

УДК 517.926, 517.929

© Э. А. Фахразиева

ПРИМЕР ЛИНЕЙНОЙ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ С НЕУСТОЙЧИВЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА

Для линейной гибридной дискретно-непрерывной системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) \end{cases} \quad (1)$$

введены понятия полного спектра показателей Ляпунова и его устойчивости по отношению к малым возмущениям коэффициентов системы. Приведен пример системы вида (1) с неустойчивым полным спектром показателей Ляпунова.

Ключевые слова: линейная гибридная дискретно-непрерывная система, показатели Ляпунова.

DOI: [10.35634/vm260207](https://doi.org/10.35634/vm260207)

Рассмотрим линейную однородную гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k), \end{cases} \quad (1)$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$; функция $A_{11}: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ограничена, кусочно непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода, не имеющие точек сгущения; функции $A_{j2}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$ ($j = 1, 2$) и $A_{21}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ ограничены. Пусть

$$\sup_{t \geq 1} \|A_{11}(t)\| \leq a, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_{j2}(k)\| \leq a \quad (j = 1, 2), \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_{21}(k)\| \leq a. \quad (2)$$

В качестве матричной нормы здесь рассматривается максимальная столбцовая норма [1, с. 356], которая для матрицы $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{m,\ell} \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$ определяется равенством $\|B\| = \max_{1 \leq j \leq \ell} \sum_{i=1}^m |b_{ij}|$, и которая подчинена векторной l_1 -норме пространств \mathbb{R}^ℓ и \mathbb{R}^m .

Положим $n \doteq n_1 + n_2$. Систему (1) отождествим с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Множество всех систем вида (1), удовлетворяющих поставленным условиям, обозначим \mathcal{M}_n . Метрика в этом множестве – равномерная на $[1, +\infty)$: $\|A\|_C \doteq \sup_{t \in [1, +\infty)} \|A(t)\|$.

Решением системы (1) назовем функцию

$$z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N},$$

такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (1) при $t \in (k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, кроме, возможно, точек разрыва функции $A_{11}(\cdot)$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на $[1, +\infty)$.

Пусть $X(t, s)$ – матрица Коши системы $\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t)$.

Утверждение 1. Если $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n$ и выполнены неравенства (2), то для каждого решения $z(\cdot)$ системы (1) и всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива двусторонняя оценка

$$\|z(k)\|(1 + e^a(a + 1))^{-1} \leq \|z(t)\| \leq \|z(k)\|(1 + e^a(a + 1)), \quad t \in [k, k + 1). \quad (3)$$

Доказательство. Возьмем произвольное решение $z(\cdot)$ системы (1), любое $k \in \mathbb{N}$ и любое $t \in [k, k + 1)$. Тогда

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} = \text{col}(x_1(t), \dots, x_{n_1}(t), y_1(k), \dots, y_{n_2}(k)) \doteq \text{col}(z_1(t), \dots, z_n(t)).$$

Для нормы этого вектора имеет место равенство

$$\|z(t)\| = \sum_{l=1}^n |z_l(t)| = \sum_{i=1}^{n_1} |x_i(t)| + \sum_{j=1}^{n_2} |y_j(k)| = \|x(t)\| + \|y(k)\|.$$

Тогда $\|x(t)\| \leq \|z(t)\|$ и $\|y(k)\| \leq \|z(t)\|$.

