

УДК 517.958, 530.145.6, 517.984

© Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин

МАЙОРАНОВСКИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ БОГОЛЮБОВА–ДЕ ЖЕНА С МАЛЫМ ЧИСЛОМ УЗЛОВ

Аналитически исследуются решеточные модели с малым числом узлов, представляющие собой участки бесконечной модели Боголюбова–де Жена. Для нулевого собственного значения (нулевой энергии) найдены условия существования и аналитическое выражения для собственных функций, в том числе описывающих майорановские локализованные состояния.

Ключевые слова: модель Боголюбова–де Жена, собственные функции, майорановские локализованные состояния.

DOI: [10.35634/vm260206](https://doi.org/10.35634/vm260206)

Введение

Майорановские локализованные состояния (МЛС) представляют собой устойчивые нейтральные квазичастицы с нулевой энергией, возникающие вблизи границ топологического сверхпроводника [1–4]. Существуют реальные перспективы использования МЛС в квантовых вычислениях [4–7].

Сравнительно недавно были проведены успешные эксперименты по поиску и изучению МЛС [8, 9]. При этом использовались решеточные модели, восходящие к цепочке Китаева, с малым числом узлов (квантовых точек). В коротких цепочках отсутствует или ослабевает топологическая защита МЛС от внешних воздействий [10], поэтому важной задачей становится поиск точек или областей устойчивости МЛС в пространстве параметров.

В статье рассматриваются две решеточные модели Боголюбова–де Жена (БдЖ) с двумя и тремя узлами в сверхпроводящем участке и двумя присоединенными квантовыми точками, полученные из периодической модели Китаева (см. [1–4]). Найдены условия существования нулевого собственного значения, получены аналитические выражения для соответствующих собственных функций, позволяющие оценить их близость к МЛС и устойчивость при изменении параметров системы.

§ 1. Гамильтониан БдЖ

Рассмотрим гамильтониан БдЖ в импульсном представлении, действующий на функции $\Psi(k) = (\psi_1(k), \psi_2(k))^T$, где T — транспонирование, по формуле

$$H(k)\Psi(k) = \begin{pmatrix} -2t \cos k - \mu & 2i\Delta \sin k \\ -2i\Delta \sin k & 2t \cos k + \mu \end{pmatrix} \Psi(k) \quad (1.1)$$

(см. [1–4]). Здесь t — амплитуда перехода на соседний узел, Δ — сверхпроводящий параметр (параметр спаривания), μ — химический потенциал. Далее предполагаем, что $t > 0$, $\Delta > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Найдем гамильтониан БдЖ в координатном представлении, применяя формулу для коэффициентов Фурье

$$\psi(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikn} \psi(k) dk$$

к каждой компоненте $H(k)\Psi(k)$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikn} \begin{pmatrix} -(t(e^{ik} + e^{-ik}) + \mu)\psi_1(k) + \Delta(e^{ik} - e^{-ik})\psi_2(k) \\ -\Delta(e^{ik} - e^{-ik})\psi_1(k) + (t(e^{ik} + e^{-ik}) + \mu)\psi_2(k) \end{pmatrix} dk = \quad (1.2)$$

$$= \begin{pmatrix} -t(\psi_1(n+1) + \psi_1(n-1)) + \Delta(\psi_2(n+1) - \psi_2(n-1)) - \mu\psi_1(n) \\ t(\psi_2(n+1) + \psi_2(n-1)) - \Delta(\psi_1(n+1) - \psi_1(n-1)) + \mu\psi_2(n) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \psi_1(n) \\ \psi_2(n) \end{pmatrix}$$

(см. рис. 1); компоненты $\psi_1(n)$ и $\psi_2(n)$ функции $\Psi(n)$ описывают, соответственно, электроны и дырки.

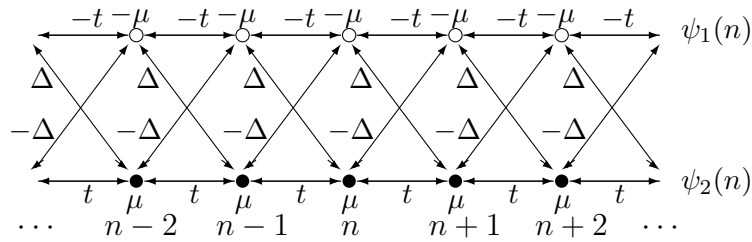


Рис. 1. Модель БДЖ для бесконечной цепочки. Функция $\psi_1(n)$ определена на узлах верхней (электронной) подрешетки, а функция $\psi_2(n)$ — на узлах нижней (дырочной) подрешетки, n — номер узла. Коэффициенты перехода между узлами соответствуют (1.2)

§ 2. Два узла и две квантовые точки

В течение последних нескольких лет проводились плодотворные эксперименты по поиску МЛС в системах, содержащих малое число квантовых точек. Такие системы успешно исследуются с помощью моделей, содержащих малое число узлов и восходящих к цепочке Китаева.

Рассмотрим конечную модель БДЖ с двумя узлами на подрешетках в сверхпроводящей области, при этом узлы верхней подрешетки соответствуют электронам, а узлы нижней подрешетки — дыркам (см. рис. 2) (ср. [12–16]). Квантовые точки вне сверхпроводящей области служат для управления квазичастицами.

