найти оптимальное минимизирующее управление $\eta^0_t$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$, которое удовлетворяет следующему условию:

$$\rho(\vartheta, x(\vartheta,t_*,h_*,\eta^0_{(\cdot)})) = \min_{\eta_{(\cdot)}\in\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi} \rho(\vartheta, x(\vartheta,t_*,h_*,\eta_{(\cdot)})).$$

Если предполагать, что в данной вспомогательной задаче право выбора программы $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ предоставляется второму игроку, а право выбора программного управления $\eta_t$ $(t_* \leqslant t < \vartheta)$ из выбранной таким образом программы $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ — первому игроку, то эту задачу 5.1 мы можем трактовать как вспомогательную задачу, которая ставится перед первым игроком в той или иной реализовавшейся позиции $\{t_*,h_*\}$, при условии, что ему сообщается программа $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$, выбранная вторым игроком.

Задача 5.1 имеет решение при всяком задании начальной позиции $\{t_*,h_*\}$ и при всяком выборе программы $\{\eta_{(\cdot)},[t_*,\vartheta)\}_\Pi$. В самом деле, величина

$$\rho(\vartheta,x) = \min_{m\in M(\vartheta)} \omega(\vartheta,x,m) \tag{5.2}$$

есть непрерывная функция $x$, а переменная $x = x(\vartheta, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)})$ согласно лемме 3.2 зависит непрерывно от программного управления $\eta_t$ ($t_* \leqslant t < \vartheta$), если близость программных управлений $\eta_t$ друг к другу оценивать в слабой топологии. Но такой функционал $\rho(\vartheta, x(\vartheta, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)}))$ на слабо компактном множестве $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi$ своих аргументов $\eta_{(\cdot)}$ обязательно достигает минимума на каком-то программном управлении $\eta^0_{(\cdot)}$, который и доставляет, стало быть, решение $\eta^0_{(\cdot)}$ задачи 5.1.

Вторая интересующая нас вспомогательная программная задача формулируется следующим образом.

**Задача 5.2** (Задача 34.2). Дана начальная позиция $\{t_*, h_*\}$ и отрезок времени $[t_*, \vartheta]$, причем множество $M(\vartheta)$ не пусто. Требуется найти максиминное оптимальное программное управление $\eta^{00}_t$ ($t_* \leqslant t < \vartheta$), которое удовлетворяет следующему условию максимина:

$$\rho(\vartheta, x(\vartheta, t_*, h_*, \eta^{00}_{(\cdot)}) = \min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}^0_\Pi} \rho(\vartheta, x(\vartheta, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)})) =$$
$$= \max_{\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi} \min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi} \rho(\vartheta, x(\vartheta, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)})) = \varepsilon_0(t_*, h_*, \vartheta). \quad (5.3)$$

Программу $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}^0_\Pi$, на которой достигается максимум правой части в (5.3) и в которой по условию задачи 5.2 должно содержаться искомое управление $\eta^{00}_{(\cdot)}$, будем именовать *максимизирующей* программой, отвечающей данной начальной позиции $\{t_*, h_*\}$ и данному отрезку времени $[t_*, \vartheta]$.

Задачу 5.2 можно трактовать как вспомогательную задачу, которая ставится в реализовавшейся позиции $\{t_*, h_*\}$ перед обоими игроками при следующих информационных условиях: второй игрок выбирает программу $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ и сообщает ее первому игроку, после этого первый игрок выбирает в указанной ему программе $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ минимизирующее управление $\eta^0_{(\cdot)}$. У второго игрока, таким образом, остается только право заранее так распорядиться выбором программы $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$, чтобы обеспечить наибольший возможный результат $\varepsilon_0(t_*, h_*, \vartheta)$ (5.3) при самом неблагоприятном для второго игрока выборе управления $\eta_{(\cdot)}$ первым игроком.