Из системы (1) в силу формулы Коши

$$x(t) = X(t, k)x(k) + \int_k^t X(t, s) ds \cdot A_{12}(k)y(k).$$

Заметим, что $\|X(\tau, s)\| \leq e^a$ при $|\tau - s| \leq 1$, поэтому

$$\|x(t)\| \leq e^a \|x(k)\| + ae^a \|y(k)\| \leq (a + 1)e^a \|z(k)\|.$$

Следовательно,

$$\|z(t)\| = \|x(t)\| + \|y(k)\| \leq (a + 1)e^a \|z(k)\| + \|z(k)\| = ((a + 1)e^a + 1) \|z(k)\|.$$

С другой стороны,

$$x(k) = X(k, t)x(t) + \int_t^k X(k, s) ds \cdot A_{12}(k)y(k),$$

поэтому

$$\|x(k)\| \leq e^a \|x(t)\| + ae^a \|y(k)\| \leq e^a \|z(t)\| + ae^a \|z(t)\| = e^a(a + 1) \|z(t)\|$$

и

$$\|z(k)\| = \|x(k)\| + \|y(k)\| \leq e^a(a + 1) \|z(t)\| + \|z(t)\| = (1 + e^a(a + 1)) \|z(t)\|,$$

следовательно,

$$\|z(t)\| \geq \|z(k)\|(1 + e^a(a + 1))^{-1}. \quad \square$$

Положим

$$Z(k + 1, k) = \begin{pmatrix} X(k + 1, k) & \int_k^{k+1} X(k + 1, s) ds \cdot A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$Z(k, l) = Z(k, k - 1)Z(k - 1, k - 2) \dots Z(l + 1, l), \quad k, l \in \mathbb{N}, \quad k > l,$$

$$Z(k, k) = E, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда [2] для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (1) имеет место равенство

$$z(k) = Z(k, l)z(l) \quad (4)$$

при всех $k, l \in \mathbb{N}$, $k \geq l$. Будем называть матрицу $Z(k, l)$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k \geq l$, *матрицей Коши* гибридной системы (1) в целочисленные моменты времени.

Обозначим через \mathcal{M}_n^0 подмножество множества \mathcal{M}_n , состоящее из систем вида (1), для которых последовательность $(Z(k+1, k))_{k \in \mathbb{N}}$ вполне ограничена [3], то есть при каждом $k \in \mathbb{N}$ существует $Z^{-1}(k+1, k)$, и найдется такое $b \geq 1$, что при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$\|Z(k+1, k)\| \leq b, \quad \|Z^{-1}(k+1, k)\| \leq b. \quad (5)$$

Заметим, что ограниченность последовательности $(Z(k+1, k))_{k \in \mathbb{N}}$ вытекает непосредственно из оценок (2), причем $\|Z(k+1, k)\| \leq a + ae^a + e^a$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, отметим, что если $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$, то можно определить матрицу Коши $Z(k, l)$ системы (1) при всех натуральных $k < l$ равенством $Z(k, l) = Z^{-1}(l, k)$, и тогда соотношение (4) выполнено для произвольного решения $z(\cdot)$ этой системы при всех $k, l \in \mathbb{N}$.

Предположение 1. Всюду ниже будем предполагать, что система (1) принадлежит множеству \mathcal{M}_n^0 .

Утверждение 2. Если $z(\cdot)$ — решение системы (1) такое, что $z(l) \neq 0$ при некотором $l \in \mathbb{N}$, то $z(k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство следует непосредственно из равенства (4) и из того, что определители $\det Z(k, l) \neq 0$ при всех $k, l \in \mathbb{N}$. \square

Лемма 1. Если $z(\cdot)$ — решение системы (1), такое, что $z(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \geq 1$, то $z(t) \equiv 0$ на $[1, +\infty)$.

Доказательство. Возьмем $k_0 \doteq [t_0]$ — целая часть числа t_0 . Тогда из оценки (3) получим равенство $z(k_0) = 0$. Из утверждения 2 вытекает, что $z(k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Но тогда из утверждения 1 следует равенство $z(t) = 0$ для всех $t \in [k, k+1)$. В силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ получаем тождество $z(t) \equiv 0$ на $[1, +\infty)$. \square

Следствие 1. Тривиальное решение системы (1) определяется начальным условием $z(1) = 0$. Если $z(1) \neq 0$, то $z(t) \neq 0$ для всех $t \geq 1$.