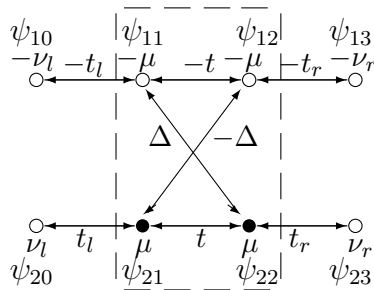


Рис. 2. Модель БДЖ с двумя узлами. Здесь $\pm\nu_l, \pm\nu_r$ — энергии квантовых точек, $\pm t_l, \pm t_r$ — амплитуды перехода между квантовыми точками и сверхпроводящим участком. Функция ψ_{1n} определена на узлах верхней подрешетки, а функция ψ_{2n} — на узлах нижней подрешетки, $n = 0, 1, 2, 3$. Сверхпроводящий участок выделен пунктиром

Рассматриваемая модель описывается эрмитовым матричным гамильтонианом

$$H_2 \Psi = \begin{pmatrix} -\nu_l & -t_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t_l & -\mu & -t & 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & -t & -\mu & -t_r & 0 & -\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_r & -\nu_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_l & t_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta & 0 & t_l & \mu & t & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 & 0 & t & \mu & t_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_r & \nu_r \end{pmatrix} \Psi \quad (2.1)$$

(индекс 2 показывает число узлов в сверхпроводящем участке каждой подрешетки). H_2 действует на функции вида $\Psi = (\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{23})^T$. В дальнейшем будем предполагать, что параметры t_r, t_l, ν_r, ν_l вещественны и не обращаются в нуль.

Обозначим $L = \mu - \frac{t_l^2}{\nu_l}, R = \mu - \frac{t_r^2}{\nu_r}$.

Теорема 2.1. *Необходимое и достаточное условие существования нулевого собственного значения гамильтониана H_2 имеет вид*

$$RL = t^2 - \Delta^2. \quad (2.2)$$

Если (2.2) выполнено, то гамильтониан H_2 имеет собственные функции

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \left(-\frac{t_l}{\nu_l}, 1, -\frac{L}{t}, \frac{t_r}{\nu_r} \frac{L}{t}, \frac{t_l}{\nu_l} \frac{\Delta}{t}, -\frac{\Delta}{t}, 0, 0 \right)^T, \\ \Psi_2 &= \left(0, 0, \frac{\Delta}{t}, -\frac{t_r}{\nu_r} \frac{\Delta}{t}, \frac{t_l}{\nu_l} \frac{R}{t}, -\frac{R}{t}, 1, -\frac{t_r}{\nu_r} \right)^T. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Доказательство. Решим уравнение

$$H_2 \Psi = 0. \quad (2.4)$$

Используя (2.1), получим

$$\psi_{10} = -\frac{t_l}{\nu_l} \psi_{11}, \quad \psi_{13} = -\frac{t_r}{\nu_r} \psi_{12}, \quad \psi_{20} = -\frac{t_l}{\nu_l} \psi_{21}, \quad \psi_{23} = -\frac{t_r}{\nu_r} \psi_{22} \quad (2.5)$$

и

$$\begin{pmatrix} -L & -t & 0 & \Delta \\ -t & -R & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & L & t \\ \Delta & 0 & t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

Используя (2.6), имеем

$$\psi_{12} = -\frac{L}{t} \psi_{11} + \frac{\Delta}{t} \psi_{22}, \quad \psi_{21} = -\frac{\Delta}{t} \psi_{11} - \frac{R}{t} \psi_{22} \quad (2.7)$$

и

$$\begin{pmatrix} LR - t^2 + \Delta^2 & 0 \\ 0 & LR - t^2 + \Delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Приравнявая определитель матрицы к нулю, получаем необходимое и достаточное условие существования ненулевого решения уравнения (2.4). Равенство (2.8) при этом будет выполнено для произвольных ψ_{11} и ψ_{22} .

Далее предполагая, что (2.2) выполняется, найдем собственные функции. Подставляя $\psi_{11} = 1, \psi_{22} = 0$ и $\psi_{11} = 0, \psi_{22} = 1$ в (2.5) и (2.7), получим соответственно Ψ_1 и Ψ_2 , определенные равенствами (2.3). \square

Замечание 2.1. Обозначим электронную часть, то есть первые четыре компоненты, собственной функции Ψ через Ψ^e . При $L \neq 0$ в пространстве собственных функций (2.3) выберем базис $(\Delta/L)\Psi_1 + \Psi_2, \Psi_2$. На рис. 3 изображены графики нормированных электронных частей выбранного базиса:

$$\frac{\Delta}{L}\Psi_1^e + \Psi_2^e = \frac{\Delta}{L} \left(-\frac{t_l}{\nu_l}, 1, 0, 0 \right)^T, \quad \Psi_2^e = \frac{\Delta}{t} \left(0, 0, 1, -\frac{t_r}{\nu_r} \right)^T.$$

Заметим, что в случае $L = 0$ графики нормированных Ψ_1 и Ψ_2 совпадут с графиками на рис. 3.

