ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2026. Т. 36. Вып. 2. С. 321–337.

УДК 517.977

© *Е. С. Фомина*

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ С ВОЗМОЖНЫМ НАРУШЕНИЕМ В ДИНАМИКЕ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ПРОСТОЙ МАТРИЦЕЙ

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая системой вида

$$\dot{z}_i = f(t)z_i + a_i(t)u_i - v, \quad u_i \in U_i(t), \quad v \in V(t),$$

где функции $a_i(t)$ равны 1 при всех t, за исключением некоторого отрезка заданной длины, на котором они равны нулю (для каждого преследователя свой отрезок). Этот факт можно трактовать так, что у каждого из преследователей возможен отказ в работе управляющего устройства в любой заранее неизвестный момент времени, а длина промежутка времени, необходимого на устранение поломки, задана, при этом в процессе устранения поломки преследователи не имеют возможности осуществлять поимку. Целевые множества — выпуклые компакты. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования.

Ключевые слова: дифференциальные игры, преследователь, убегающий, поимка, поломка.

DOI: 10.35634/vm260208

Введение

При рассмотрении реальных динамических процессов возможны ситуации, при которых на управляемую систему воздействуют неконтролируемые помехи и, кроме того, у самой системы могут происходить сбои в работе. Поэтому вполне естественно изучать такие ситуации в рамках теории дифференциальных игр.

Одной из первых работ, посвященных задаче управления с возможным нарушением в динамике, была работа М. С. Никольского [1]. Задача конфликтного взаимодействия двух лиц на конечном промежутке времени при условии, что у преследователя в любой, заранее неизвестный момент времени может произойти отказ в работе управляющего устройства рассматривалась в работах [2, 3], где с помощью подхода Л. С. Понтрягина были получены достаточные условия разрешимости задачи преследования.

Линейная задача импульсного управления на конечном отрезке времени при наличии неконтролируемой помехи и с возможной поломкой рассматривалась в работе [4]. Цель процесса управления заключалась в том, чтобы значение линейной функции от фазовых координат в фиксированный момент времени принадлежало заданному отрезку. Были приведены достаточные условия разрешимости данной задачи.

В [5] на конечном промежутке времени рассматривалась задача управления с помехой, возможной поломкой и целевой функцией специального вида, в которой управление было построено из принципа гарантированного результата.

В [6] рассматривалась линейная дифференциальная игра удержания с простым движением, в которой первому игроку необходимо удерживать состояние системы в заданном выпуклом терминальном множестве на протяжении всего времени игры, несмотря на возможную поломку и управление второго игрока. В данной игре построен u-стабильный мост.

В [7, 8] рассматривалась задача управления параболической системой с помехами и возможными нарушениями в динамике. Линейные дифференциальные игры преследования двух лиц с возможным нарушением в динамике рассматривались в работах [9, 10], где методом разрешающих функций были получены достаточные условия разрешимости задачи преследования.

Следует отметить, что класс гибридных дифференциальных игр [11–14], в которых происходит изменение динамики хотя бы у одного из игроков в некоторый момент времени можно также рассматривать как модели конфликтов, в которых в этот момент времени происходит поломка у одной из сторон или появляется необходимость замены одного управляющего устройства на другое.

В данной статье рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая линейной нестационарной системой дифференциальных уравнений с простой матрицей. Предполагается, что у каждого из преследователей в заранее неизвестный момент времени возможна поломка управляющих устройств. Время, необходимое для устранения поломки, задано и оно известно всем участникам. Предложены два подхода к решению задачи. При первом подходе, после устранения поломки, преследователь компенсирует потери, связанные с поломкой. При втором подходе преследователи заменяют исходные целевые множества новыми целевыми множествами так, что поимка убегающего с новыми целями гарантирует поимку со старой целью. Получены достаточные условия поимки. Они дополняют результаты для простого преследования, представленные в [15].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n+1)$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающего E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = f(t)x_i + a_{\theta_i}(t)u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in U_i(t). \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = f(t)y + v, \quad y(t_0) = y^0, \quad v \in V(t). \tag{1.2}$$

Здесь $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, x_i, y, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$, $U_i(t)$, $V(t) \subset \mathbb{R}^k$ — измеримые, выпуклые компактнозначные отображения при $t \in [t_0, +\infty)$, непрерывные в метрике Хаусдорфа, $f\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция, функции $a_{\theta_i}\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^1$ имеют вид

$$a_{\theta_i}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\theta_i, \theta_i + h_i], \\ 1, & t \notin [\theta_i, \theta_i + h_i]. \end{cases}$$

Данные моменты θ_i можно рассматривать как моменты отказа управляющих устройств у преследователей P_i или θ_i — моменты начала профилактических работ управляющих устройств у преследователей P_i. Величины $h_i \geqslant 0$ — время ремонта или время проведения профилактических работ.