Определение 1 (см. [4]). Для произвольного нетривиального решения $z(\cdot)$ системы (1) определим его *показатель Ляпунова* равенством

$$\lambda[z] \doteq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|z(t)\|.$$

Утверждение 3. Для всякого нетривиального решения $z(\cdot)$ системы (1) справедливо равенство

$$\lambda[z] = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|z(k)\|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\lambda[z] = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|z(t)\| \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|z(k)\|, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in [1, +\infty).$$

Докажем, что $\lambda[z] \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|z(k)\|$.

Пусть $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность, на которой реализуется $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|z(t)\|$. Тогда из правой части оценки (3) получаем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|z(t)\| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{t_j} \ln \|z(t_j)\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{[t_j]}{t_j} \cdot \frac{1}{[t_j]} \ln \|z(t_j)\| \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{[t_j]} \ln((a+1)e^a + 1) \|z([t_j])\| = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{[t_j]} \ln \|z([t_j])\| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|z(k)\|, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lambda[z] = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|z(k)\|, \quad k \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Следствие 2. Если $z(\cdot)$ — произвольное нетривиальное решение системы (1), то его показатель Ляпунова конечен и удовлетворяет оценкам

$$-\ln b \leq \lambda[z] \leq \ln b,$$

где $b \geq 1$ — величина из неравенств (5).

Доказательство. Из равенства $z(k) = Z(k, 1)z(1) = \prod_{j=1}^{k-1} Z(j+1, j)z(1)$ и неравенств (5) получаем оценки $\|z(k)\| \leq b^{k-1} \|z(1)\|$ и

$$\lambda[z] = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \ln \|z(k)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \ln b^{k-1} = \ln b.$$

С другой стороны,

$$\frac{\|z(k)\|}{\|z(1)\|} \geq \|Z^{-1}(k, 1)\|^{-1} \geq b^{-k+1},$$

поэтому

$$\lambda[z] = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \ln \|z(k)\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \ln(b^{-k+1} \|z(1)\|) = -\ln b. \quad \square$$

Определение 2. Спектром показателей Ляпунова системы (1) называется множество $\Lambda(A)$ чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для каждого из которых найдется нетривиальное решение системы (1), показатель Ляпунова которого совпадает с числом λ .

Следствие 3. Спектр показателей Ляпунова системы (1) состоит не более чем из n различных чисел и расположен на отрезке $[-\ln b, \ln b]$.

Доказательство. Рассмотрим линейную однородную систему с дискретным временем

$$z(k+1) = Z(k+1, k)z(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

матрица $(Z(k+1, k))_{k \in \mathbb{N}}$ которой вполне ограничена и для которой выполнены неравенства (5). Тогда из утверждения 3 следует, что спектры систем (1) и (6) совпадают. Из теоремы 3.2 [5, с. 52] получаем, что спектр системы (6) состоит не более чем из n различных чисел, а из следствия 2 — что он расположен на отрезке $[-\ln b, \ln b]$, поэтому этими же свойствами обладает и спектр системы (1). \square

Определение 3 (см. [6]). Показателями Ляпунова системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ будем называть величины

$$\lambda_i(A) \doteq \inf_{F \in \mathcal{G}^i} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \ln \|Z|_F(k, 1)\|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где \mathcal{G}^i — множество i -мерных линейных подпространств пространства \mathbb{R}^n , $Z|_F$ — сужение оператора Коши системы $A(\cdot)$ на подпространство $F \subset \mathbb{R}^n$. Полным спектром показателей Ляпунова системы $A(\cdot)$ назовем набор $\lambda(A) \doteq (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A))$.