В рассматриваемой модели МЛС имеют вид электрон + дырка. Кроме того, МЛС, как принято считать [4], появляются на границе сверхпроводник–другой материал. «Стандартные» МЛС появляются, если $t = \Delta$, $\mu = 0$ и $t_r = t_l = 0$ (следовательно, выполнено условие (2.2)), собственные функции при этом имеют вид

$$\Psi_1 = (0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0)^T, \quad \Psi_2 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)^T$$

и, таким образом, «стандартные» МЛС локализованы в граничных узлах сверхпроводящего участка.

В нашем случае наличие МЛС соответствует увеличению значений параметров ν_l и ν_r , то есть энергий присоединенных квантовых точек (см. рис. 3). Назовем МЛС устойчивым, если изменение его локализации на краю сверхпроводящего участка при небольших изменениях параметров системы будет незначительным. Выделенный выше базис не зависит от параметров сверхпроводящего участка t, Δ, μ , а лишь от характеристик присоединенных квантовых точек. При этом чем больше будут значения ν_l и ν_r , тем устойчивее будет МЛС.

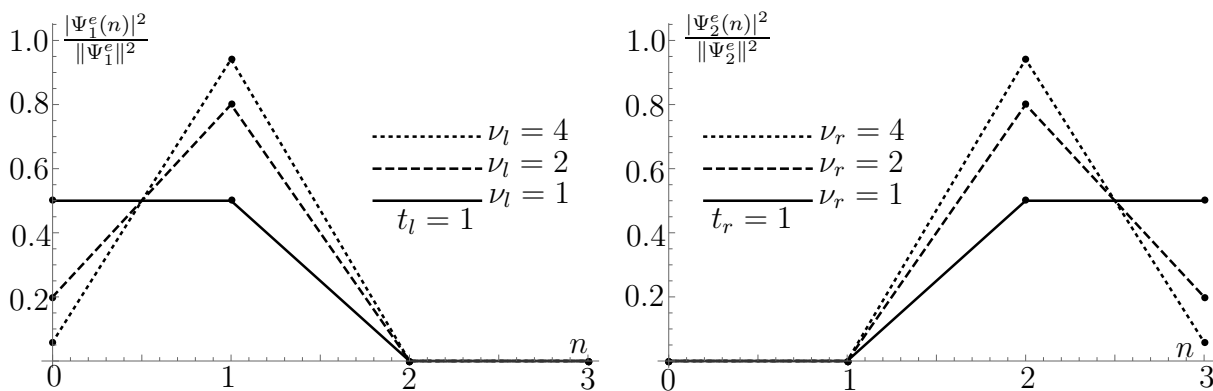


Рис. 3. Графики функций $|\Psi_j^e(n)|^2 / \|\Psi_j^e\|^2$, $j = 1, 2$, где Ψ_1^e – электронная часть собственной функции $\frac{\Delta}{L}\Psi_1 + \Psi_2$, а Ψ_2^e – электронная часть Ψ_2

Замечание 2.2. Рассмотрим равенство (2.2):

$$\left(\mu - \frac{t_l^2}{\nu_l} \right) \left(\mu - \frac{t_r^2}{\nu_r} \right) = t^2 - \Delta^2. \quad (2.9)$$

Левую часть (2.9) обозначим $f(\mu)$. Графиком $f(\mu)$ является парабола (см. рис. 4), вершина которой находится в точке $(\mu_0, f(\mu_0))$, где

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{t_l^2}{\nu_l} + \frac{t_r^2}{\nu_r} \right), \quad f(\mu_0) = -\frac{1}{4} \left(\frac{t_l^2}{\nu_l} - \frac{t_r^2}{\nu_r} \right)^2.$$

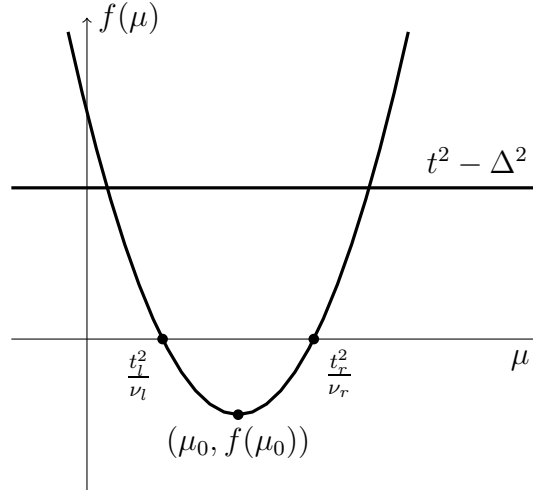


Рис. 4. Схематичный график левой $f(\mu) = \left(\mu - \frac{t_l^2}{\nu_l}\right)\left(\mu - \frac{t_r^2}{\nu_r}\right)$ и правой частей равенства (2.9)

Таким образом, уравнение (2.9) имеет решение в пространстве параметров, если

$$\left(\frac{t_l^2}{\nu_l} - \frac{t_r^2}{\nu_r}\right)^2 \geq 4(\Delta^2 - t^2). \quad (2.10)$$

Неравенство (2.10) определяет внешность конуса в пространстве параметров $(t, \Delta, \frac{t_l^2}{\nu_l} - \frac{t_r^2}{\nu_r})$ при $\Delta > t$ и всегда справедливо при $\Delta \leq t$.