Задача 5.2 и явится той главной вспомогательной задачей на максимин, которую мы будем рассматривать дальше в качестве формализации задачи (1.6). Не будем, однако, здесь выяснять в строгой форме и во всех тонкостях вопрос о близости задач (1.6) и (5.3) и тем более — вопрос об их эквивалентности. Мы просто подменим задачу (1.6) задачей (5.3), так как и та, и другая программная задача рассматриваются нами как вспомогательное средство для решения исходной позиционной игровой задачи сближения I.4.1. Поэтому целесообразность выбора вспомогательной программной задачи именно в форме (5.3) будет определяться прежде всего тем, насколько решение этой задачи позволит продвинуться в решении исходной позиционной игры. В качестве же эвристических соображений в пользу близости задач (1.6) и (5.3) можно сказать следующее: в условиях задачи (5.3), как и в условиях задачи (1.6), второй игрок имеет возможность предопределить на будущий отрезок времени $[t_*, \vartheta]$ некоторую программу действий (программу $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta)\}_\Pi$ или стратегию-программу $V \div v(t)$), в пределах которой у первого игрока еще остается возможность осуществления того или иного программного движения ($x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)})$ или $x[t, t_*, h_*, V]$). При этом оба игрока в обоих задачах содержательно намечают свои действия как функцию от времени, а не по принципу обратной связи, которая учитывала бы текущие позиции $\{t, x_t\}$ ($t \geqslant t_*$), реализующиеся по ходу управления. Это обстоятельство, впрочем, в данном случае имеет значение в особенности по отношению к возможностям второго игрока, так как форма выбора управления для первого игрока в виде функции от времени является здесь только формой, и по сути дела ничего бы содержательно не изменилось, если бы задачи (1.6) и (5.1) мы переформулировали так, чтобы первый игрок получил бы еще и право строить свои управления по принципу обратной связи, учитывая реализующиеся позиции $\{t, x_t\}$ $(t \geqslant t_*)$.

Задача 5.2 имеет решение при всяком задании начальной позиции $\{t_*, h_*\}$ и отрезка $[t_*, \vartheta]$ и притом уже в классе элементарных программ $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\ \nu_{(\cdot)}\}_\Pi$. Для проверки этого утверждения, имея в виду замечание о существовании решения $\eta^0_{(\cdot)}$ задачи 5.1, достаточно убедиться лишь в существовании максимизирующей элементарной программы $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\ \nu^0_{(\cdot)}\}_\Pi$, отвечающей данной начальной позиции $\{t_*, h_*\}$ и заданному отрезку времени $[t_*, \vartheta]$. Эта проверка осуществляется следующим образом. Пусть $\{\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\ \nu^{(k)}_{(\cdot)}\}_\Pi\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — некоторая максимизирующая последовательность элементарных программ для задачи 5.2 для данной позиции $\{t_*, h_*\}$ и данного отрезка времени $[t_*, \vartheta]$. Очевидно, из смысла определения элементарной программы и из смысла задачи 5.2 максимизирующую последовательность для этой задачи мы всегда можем предполагать состоящей именно из элементарных программ. Теперь из последовательности $\nu^{(k)}_{(\cdot)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ мы можем выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\nu^{(k_j)}_{(\cdot)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Слабый предел $\nu^0_{(\cdot)}$ этой подпоследовательности и определит искомую максимизирующую программу $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\ \nu^0_{(\cdot)}\}_\Pi$. Тот факт, что программа $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\ \nu^0_{(\cdot)}\}_\Pi$ является максимизирующей программой для нашей задачи 5.2, вытекает из того обстоятельства, что согласно лемме 3.4 область достижимости $G(t_*, h_*, \vartheta;\ \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta); \nu^0_{(\cdot)}\}_\Pi)$ является пределом для последовательности областей $G(t_*, h_*, \vartheta;\ \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta); \nu^{(k_j)}_{(\cdot)}\}_\Pi)$ при $j \to \infty$, а величина $\min\limits_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi} \rho(\vartheta, x(\vartheta, t_*, h_*, \eta_t)) = \min\limits_{x \in G} \min\limits_{m \in M(\vartheta)} \omega(\vartheta, x, m)$, фигурирующая в условиях (5.1), изменяется непрерывно с непрерывным изменением области достижимости $G$. В частности, если $\rho(\vartheta, x) = \rho_\vartheta(x, M_c) + c$, то величина

$$\min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi} \rho(\vartheta, x(\vartheta)) = \min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi} \rho_\vartheta(x(\vartheta), M_c) + c$$

есть не что иное, как величина $c$ плюс расстояние от области $G(t_*, h_*, \vartheta;\ \{\eta_t\}_\Pi)$ до множества $[x\colon \{\vartheta, x\} \in M_c]$.

Итак, в этом разделе мы сформулировали две вспомогательные задачи 5.1 и 5.2 о программном управлении и убедились в существовании решений $\eta^0_{(\cdot)}$ и $\eta^{00}_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \vartheta);\ \nu^0_{(\cdot)}\}_\Pi$ каждой из этих задач.