Обозначим через $z(t; z^0)$, $t \in [1, +\infty)$, решение системы (1) с начальным условием $z(1) = z^0$. Тогда для произвольного i -мерного линейного подпространства F пространства \mathbb{R}^n имеем равенство

$$\|Z|_F(k, 1)\| = \max_{z^0 \in F \setminus \{0\}} \frac{\|z(k; z^0)\|}{\|z^0\|},$$

поэтому

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \ln \|Z|_F(k, 1)\| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \ln \left(\max_{z^0 \in F \setminus \{0\}} \frac{\|z(k; z^0)\|}{\|z^0\|} \right) = \max_{z^0 \in F \setminus \{0\}} \lambda[z(\cdot; z^0)] \in \Lambda(A).$$

Из конечности множества $\Lambda(A)$ следует, что \inf в формуле (7) достигается и

$$\lambda_i(A) = \min_{F \in \mathcal{G}^i} \max_{z^0 \in F \setminus \{0\}} \lambda[z(\cdot; z^0)], \quad i = 1, \dots, n.$$

Кроме того, $\lambda_i(A) \in \Lambda(A)$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, поэтому $\lambda(A) \subset \Lambda(A)$.

Заметим также, что $\lambda_1(C) \leq \lambda_2(C) \leq \dots \leq \lambda_n(C)$ для любой системы $C(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$, поэтому полный спектр каждой такой системы принадлежит множеству \mathbb{R}_{\leq}^n всех упорядоченных по неубыванию наборов n чисел. Метрику во множестве \mathbb{R}_{\leq}^n полагаем индуцированной нормой пространства \mathbb{R}^n . Итак, имеем отображение $C \mapsto \lambda(C)$, определенное на \mathcal{M}_n^0 и действующее в \mathbb{R}_{\leq}^n .

Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A)) \doteq \left\{ \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_{\leq}^n : \sum_{i=1}^n |\mu_i - \lambda_i(A)| < \varepsilon \right\}.$$

Наряду с системой (1) рассмотрим также возмущенную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_{11}(t) + Q_{11}(t))x(t) + (A_{12}(k) + Q_{12}(k))y(k), \\ y(k+1) = (A_{21}(k) + Q_{21}(k))x(k) + (A_{22}(k) + Q_{22}(k))y(k), \end{cases} \quad (8)$$

в которой каждое возмущение $Q_{ij}(\cdot)$ обладает теми же свойствами, что и соответствующий матричный коэффициент $A_{ij}(\cdot)$, $i, j \in \{1, 2\}$. Систему (8) отождествляем с матрицей $A(\cdot) + Q(\cdot)$, где

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(k) \\ Q_{21}(k) & Q_{22}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим $\|Q\|_C \doteq \sup_{t \in [1, +\infty)} \|Q(t)\|$.

Заметим, что если $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$, то при достаточно малой $\|Q\|_C$ система $A(\cdot) + Q(\cdot)$ также принадлежит множеству \mathcal{M}_n^0 , поэтому для нее определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A + Q) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$.

Определение 4 (см. [7]). Полный спектр показателей Ляпунова системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ называется *устойчивым*, если отображение $C \mapsto \lambda(C)$ непрерывно в точке $C \equiv A$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждой системы (8), удовлетворяющей условию $\|Q\|_C < \delta$, выполнено включение $\lambda(A + Q) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A))$.

Эффект неустойчивости показателей Ляпунова при малых возмущениях матрицы коэффициентов линейной системы с непрерывным временем был установлен О. Перроном в работе [8] (см. также [9]). Пример такой системы с дискретным временем был сконструирован в работе [10]. В настоящей статье построен пример линейной гибридной дискретно-непрерывной системы с неустойчивыми показателями Ляпунова.

Пример 1. Рассмотрим гибридную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}(t)x(t) + a_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = a_{21}(k)x(k) + a_{22}(k)y(k), \end{cases} \quad (9)$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, с матрицей коэффициентов

$$A(t) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & \exp((k+1) \sin \ln(k+1) - k \sin \ln k - 2a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N},$$

где параметр $a \in (0, 1)$.