§3. Три узла и две квантовые точки

Рассмотрим гамильтониан БдЖ, описывающий модель с тремя узлами в сверхпроводящих участках верхней и нижней подрешеток и двумя управляющими квантовыми точками, имеющий вид

$$H_3 \Psi = \begin{pmatrix} -\nu_l & -t_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t_l & -\mu & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & -t & -\mu & -t & 0 & 0 & -\Delta & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & -t & -\mu & -t_r & 0 & 0 & -\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t_r & -\nu_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_l & t_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta & 0 & 0 & t_l & \mu & t & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & -\Delta & 0 & 0 & t & \mu & t & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & t & \mu & t_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_r & \nu_r \end{pmatrix} \Psi \quad (3.1)$$

и действующий на функции $\Psi = (\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{14}, \psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{23}, \psi_{24})^T$ (см. рис. 5).

Теорема 3.1. *Равенство*

$$(R + L)(t^2 - \Delta^2) = \mu LR \quad (3.2)$$

является необходимым и достаточным условием существования нулевого собственного значения гамильтониана H_3 . Если (3.2) выполнено, то существуют две собственные функ-

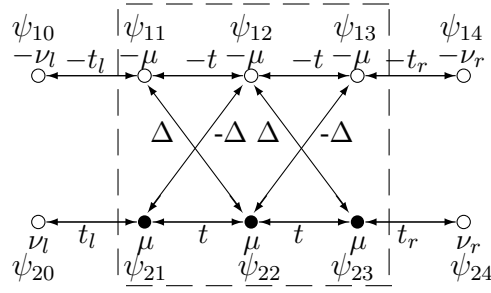


Рис. 5. Модель БдЖ с тремя узлами

ции гамильтониана H_3 , имеющие вид

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \left(\frac{t_l t}{\nu_l L}, -\frac{t}{L}, 1, -\frac{t}{R}, \frac{t_r t}{\nu_r R}, -\frac{t_l \Delta}{\nu_l L}, \frac{\Delta}{L}, 0, -\frac{\Delta}{R}, \frac{t_r \Delta}{\nu_r R} \right)^T, \\ \Psi_2 &= \left(-\frac{t_l \Delta}{\nu_l L}, \frac{\Delta}{L}, 0, -\frac{\Delta}{R}, \frac{t_r \Delta}{\nu_r R}, \frac{t_l t}{\nu_l L}, -\frac{t}{L}, 1, -\frac{t}{R}, \frac{t_r t}{\nu_r R} \right)^T\end{aligned}\quad (3.3)$$

при $LR \neq 0$;

$$\begin{aligned}\Psi_3 &= \left(-\frac{t_l \mu R}{\nu_l 2t^2}, \frac{\mu R}{2t^2}, -\frac{R}{2t}, 1, -\frac{t_r}{\nu_r}, 0, 0, -\frac{R}{2t}, 1, -\frac{t_r}{\nu_r} \right)^T, \\ \Psi_4 &= \left(-\frac{t_l}{\nu_l}, 1, -\frac{L}{2t}, \frac{\mu L}{2t^2}, -\frac{t_r \mu L}{\nu_r 2t^2}, \frac{t_l}{\nu_l}, -1, \frac{L}{2t}, 0, 0 \right)^T\end{aligned}\quad (3.4)$$

при $LR = 0$ и $t = \Delta$;

$$\begin{aligned}\Psi_5 &= \left(\frac{t_l t^2 + \Delta^2}{\nu_l 2\Delta t}, -\frac{t^2 + \Delta^2}{2\Delta t}, 0, \frac{t^2 - \Delta^2}{2\Delta t}, -\frac{t_r t^2 - \Delta^2}{\nu_r 2\Delta t}, -\frac{t_l}{\nu_l}, 1, 0, 0, 0 \right)^T, \\ \Psi_6 &= \left(-\frac{t_l \Delta^2 - t^2}{\nu_l 2\Delta t}, \frac{\Delta^2 - t^2}{2\Delta t}, 0, \frac{t^2 + \Delta^2}{2\Delta t}, -\frac{t_r t^2 + \Delta^2}{\nu_r 2\Delta t}, 0, 0, 0, 1, -\frac{t_r}{\nu_r} \right)^T\end{aligned}\quad (3.5)$$

при $L = R = 0$ и $t \neq \Delta$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$H_3 \Psi = 0. \quad (3.6)$$

В силу (3.1), из (3.6) получим

$$\psi_{10} = -\frac{t_l}{\nu_l} \psi_{11}, \quad \psi_{14} = -\frac{t_r}{\nu_r} \psi_{13}, \quad \psi_{20} = -\frac{t_l}{\nu_l} \psi_{21}, \quad \psi_{24} = -\frac{t_r}{\nu_r} \psi_{23} \quad (3.7)$$

и

$$\begin{pmatrix} -L & -t & 0 & 0 & \Delta & 0 \\ -t & -\mu & -t & -\Delta & 0 & \Delta \\ 0 & -t & -R & 0 & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & 0 & L & t & 0 \\ \Delta & 0 & -\Delta & t & \mu & t \\ 0 & \Delta & 0 & 0 & t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{13} \\ \psi_{21} \\ \psi_{22} \\ \psi_{23} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

Рассмотрим три случая.