Если не переходить к программным движениям $x(t, t_*, h_*, \eta_{(\cdot)})$, а работать только с конструктивными движениями $x[t, t_*, h_*, V \div v(t)]$ из раздела I.1, подменяя в задачах 5.1 и 5.2 программы $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ стратегиями-программами $V \div v(t) \in Q$, то в приведенном в этом разделе обсуждении вопроса о существовании решения $x^0[t, t_*, h_*, V \div v(t)]$ при выбранной программе $V \div v(t)$ не встретится каких-либо отличий, ибо множество всех движений $x[t, t_*, h_*, V \div v(t)]$ компактно в себе в метрике пространства $C_{[t,\vartheta]}$ (см. раздел I.2). Однако вопрос о существовании максимизирующей стратегии-программы $V^0 \div v^0(t)$ для задачи 5.2 уже так же просто не решится. Он требует дополнительного изучения. Мы не будем останавливаться здесь на этом вопросе, просто заменив в условии (5.2) задачи 5.2 операцию $\max\limits_{\{\eta_{(\cdot)}\}}$ на операцию $\sup\limits_V$, т. е. определив величину $\varepsilon_0(t_*, h_*, \vartheta)$ равенством

$$\varepsilon_0(t_*, h_*, \vartheta) = \sup_V \min_{x[\cdot]} \rho(\vartheta, x(\vartheta, t_*, h_*, V \div v(t)))$$

и не акцентируя, таким образом, внимания на отыскании оптимальной максимизирующей программы $V^0 \div v^0(t)$, а имея в виду, что можно будет ограничиться лишь максимизирующей последовательностью стратегий–программ ($V^{(k)} \div v^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$), понимая, однако, под оптимальным максиминным движением $x^{00}[t] = x^{00}[t, t_*, h_*]$ какой-либо из равномерных пределов для той или иной сходящейся подпоследовательности $x^{0(k_j)}[t] = x^{0(k_j)}[t, t_*, h_*, V^{(k_j)}]$ ($j = 1, 2, \ldots$), где $x^{0(k_j)}[t]$ — решение задачи 5.1 для программы $V^{(k_j)}$ из последовательности $\{V^{(k)}\}$. Из свойств движений $x[t, t_*, h_*, V]$ (см. раздел I.1) вытекает, что по крайней мере одно такое оптимальное максиминное движение $x^{00}[t] = x^{00}[t, t_*, h_*]$ обязательно существует.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Ким А. В. Введение в теорию позиционных дифференциальных игр систем с последействием (на основе методологии $i$-гладкого анализа) // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 268–295. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-268-295
3. Ким А. В. $i$-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.

Поступила в редакцию 26.02.2026
Принята к публикации 26.05.2026

Ким Аркадий Владимирович, д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0009-0005-9637-5767
E-mail: avkim@imm.uran.ru

**Цитирование:** А. В. Ким. Программные конструкции теории позиционных дифференциальных игр систем с последействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 2. С. 277–295.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2026. Vol. 36. Issue 2. Pp. 277–295.

*A. V. Kim*

**Program constructions of the theory of positional differential games with delays**

*Keywords*: differential games, functional differential equations, $i$-smooth analysis.

MSC2020: 34K35, 49N70

DOI: 10.35634/vm260205

The paper continues the exposition for systems with the delays of the completed, that is, completely analogous to the finite-dimensional systems of ordinary differential equations, theory of positional differential games by N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin. The theory is based on the approach developed by the author that allows one to constructively transfer all the results of the theory of ordinary differential equations to systems with delays.

REFERENCES

1. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differentional games), Moscow: Nauka, 1974.
2. Kim A. V. Introduction to the theory of positional differentional games of systems with aftereffect (based on the $i$-smooth analisys methodology), *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2024, vol. 29, issue 147, pp. 268–295 (in Russian). https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-268-295
3. Kim A. V. *i-Gladkii analiz i funktsional'no-differentsial'nye uravneniya* (i-Smooth analysis and functional differential equations), Yekaterinburg: Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, 1996.

Received 26.02.2026
Accepted 26.05.2026

Arkadii Vladimirovich Kim, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Differential Equations, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0009-0005-9637-5767
E-mail: avkim@imm.uran.ru

**Citation:** A. V. Kim. Program constructions of the theory of positional differential games with delays, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 2, pp. 277–295.