Введем в рассмотрение функции

$$f(t) = t \sin \ln t, \quad \varphi(t) = e^{-f(t)}.$$

Тогда матрицу $A(\cdot)$ системы (9) можно записать в виде

$$A(t) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & \frac{\varphi(k)}{\varphi(k+1)e^{2a}} \end{pmatrix}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Матрица Коши системы (9) имеет вид

$$Z(k+1, k) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ 0 & \frac{\varphi(k)}{\varphi(k+1)e^{2a}} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, для всех $k, l \in \mathbb{N}$, где $k > l$, выполнены равенства

$$Z(k, l) = Z(k, k-1)Z(k-1, k-2) \dots Z(l+1, l) = \begin{pmatrix} e^{-a(k-l)} & 0 \\ 0 & \frac{\varphi(l)}{\varphi(k)e^{2a(k-l)}} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что для системы (9) последовательность $(Z(k+1, k))_{k \in \mathbb{N}}$ вполне ограничена. Заметим, что

$$Z^{-1}(k+1, k) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & \frac{\varphi(k+1)e^{2a}}{\varphi(k)} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$|f'(t)| = |\sin \ln t + \cos \ln t| = \left| \sqrt{2} \sin\left(\ln t + \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \sqrt{2}, \quad t \geq 1, \quad (10)$$

то для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$|f(k+1) - f(k)| \leq \max_{t \in [k, k+1]} f'(t) \leq \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(k)}{\varphi(k+1)e^{2a}} \right| &= e^{-f(k)+f(k+1)-2a} \leq e^{|f(k+1)-f(k)|-2a} \leq e^{\sqrt{2}-2a}, \\ \left| \frac{\varphi(k+1)e^{2a}}{\varphi(k)} \right| &= e^{-f(k+1)+f(k)+2a} \leq e^{|f(k+1)-f(k)|+2a} \leq e^{\sqrt{2}+2a}, \end{aligned} \quad (11)$$

откуда вытекает полная ограниченность последовательности $(Z(k+1, k))_{k \in \mathbb{N}}$.

Рассмотрим решения $z^1(\cdot)$ и $z^2(\cdot)$ системы (9), удовлетворяющие начальным условиям

$$z^j(1) = e_j, \quad j = 1, 2,$$

где $e_1 = \text{col}(1, 0)$, $e_2 = \text{col}(0, 1)$. Тогда при всех $k > 1$

$$z^1(k) = Z(k, 1)e_1 = \begin{pmatrix} e^{-a(k-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varphi(k)e^{2a(k-1)}} \end{pmatrix} e_1 = \begin{pmatrix} e^{-a(k-1)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$z^2(k) = Z(k, 1)e_2 = \begin{pmatrix} e^{-a(k-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varphi(k)e^{2a(k-1)}} \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\varphi(k)e^{2a(k-1)}} \end{pmatrix}.$$

Вычислим характеристические показатели Ляпунова этих решений:

$$\lambda[z^1] = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |e^{-a(k-1)}| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{-ak + a}{k} = -a,$$

$$\lambda[z^2] = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |e^{k \sin \ln k - 2a(k-1)}| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k \sin \ln k - 2a(k-1)}{k} =$$

$$= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sin \ln k + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-2ak + 2a}{k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sin \ln k - 2a.$$

Известно, что (см., например, [10, с. 172]) $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sin \ln k = 1$, поэтому $\lambda[z^2] = 1 - 2a$. Поскольку $a < 1$, то $\lambda[z^1] < \lambda[z^2]$. Следовательно, полный спектр показателей Ляпунова системы (9) состоит из чисел

$$\lambda_1(A) = \lambda[z^1] = -a, \quad \lambda_2(A) = \lambda[z^2] = 1 - 2a.$$

Зафиксируем произвольное $\gamma > 0$ и рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t), \\ y(k+1) = \gamma \frac{e^{-ak-2a}}{\varphi(k+1)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau x(k) + \frac{\varphi(k)}{\varphi(k+1)e^{2a}} y(k), \end{cases} \quad (12)$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, а возмущение имеет вид