1. $L \neq 0, R \neq 0$. Из (3.8) имеем

$$\psi_{11} = -\frac{t}{L}\psi_{12} + \frac{\Delta}{L}\psi_{22}, \quad \psi_{21} = \frac{\Delta}{L}\psi_{12} - \frac{t}{L}\psi_{22} \quad (3.9)$$

и

$$\begin{pmatrix} -\mu + t^2/L - \Delta^2/L & -t & 0 & \Delta \\ -t & -R & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & \mu + \Delta^2/L - t^2/L & t \\ \Delta & 0 & t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{13} \\ \psi_{22} \\ \psi_{23} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.10)$$

Из (3.10) получим

$$\psi_{13} = -\frac{t}{R}\psi_{12} - \frac{\Delta}{R}\psi_{22}, \quad \psi_{23} = -\frac{\Delta}{R}\psi_{12} - \frac{t}{R}\psi_{22} \quad (3.11)$$

и

$$\begin{pmatrix} -\mu + t^2/L - \Delta^2/L + t^2/R - \Delta^2/R & 0 \\ 0 & \mu + \Delta^2/L - t^2/L + \Delta^2/R - t^2/R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.12)$$

Условие существования ненулевого решения (3.12), а значит и (3.6), имеет вид

$$\mu - \frac{t^2}{L} + \frac{\Delta^2}{L} - \frac{t^2}{R} + \frac{\Delta^2}{R} = 0$$

или, что то же, (3.2).

Пусть (3.2) выполнено, тогда произвольные ψ_{12} и ψ_{22} будут решениями (3.12). Используя (3.7), (3.9), (3.11) и принимая $\psi_{12} = 1, \psi_{22} = 0$, получим решение (3.6) Ψ_1 , определенное равенством (3.3). Если $\psi_{12} = 0, \psi_{22} = 1$, получим Ψ_2 из (3.3).

2. $L = 0$. Из (3.8) получим

$$\begin{pmatrix} -t & \Delta \\ -\Delta & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.13)$$

Пусть $\Delta = t$, тогда $\psi_{12} = \psi_{22}$ и

$$\begin{pmatrix} -t & -\mu & -t & -t & t \\ 0 & -2t & -R & 0 & 0 \\ t & \mu & -t & t & t \\ 0 & 2t & 0 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{13} \\ \psi_{21} \\ \psi_{23} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.14)$$

Из (3.14) имеем

$$\psi_{13} = \psi_{23}, \quad \psi_{12} = -\frac{R}{2t}\psi_{13}, \quad \psi_{11} = \frac{\mu R}{2t^2}\psi_{13} - \psi_{21}.$$

Подставляя $\psi_{13} = 1, \psi_{21} = 0$, получим Ψ_3 из (3.4) при $L = 0$. Если $\psi_{13} = 0, \psi_{21} = 1$, то получим $-\Psi_4$ из (3.4).

Теперь будем считать, что $\Delta \neq t$, тогда из (3.8) и (3.13) имеем $\psi_{12} = \psi_{22} = 0$ и

$$\begin{pmatrix} -t & -t & -\Delta & \Delta \\ 0 & -R & 0 & 0 \\ \Delta & -\Delta & t & t \\ 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{13} \\ \psi_{21} \\ \psi_{23} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.15)$$

Если $R \neq 0$, то $\psi_{13} = \psi_{23} = 0$, тогда (3.15), а следовательно и (3.6), имеет только нулевое решение.

Если $R = 0$, тогда из (3.15) получим

$$\psi_{11} = -\frac{t^2 + \Delta^2}{2\Delta t}\psi_{21} + \frac{\Delta^2 - t^2}{2\Delta t}\psi_{23}, \quad \psi_{13} = \frac{t^2 - \Delta^2}{2\Delta t}\psi_{21} + \frac{\Delta^2 + t^2}{2\Delta t}\psi_{23}; \quad (3.16)$$

здесь ψ_{21} и ψ_{23} могут принимать произвольные значения.

Пусть $\psi_{21} = 1$, $\psi_{23} = 0$. Используя (3.7), (3.16), получим Ψ_5 из (3.5). Если $\psi_{21} = 0$, $\psi_{23} = 1$, то получим Ψ_6 из (3.5).

3. $R = 0$. Из (3.8) получим

$$\begin{pmatrix} -t & -\Delta \\ \Delta & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.17)$$

Если $\Delta = t$, из (3.8) и (3.17) имеем

$$\psi_{12} = -\psi_{22} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -L & -2t & 0 & 0 & 0 \\ -t & -\mu & -t & -t & t \\ 0 & -2t & 0 & L & 0 \\ t & -\mu & -t & t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{13} \\ \psi_{21} \\ \psi_{23} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.18)$$

Из (3.18) получим

$$\psi_{11} = -\psi_{21}, \quad \psi_{12} = -\frac{L}{2t}\psi_{11}, \quad \psi_{13} = \frac{\mu L}{2t^2}\psi_{11} + \psi_{23}. \quad (3.19)$$

Подставляя $\psi_{11} = 1$, $\psi_{23} = 0$ в (3.19) и (3.7), получим Ψ_4 из (3.4). Если $\psi_{11} = 0$, $\psi_{23} = 1$, то получим Ψ_3 при $R = 0$.