Из определения функций a_{θ_i} следует, что в процессе устранения поломки или в процессе проведения профилактических работ преследователи P_i не имеют возможности осуществлять поимку. Считается, что моменты θ_i, $i \in I$, неизвестны преследователям P_i, $i \in I$, и поломка или необходимость проведения профилактических работ может наступить в любой момент времени. Величины h_i, $i \in I$, известны всем участникам.

Введем новые переменные $z_i = x_i - y$. Тогда вместо систем (1.1), (1.2) получим систему

$$\dot{z}_i = f(t)z_i + a_{\theta_i}(t)u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{1.3}$$

Предполагаем, что терминальные множества $M_i(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, — выпуклые компакты в $\mathbb{R}^k$, причем $z_i^0 \notin M_i(t)$ для всех $i \in I$. Измеримая функция $v\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется *допустимой*, если $v(t) \in V(t)$ для всех $t \geqslant t_0$. Предысторией $v_t(\cdot)$ функции $v(\cdot)$ в момент t назовем сужение функции v на отрезок $[t_0, t]$.

Пусть Ξ_i — семейство отображений $\mathcal{F}_i(t, v_t(\cdot))$,

$$v(\cdot) \mapsto u_i(t) = \mathcal{F}_i(t, v_t(\cdot)),$$

определенных для каждого $t \geqslant t_0$ на множестве измеримых функций $v(\cdot)$, таких, что $v(s) \in V(s)$ для всех $s \geqslant t_0$, принимающих значения в $U_i(t)$ и обладающих свойством суперпозиционной измеримости (функция $u_i(t) = \mathcal{F}_i(t, v_t(\cdot))$ измерима при $t \geqslant t_0$ для любой измеримой функции $v(s)$, $s \geqslant t_0$) и физической осуществимости (пусть $t^* > t_0$, v_1, v_2 — две допустимые функции такие, что $v_1(t) = v_2(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t^*)$, тогда $\mathcal{F}_i(t^*, v_{1t^*}(\cdot)) = \mathcal{F}_i(t^*, v_{2t^*}(\cdot))$).

Определение 1.1. Стратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i называется пара

$$\mathcal{U}_i = \Big(\mathcal{F}_i^1\big(t, v_t(\cdot)\big), \mathcal{F}_i^{2\theta_i}\big(t, v_t(\cdot)\big)\Big),$$

где $\mathcal{F}_i^1(t, v_t(\cdot)) \in \Xi_i$, $\mathcal{F}_i^{2\theta_i}(t, v_t(\cdot)) \in \Xi_i$ для $\theta_i \geqslant t_0$.

Решение задачи Коши (1.3) при фиксированных $\mathcal{U}_i$, $\theta_i > t_0$, и измеримой функции $v(t) \in V(t)$, $t \geqslant t_0$, понимается так.

При $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_i$ оно совпадает с решением $w_i^1(t)$ следующей задачи Коши:

$$\dot{w}_i^1(t) = f(t) w_i^1(t) + \mathcal{F}_i^1(t, v_t(\cdot)) - v(t), \quad w_i^1(t_0) = z_i^0.$$

При $t \geqslant \theta_i$ оно совпадает с решением $w_i^2(t)$ следующей задачи Коши:

$$\dot{w}_i^2(t) = f(t) w_i^2(t) + a_{\theta_i}(t) \mathcal{F}_i^{2\theta_i}(t, v_t(\cdot)) - v(t), \quad w_i^2(\theta_i) = w_i^1(\theta_i).$$

Определение 1.2. Разностью по Минковскому множеств A и B называется множество

$$A \overset{*}{-} B = \{c\colon c + B \subset A\}.$$

Обозначим $F(t, s) = \exp \displaystyle\int_s^t f(u)\, du$.

§ 2. Поимка с компенсацией потерь

Введем многозначные отображения:

$$W_i(t, \tau, v) = F(t, \tau) U_i(\tau) - F(t, \tau) v, \quad v \in V(\tau),$$
$$W_i(t, \tau) = F(t, \tau) U_i(\tau) \overset{*}{-} F(t, \tau) V(\tau), \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Предположение 2.1. $W_i(t, \tau) \neq \varnothing$ для всех $i \in I$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Отображения $W_i(t, \tau)$ являются измеримыми и замкнутозначными. Значит для каждого $i \in I$ существует измеримый селектор $\gamma_i(t, \tau) \in W_i(t, \tau)$. Зафиксируем его и обозначим

$$\xi_i(t) = F(t, t_0) z_i^0 + \int_{t_0}^t \gamma_i(t, s)\, ds.$$

Предположение 2.2. $\xi_i(t) \notin M_i(t)$ для всех $i \in I$, $t \geqslant t_0$.