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(k) \\ q_{21}(k) & q_{22}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma \frac{e^{-ak-2a}}{\varphi(k+1)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Матрица Коши системы (12) имеет вид

$$Z_{A+Q}(k+1, k) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-ak-2a}}{\varphi(k+1)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau & \frac{\varphi(k)}{\varphi(k+1)e^{2a}} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Докажем, что последовательность $(Z_{A+Q}(k+1, k))_{k \in \mathbb{N}}$ вполне ограничена. Отметим, что

$$Z_{A+Q}^{-1}(k+1, k) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ -\gamma \frac{e^{-ak+a}}{\varphi(k)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau & \frac{\varphi(k+1)e^{2a}}{\varphi(k)} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как выполнено неравенство (10), то для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\hat{\tau} \in [k, k+1)$, в силу теоремы Лагранжа, справедливы неравенства

$$|f(k) - f(\hat{\tau})| = |k \sin \ln k - \hat{\tau} \sin \ln \hat{\tau}| \leq \max_{t \in [k, k+1]} |f'(t)| \cdot |k - \hat{\tau}| \leq \sqrt{2},$$

$$|f(k+1) - f(\hat{\tau})| = |(k+1) \sin \ln(k+1) - \hat{\tau} \sin \ln \hat{\tau}| \leq \max_{t \in [k, k+1]} |f'(t)| \cdot |k+1 - \hat{\tau}| \leq \sqrt{2}.$$

Оценим величину $\frac{1}{\varphi(k)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau$. В силу теоремы о среднем для определенного интеграла найдется $\hat{\tau} \in [k, k+1]$ такое, что

$$\int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau = \varphi(\hat{\tau}),$$

поэтому

$$\frac{1}{\varphi(k)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau = \frac{\varphi(\hat{\tau})}{\varphi(k)} = e^{k \sin \ln k - \hat{\tau} \sin \ln \hat{\tau}} = e^{f(k) - f(\hat{\tau})} \leq e^{|f(k) - f(\hat{\tau})|} \leq e^{\sqrt{2}}.$$

Аналогично получаем оценку

$$\frac{1}{\varphi(k+1)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau \leq e^{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\gamma \frac{e^{-ak-2a}}{\varphi(k+1)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau \leq \gamma e^{-ak-2a} e^{\sqrt{2}} \leq \gamma e^{-2a+\sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

а также

$$\left| -\gamma \frac{e^{-ak+a}}{\varphi(k)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau \right| \leq \gamma e^{-ak+a} e^{\sqrt{2}} \leq \gamma e^{a+\sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из (11) вытекает, что $(Z_{A+Q}(k+1, k))_{k \in \mathbb{N}}$ вполне ограничена.

При этом получаем оценку для нормы матрицы возмущения

$$\|Q(t)\| \leq q_{21}(k) = \gamma \frac{e^{-ak-2a}}{\varphi(k+1)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau \leq \gamma e^{-2a+\sqrt{2}}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда справедливо неравенство $\|Q\|_C < \delta$ при условии $\gamma < \delta e^{2a-\sqrt{2}}$.

Для каждого решения $\tilde{z}(\cdot)$ системы (12) и произвольного $k \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\begin{aligned} \tilde{z}(k+1) &= Z_{A+Q}(k+1, 1) \tilde{z}(1) = \prod_{l=1}^k Z_{A+Q}(l+1, l) \tilde{z}(1) = \\ &= Z_{A+Q}(k+1, k) Z_{A+Q}(k, k-1) \dots Z_{A+Q}(2, 1) \tilde{z}(1) = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-ak-2a}}{\varphi(k+1)} \int_k^{k+1} \varphi(\tau) d\tau & \frac{\varphi(k)}{\varphi(k+1)e^{2a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-a(k-1)-2a}}{\varphi(k)} \int_{k-1}^k \varphi(\tau) d\tau & \frac{\varphi(k-1)}{\varphi(k)e^{2a}} \end{pmatrix} \dots \\ &\dots \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-3a}}{\varphi(2)} \int_1^2 \varphi(\tau) d\tau & \frac{\varphi(1)}{\varphi(2)e^{2a}} \end{pmatrix} \tilde{z}(1) = \begin{pmatrix} e^{-ka} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-(2k+1)a}}{\varphi(k+1)} \int_1^{k+1} \varphi(\tau) d\tau & \frac{1}{\varphi(k+1)e^{2ka}} \end{pmatrix} \tilde{z}(1). \end{aligned}$$