Если $t \neq \Delta$, то из (3.17) имеем

$$\psi_{12} = \psi_{22} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -L & 0 & 0 & 0 \\ -t & -t & -\Delta & \Delta \\ 0 & 0 & L & 0 \\ \Delta & -\Delta & t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{13} \\ \psi_{21} \\ \psi_{23} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.20)$$

Если $L \neq 0$, то $\psi_{13} = \psi_{23} = 0$ и (3.6) будет иметь только нулевое решение.

Если $L = 0$, то из (3.20) вновь получим (3.15) при $R = 0$, и, следовательно, (3.5). \square

Замечание 3.1. Пусть $L = 0$ и $t = \Delta$. Электронные составляющие собственных функций при этом примут, согласно (3.4), вид

$$\Psi_3^e = \left(-\frac{t_l}{\nu_l} \frac{\mu R}{2t^2}, \frac{\mu R}{2t^2}, -\frac{R}{2t}, 1, -\frac{t_r}{\nu_r} \right)^T, \quad \Psi_4^e = \left(-\frac{t_l}{\nu_l}, 1, 0, 0, 0 \right)^T.$$

В качестве базисных электронных состояний примем не пересекающиеся состояния Ψ_4^e и

$$\Psi_3^e - \frac{\mu R}{2t^2} \Psi_4^e = \left(0, 0, -\frac{R}{2t}, 1 - \frac{t_r}{\nu_r} \right)^T$$

(см. рис. 6). Состояния, описываемые графиками на рис. 6, при достаточно больших значениях ν_l и ν_r близки МЛС. Но, строго говоря, МЛС возникают, когда $t = \Delta$, $\mu = 0$ и $t_l = t_r = 0$ (условие (3.2) выполняется). Соответствующие собственные функции имеют вид (см. (3.4))

$$\Psi_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^T, \quad \Psi_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0)^T.$$

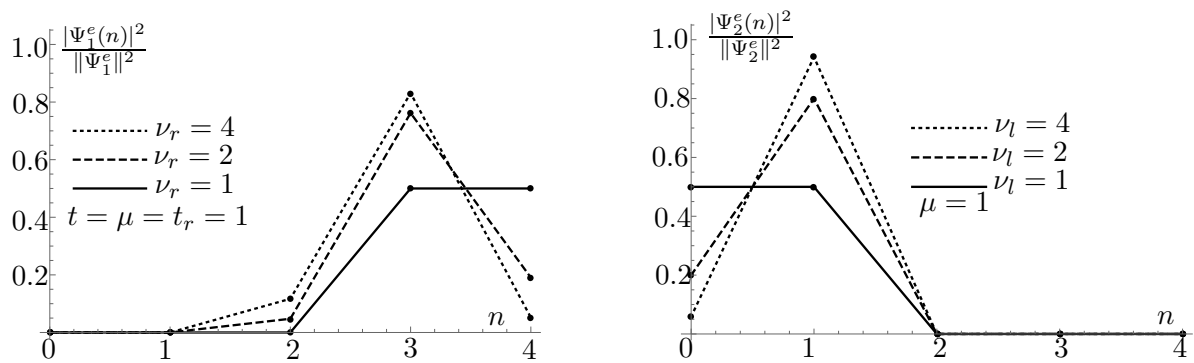


Рис. 6. Графики функций $|\Psi_j^e|^2/\|\Psi_j^e\|^2$, $j = 1, 2$, при $t = \Delta$, $L = 0$. Здесь Ψ_1^e – электронная часть волновой функции $\Psi_3 - \frac{\mu R}{2t^2}\Psi_4$, а Ψ_2^e – электронная часть Ψ_4

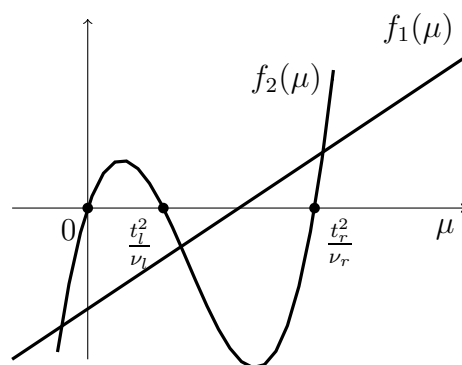


Рис. 7. Схематичный график левой $f_1(\mu)$ и правой $f_2(\mu)$ частей равенства (3.21)

Замечание 3.2. Рассмотрим равенство (3.2):

$$\left(2\mu - \frac{t_l^2}{\nu_l} - \frac{t_r^2}{\nu_l}\right)(t^2 - \Delta^2) = \mu\left(\mu - \frac{t_l^2}{\nu_l}\right)\left(\mu - \frac{t_r^2}{\nu_r}\right). \quad (3.21)$$

Левую часть (3.21) обозначим $f_1(\mu)$, а правую $f_2(\mu)$. Графиком $f_1(\mu)$ является прямая с угловым коэффициентом $2(t^2 - \Delta^2)$ (см. рис. 7). При $t = \Delta$ прямая будет горизонтальной. Графиком $f_2(\mu)$ является кубическая парабола (см. рис. 7). Очевидно, что (3.21) имеет от одного до трех решений в зависимости от значений параметров.