Предположение 2.3. Для каждого $i \in I$ существует $t_i > 0$ такое, что для всех $\theta_i > t_0$, $t > \theta_i + h_i$ справедливо включение

$$\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} \big(F(t,s)V(s) + \gamma_i(t,s)\big)\, ds \subset \int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i} \big(W_i(t,s) - \gamma_i(t,s)\big)\, ds.$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_i(t,\tau,v) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 \mid \lambda\big(M_i(t) - \xi_i(t)\big) \cap \big(W_i(t,\tau,v) - \gamma_i(t,\tau)\big) \neq \varnothing\big\},$$
$$\delta(t,\tau) = \min_{v \in V(\tau)} \max_i \lambda_i(t,\tau,v).$$

Предположение 2.4. Для всякого $\gamma > 0$ существует $T = T(\gamma) > t_0$ такое, что для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^1$ такого, что $\mu(E) \leqslant \gamma$ (μ — мера Лебега), выполнено неравенство

$$\int_{E_\gamma} \delta(T,s)\, ds \geqslant n, \quad \text{где} \quad E_\gamma = [t_0, T] \setminus E.$$

Определение 2.1. Пусть выполнены предположения 2.1, 2.3. В игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка, если существуют $T_0 > t_0$ и стратегии $\mathcal{U}_i$, $i \in I$, преследователей P_i, $i \in I$, такие, что для любого вектора $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_n)$ такого, что $\theta_i + h_i + t_i \leqslant T_0$, и любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $l \in I$, для которого $z_l(T_0) \in M_l(T_0)$.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2, 2.4. Тогда для любых $\varkappa_i > 0$, $i \in I$, найдется момент $T > t_0$ такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ и любых измеримых множеств E_i, $i \in I$, таких, что $\mu(E_i) \leqslant \varkappa_i$, найдется номер $l \in I$, для которого справедливо неравенство*

$$\int_{E_l(T)} \lambda_l(T,s,v(s))\, ds \geqslant 1, \quad \text{где} \quad E_l(T) = [t_0, T] \setminus E_l. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция. Пусть заданы $\varkappa_i > 0$, $i \in I$. Пусть E_i, $i \in I$, — измеримые множества такие, что $\mu(E_i) \leqslant \varkappa_i$, $i \in I$. Пусть $t > t_0 + \sum\limits_{i \in I} \varkappa_i$. Положим $E(t) := [t_0, t] \setminus \bigcup\limits_{i \in I} E_i$, $E_i(t) = [t_0, t] \setminus E_i$. Тогда $E(t) \neq \varnothing$. Далее имеем

$$\sum_{i \in I} \int_{E_i(t)} \lambda_i(t,s,v(s))\, ds \geqslant \sum_{i \in I} \int_{E(t)} \lambda_i(t,s,v(s))\, ds \geqslant \int_{E(t)} \max_{i \in I} \lambda_i(t,s,v(s))\, ds \geqslant$$
$$\geqslant \int_{E(t)} \delta(t,s)\, ds.$$

Из предположения 2.4 следует, что существует $T > t_0$ для которого $\displaystyle\int_{E(T)} \delta(T,s)\, ds \geqslant n$.

Тогда

$$\sum_{i \in I} \int_{E_i(T)} \lambda_i(T,s,v(s))\, ds \geqslant n.$$

Из последнего неравенства следует справедливость неравенства (2.1). □

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.3, 2.2, 2.4. Тогда в игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T_0 > t_0$ — момент времени, удовлетворяющий лемме 2.1 для множеств E_i таких, что $\mu(E_i) \leqslant h_i + t_i$, $i \in I$. Покажем, что поимка произойдет в момент T_0. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего E. Рассмотрим функции

$$h_i(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \lambda_i^0(T_0, s, v(s))\,ds,$$

где

$$\lambda_i^0(T_0, s, v(s)) = \begin{cases} \lambda_i(T_0, s, v(s)), & s \notin [\theta_i, \theta_i + h_i + t_i],\\ 0, & s \in [\theta_i, \theta_i + h_i + t_i]. \end{cases}$$

Из определения момента T_0 следует, что существуют номер $l \in I$ и момент $T_l \in [t_0, T_0]$, для которых $h_l(T_l) = 0$. Обозначим через T_i — первый момент времени, для которого $h_i(T_i) = 0$, если T_i существует. Иначе считаем, что $T_i = T_0$.