Следовательно, решения возмущенной системы (12) с начальными условиями $\tilde{z}^j(1) = e_j$, $j = 1, 2$, имеют вид

$$\tilde{z}^1(k) = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1^1(k) \\ \tilde{z}_2^1(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-a(k-1)} \\ \gamma \frac{e^{-(2k-1)a}}{\varphi(k)} \int_1^k \varphi(\tau) d\tau \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}^2(k) = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1^2(k) \\ \tilde{z}_2^2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\varphi(k)e^{2(k-1)a}} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\tilde{z}^2(t) = z^2(t)$, поэтому $\lambda[\tilde{z}^2] = \lambda[z^2] = 1 - 2a$.

Оценим показатель Ляпунова решения $\tilde{z}^1(t)$. Для этого рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \frac{e^{-2at}}{\varphi(t)} \int_1^t \varphi(\tau) d\tau, \quad t \geq 1.$$

Возьмем последовательности

$$t_i = e^{(2i+1/2)\pi}, \quad m_i = [t_i] + 1, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда аналогично оценке, полученной в работе [10, с. 174], имеем

$$\psi(m_i) > e^{-2a} t_i (e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^{-\pi}) e^{(1-2a+e^{-\pi})t_i}.$$

Тогда

$$\tilde{z}_2^1(m_i) = \gamma e^a \psi(m_i) > \gamma e^{-a} t_i (e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^{-\pi}) e^{(1-2a+e^{-\pi})t_i},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \lambda[\tilde{z}^1] &\geq \lambda[\tilde{z}_2^1] \geq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{m_i} \ln |\tilde{z}_2^1(m_i)| \geq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln t_i + (1 - 2a + e^{-\pi})t_i}{m_i} = \\ &= \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln t_i + (1 - 2a + e^{-\pi})t_i}{t_i} \cdot \frac{t_i}{m_i} = 1 - 2a + e^{-\pi}. \end{aligned}$$

Следовательно, полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A + Q)$ возмущенной системы (12) состоит из чисел

$$\lambda_1(A + Q) = \lambda[\tilde{z}^2] = 1 - 2a, \quad \lambda_2(A + Q) = \lambda[\tilde{z}^1] \geq 1 - 2a + e^{-\pi},$$

а спектр невозмущенной системы (9) — из чисел

$$\lambda_1(A) = \lambda[z^1] = -a, \quad \lambda_2(A) = \lambda[z^2] = 1 - 2a.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1-a}{2} > 0$. Для любого $\delta > 0$ найдется допустимое возмущение $Q(\cdot)$ вида (13) такое, что $\|Q\|_C < \delta$, причем

$$|\lambda_1(A + Q) - \lambda_1(A)| = \lambda_1(A + Q) - \lambda_1(A) = 1 - 2a + a = 1 - a > \varepsilon.$$