Финансирование. Исследования Тинюковой Т. С. выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009. Исследования Чубурина Ю. П. поддержаны ФТИ УрО РАН, рег. номер ЕГИСУ НИОКТР: 124021900019-5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Elliott S. R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics // Reviews of Modern Physics. 2015. Vol. 87. No. 1. P. 137–163. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.87.137>
2. von Oppen F., Peng Yang, Pientka F. Topological superconducting phases in one dimension // Topological aspects of condensed matter physics. Oxford: Oxford University Press, 2017. P. 387–450. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198785781.003.0009>

3. Вальков В. В., Шустин М. С., Аксенов С. В., Злотников А. О., Федосеев А. Д., Мицкан В. А., Каган М. Ю. Топологическая сверхпроводимость и майорановские состояния в низкоразмерных системах // *Успехи физических наук*. 2022. Т. 192. № 1. С. 3–44.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.03.038950>
4. Souto R. S., Aguado R. Subgap states in semiconductor-superconductor devices for quantum technologies: Andreev qubits and minimal Majorana chains // *New Trends and Platforms for Quantum Technologies*. Cham: Springer, 2024. P. 133–223. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55657-9_3
5. Kitaev A. Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires // *Успехи физических наук*. 2001. Т. 171. Приложение к № 10. С. 131–136. <https://www.mathnet.ru/rus/ufn5648>
6. Nayak C., Simon S. H., Stern A., Freedman M., Das Sarma S. Non-Abelian anyons and topological quantum computation // *Reviews of Modern Physics*. 2008. Vol. 80. Issue 3. P. 1083–1159.
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1083>
7. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems // *Reports on Progress in Physics*. 2012. Vol. 75. No. 7. 076501. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501>
8. Dvir T., Wang Guanzhong, van Loo N., Liu Chun-Xiao, Mazur G. P., Bordin A., ten Haaf S. L. D., Wang Ji-Yin, van Driel D., Zatelli F., Li Xiang, Malinowski F. K., Gazibegovic S., Badawy G., Bakkers E. P. A. M., Wimmer M., Kouwenhoven L. P. Realization of a minimal Kitaev chain in coupled quantum dots // *Nature*. 2023. Vol. 614. No. 7948. P. 445–450.
<https://doi.org/10.1038/s41586-022-05585-1>
9. Zatelli F., van Driel D., Xu Di, Wang Guanzhong, Liu Chun-Xiao, Bordin A., Roovers B., Mazur G. P., van Loo N., Wolff J. C., Bozkurt A. M., Badawy G., Gazibegovic S., Bakkers E. P. A. M., Wimmer M., Kouwenhoven L. P., Dvir T. Robust poor man’s Majorana zero modes using Yu-Shiba–Rusinov states // *Nature Communications*. 2024. Vol. 15. No. 1. Article No. 7933.
<https://doi.org/10.1038/s41467-024-52066-2>
10. Dourado R. A., Leijnse M., Souto R. S. Majorana sweet spots in three-site Kitaev chains // *Physical Review B*. 2025. Vol. 111. Issue 23. 235409. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.111.235409>
11. Тинюкова Т. С., Чубурин Ю. П. Майорановские состояния в неэрмитовой бесконечной модели Боголюбова–де Жена с невязимными переходами // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*. 2025. Т. 66. С. 103–114.
<https://doi.org/10.35634/2226-3594-2025-66-08>
12. Souto R. S., Tsintzis A., Leijnse M., Danon J. Probing Majorana localization in minimal Kitaev chains through a quantum dot // *Physical Review Research*. 2023. Vol. 5. Issue 4. 043182.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.5.043182>
13. Dourado R. A., Egues J. C., Penteado P. H. Two-site Kitaev sweet spots evolving into topological islands // *Physical Review B*. 2026. Vol. 113. Issue 3. 035432. <https://doi.org/10.1103/wptk-lvc5>
14. Cayao J., Aguado R. Non-Hermitian minimal Kitaev chains // *Physical Review B*. 2025. Vol. 111. Issue 20. 205432. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.111.205432>
15. Luethi M., Legg H. F., Loss D., Klinovaja J. From perfect to imperfect poor man’s Majoranas in minimal Kitaev chains // *Physical Review B*. 2024. Vol. 110. Issue 24. 245412.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.110.245412>
16. Pino D. M., Souto R. S., Aguado R. Minimal Kitaev-transmon qubit based on double quantum dots // *Physical Review B*. 2024. Vol. 109. Issue 7. 075101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.109.075101>

Поступила в редакцию 10.03.2026

Принята к публикации 06.06.2026

Тинюкова Татьяна Сергеевна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1043-4753>

E-mail: ttinyukova@mail.ru

Чубурин Юрий Павлович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, УдмФИЦ УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2621-6892>

E-mail: chuburin@udman.ru

Цитирование: Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин. Майорановские локализованные состояния в решеточной модели Боголюбова–де Жена с малым числом узлов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 2. С. 296–308.

T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin

Majorana bound states in the Bogolyubov–de Gennes lattice model with a small number of sites

Keywords: Bogolyubov–de Gennes model, eigenfunctions, Majorana bound states.

MSC2020: 81Q10, 81Q15, 47A10, 47A40

DOI: [10.35634/vm260206](https://doi.org/10.35634/vm260206)

Lattice models with a small number of sites are analytically studied. They represent sections of the infinite Bogolyubov–de Gennes model. For the zero eigenvalue (zero energy), conditions for the existence and analytical expressions for the eigenfunctions are found, including those describing Majorana bound states.

Funding. The research of Tinyukova T. S. was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the state assignment, project FEWS-2024-0009. The research of Chuburin Yu. P. was supported by the Physical-Technical Institute of the Ural Branch of the RAS, registration number 124021900019-5.

REFERENCES

1. Elliott S. R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics, *Reviews of Modern Physics*, 2015, vol. 87, no. 1, pp. 137–163. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.87.137>
2. von Oppen F., Peng Yang, Pientka F. Topological superconducting phases in one dimension, *Topological aspects of condensed matter physics*, Oxford: Oxford University Press, 2017, pp. 387–450. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198785781.003.0009>
3. Val'kov V. V., Shustin M. S., Aksenov S. V., Zlotnikov A. O., Fedoseev A. D., Mitskan V. A., Kagan M. Yu. Topological superconductivity and Majorana states in low-dimensional systems, *Physics-Uspekhi*, 2022, vol. 65, no. 1, pp. 2–39. <https://doi.org/10.3367/ufne.2021.03.038950>
4. Souto R. S., Aguado R. Subgap states in semiconductor-superconductor devices for quantum technologies: Andreev qubits and minimal Majorana chains, *New Trends and Platforms for Quantum Technologies*, Cham: Springer, 2024, pp. 133–223. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55657-9_3
5. Kitaev A. Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires, *Physics-Uspekhi*, 2001, vol. 44, issue 10 suppl., pp. s131–s136. <https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29>
6. Nayak C., Simon S. H., Stern A., Freedman M., Das Sarma S. Non-Abelian anyons and topological quantum computation, *Reviews of Modern Physics*, 2008, vol. 80, issue 3, pp. 1083–1159. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1083>
7. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems, *Reports on Progress in Physics*, 2012, vol. 75, no. 7, 076501. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501>
8. Dvir T., Wang Guanzhong, van Loo N., Liu Chun-Xiao, Mazur G. P., Bordin A., ten Haaf S. L. D., Wang Ji-Yin, van Driel D., Zatelli F., Li Xiang, Malinowski F. K., Gazibegovic S., Badawy G., Bakkers E. P. A. M., Wimmer M., Kouwenhoven L. P. Realization of a minimal Kitaev chain in coupled quantum dots, *Nature*, 2023, vol. 614, no. 7948, pp. 445–450. <https://doi.org/10.1038/s41586-022-05585-1>
9. Zatelli F., van Driel D., Xu Di, Wang Guanzhong, Liu Chun-Xiao, Bordin A., Roovers B., Mazur G. P., van Loo N., Wolff J. C., Bozkurt A. M., Badawy G., Gazibegovic S., Bakkers E. P. A. M., Wimmer M., Kouwenhoven L. P., Dvir T. Robust poor man's Majorana zero modes using Yu-Shiba-Rusinov states, *Nature Communications*, 2024, vol. 15, no. 1, article no. 7933. <https://doi.org/10.1038/s41467-024-52066-2>
10. Dourado R. A., Leijnse M., Souto R. S. Majorana sweet spots in three-site Kitaev chains, *Physical Review B*, 2025, vol. 111, issue 23, 235409. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.111.235409>
11. Tinyukova T. S., Chuburin Yu. P. Majorana states in the non-Hermitian infinite Bogolyubov–de Gennes model with non-reciprocal transitions, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurt-*

skogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2025, vol. 66, pp. 103–114.

<https://doi.org/10.35634/2226-3594-2025-66-08>

12. Souto R. S., Tsintzis A., Leijnse M., Danon J. Probing Majorana localization in minimal Kitaev chains through a quantum dot, *Physical Review Research*, 2023, vol. 5, issue 4, 043182. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.5.043182>
13. Dourado R. A., Egues J. C., Penteadó P. H. Two-site Kitaev sweet spots evolving into topological islands, *Physical Review B*, 2026, vol. 113, issue 3, 035432. <https://doi.org/10.1103/wptk-lvc5>
14. Cayao J., Aguado R. Non-Hermitian minimal Kitaev chains, *Physical Review B*, 2025, vol. 111, issue 20, 205432. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.111.205432>
15. Luethi M., Legg H. F., Loss D., Klinovaja J. From perfect to imperfect poor man's Majoranas in minimal Kitaev chains, *Physical Review B*, 2024, vol. 110, issue 24, 245412. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.110.245412>
16. Pino D. M., Souto R. S., Aguado R. Minimal Kitaev-transmon qubit based on double quantum dots, *Physical Review B*, 2024, vol. 109, issue 7, 075101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.109.075101>

Received 10.03.2026

Accepted 06.06.2026

Tatyana Sergeevna Tinyukova, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1043-4753>

E-mail: ttinyukova@mail.ru

Yurii Pavlovich Chuburin, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2621-6892>

E-mail: chuburin@ftiudm.ru

Citation: T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin. Majorana bound states in the Bogolyubov–de Gennes lattice model with a small number of sites, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 2, pp. 296–308.