Следовательно, $\lambda(A + Q) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A))$. Это означает, что показатели Ляпунова системы (9) неустойчивы.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. <https://zbmath.org/0734.15002>
2. Попова С. Н., Фахразиева Э. А. Равномерная полная управляемость линейных гибридных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 3. С. 395–407. <https://doi.org/10.35634/vm250304>
3. Демидович В. Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255. <https://www.mathnet.ru/rus/de759>
4. Ляпунов А. М. Собрание сочинений. Том 2. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. <https://zbmath.org/0192.31202>
5. Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. <https://zbmath.org/1022.93002>
6. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 8. С. 1408–1416. <https://www.mathnet.ru/rus/de4052>
7. Попова С. Н., Фахразиева Э. А. К свойству локальной назначаемости полного спектра показателей Ляпунова линейных гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61. № 8. С. 1150–1152. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=82793878>
8. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Mathematische Zeitschrift. 1930. Vol. 31. Issue 1. P. 748–766. <https://doi.org/10.1007/bf01246445>
9. Изобов Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.
10. Банщикова И. Н. Пример линейной дискретной системы с неустойчивыми показателями Ляпунова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 2. С. 169–176. <https://doi.org/10.20537/vm160203>

Поступила в редакцию 01.03.2026

Принята к публикации 01.06.2026

Фахразиева Эльмира Алмазовна, младший научный сотрудник, кафедра дифференциальных уравнений, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-8679-6554>

E-mail: elmiraf12@mail.ru

Цитирование: Э. А. Фахразиева. Пример линейной гибридной системы с неустойчивыми показателями Ляпунова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 2. С. 309–320.

E. A. Fakhrazieva

An example of a linear hybrid system with unstable Lyapunov spectrum

Keywords: linear hybrid discrete-continuous system, Lyapunov spectrum.

MSC2020: 34A38, 34D08, 39A30

DOI: [10.35634/vm260207](https://doi.org/10.35634/vm260207)

We consider a linear hybrid discrete-continuous system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k). \end{cases} \quad (1)$$

The concepts of the Lyapunov spectrum of system (1) and its stability with respect to small perturbations of the system coefficients are introduced. An example of a system of type (1) with an unstable Lyapunov spectrum is constructed.

Funding. The study was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the state assignment, project FEWS-2024-0009.

REFERENCES

1. Horn R. A., Johnson C. R. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1985. <https://zbmath.org/0576.15001>
Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989. <https://zbmath.org/0734.15002>
2. Popova S. N., Fakhrazieva E. A. Uniform complete controllability of linear hybrid systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 3, pp. 395–407 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/vm250304>
3. Demidovič V. B. A stability test for difference equations, *Differential Equations*, 1972, vol. 5, pp. 914–921. <https://zbmath.org/0253.39002>
4. Lyapunov A. M. *Sobranie sochinenii. Tom 2. Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* (Collected works. Vol. 2: The general problem of motion stability), Moscow–Leningrad: USSR Academy of Sciences, 1956. <https://zbmath.org/0192.31202>
5. Gaishun I. V. *Sistemy s diskretnym vremenem* (Discrete-time systems), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001. <https://zbmath.org/1022.93002>
6. Millionshchikov V. M. Baire function classes and Lyapunov indicies. I, *Differential Equations*, 1981, vol. 16, pp. 902–907. <https://zbmath.org/0487.34046>
7. Popova S. N., Fakhrazieva E. A. On the property of local assignability of the full spectrum of Lyapunov exponents of linear hybrid systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2025, vol. 61, no. 8, pp. 1150–1152 (in Russian). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=82793878>
8. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme, *Mathematische Zeitschrift*, 1930, vol. 31, issue 1, pp. 748–766. <https://doi.org/10.1007/bf01246445>
9. Izobov N. A. *Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova* (Introduction to the theory of Lyapunov exponents), Minsk: Belarusian State University, 2006.
10. Banshchikova I. N. An example of a linear discrete system with unstable Lyapunov exponents, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 2, pp. 169–176 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm160203>

Received 01.03.2026

Accepted 01.06.2026

El'mira Almazovna Fakhraieva, Junior Researcher, Department of Differential Equations, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-8679-6554>

E-mail: elmiraf12@mail.ru

Citation: E. A. Fakhraieva. An example of a linear hybrid system with unstable Lyapunov spectrum, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 2, pp. 309–320.