Задаем управления преследователей P_i, $i \in I$, следующим образом. Определим многозначные отображения $(v \in V(t))$

$$U_i^1(\tau, v) = \Big\{u_i \in U_i(\tau) \mid F(T_0, \tau)(u_i - v) - \gamma_i(T_0, \tau) \in \lambda_i(T_0, \tau, v)\big(M_i(T_0) - \xi_i(T_0)\big)\Big\},$$
$$U_i^2(\tau, v) = \big\{u_i \in U_i(\tau) \mid F(T_0, \tau)(u_i - v) - \gamma_i(T_0, \tau) = 0\big\}.$$

Многозначные отображения $U_i^1(\tau, v)$, $U_i^2(\tau, v)$, $i \in I$, измеримы и замкнутозначны. Из теоремы об измеримом выборе [16, теорема 8.3.1] следует, что у многозначных отображений $U_i^1(\tau, v)$, $U_i^2(\tau, v)$, $i \in I$, существуют измеримые селекторы $u_i^1(\tau, v)$, $u_i^2(\tau, v)$, $i \in I$, такие, что функции $u_i^1(t, v(t))$, $u_i^2(t, v(t))$ являются измеримыми.

Пусть $T_i \leqslant \theta_i$. На промежутке $[t_0, T_i)$ полагаем управление преследователя P_i, $i \in I$, равным

$$u_i(t) = u_i^1(t, v(t)). \tag{2.2}$$

На множестве $[T_i, \theta_i) \cup (\theta_i + h_i + t_i, T_0]$ полагаем

$$u_i(t) = u_i^2(t, v(t)). \tag{2.3}$$

Пусть $T_i \geqslant \theta_i$. Тогда $\theta_i + h_i + t_i \leqslant T_i \leqslant T_0$. Поэтому, на промежутках $[t_0, \theta_i)$, $(\theta_i + h_i + t_i, T_i]$ задаем управления преследователя P_i равенством (2.2), а на промежутке $(T_i, T_0]$ — равенством (2.3).

Рассмотрим отрезок $[\theta_i + h_i, \theta_i + h_i + t_i]$, $i \in I$. В момент $\theta_i + h_i$ преследователь P_i знает управление убегающего на отрезке $[\theta_i, \theta_i + h_i]$, и поэтому ему известен вектор

$$\omega_i = \int_{\theta_i}^{\theta_i + h_i} \big(F(T_0, s)v(s) + \gamma_i(T_0, s)\big)\,ds.$$

В силу предположения 2.3 имеем

$$\omega_i \in \int_{\theta_i + h_i}^{\theta_i + h_i + t_i} \big(W_i(T_0, s) - \gamma_i(T_0, s)\big)\,ds.$$

Из определения интеграла от многозначного отображения следует, что существует измеримый селектор $\omega_i(T_0, s) \in W_i(T_0, s) - \gamma_i(T_0, s)$ такой, что

$$\omega_i = \int_{\theta_i + h_i}^{\theta_i + h_i + t_i} \omega_i(T_0, s)\,ds.$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_i^3(\tau, v) = \{u_i \in U_i(\tau) \mid F(T_0, \tau)(u_i - v) - \gamma_i(T_0, \tau) - w_i(T_0, \tau) = 0\}.$$

У многозначного отображения $U_i^3(\tau, v)$ существует измеримый селектор $u_i^3(\tau, v)$, являющийся суперпозиционно измеримым. Задаем управления преследователей P_i, $i \in I$, на отрезке $[\theta_i + h_i, \theta_i + h_i + t_i]$, $i \in I$, полагая

$$u_i(t) = u_i^3(t, v(t)).$$

Покажем, что данный выбор управлений преследователей гарантирует поимку.

Пусть $T_l \leqslant \theta_l$, $\theta_l + h_l + t_l \leqslant T_0$. Тогда имеем

$$\begin{gathered} z_l(T_0) = \xi_l(T_0) + \int_{t_0}^{T_l} \big(F(T_0, s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds + \\ + \int_{T_l}^{\theta_l} \big(F(T_0, s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds - \int_{\theta_l}^{\theta_l + h_l} \big(F_l(T_0, s)v(s) + \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds + \\ + \int_{\theta_l + h_l}^{\theta_l + h_l + t_l} \big(F(T_0, s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds + \\ + \int_{\theta_l + h_l + t_l}^{T_0} \big(F(T_0, s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds. \end{gathered}$$

Из определения управлений преследователей получаем, что справедливы следующие соотношения

$$\begin{gathered} \int_{T_l}^{\theta_l} \big(F(T_0, s)\big(u_l^2(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds = 0, \\ \int_{\theta_l + h_l + t_l}^{T_0} \big(F(T_0, s)\big(u_l^2(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds = 0, \\ \int_{\theta_l}^{\theta_l + h_l} \big(F_l(T_0, s)v(s) + \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds = \int_{\theta_l + h_l}^{\theta_l + h_l + t_l} \big(F(T_0, s)\big(u_l^3(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds. \end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{gathered} z_l(T_0) = \xi_l(T_0) + \int_{t_0}^{T_l} \big(F(T_0, s)\big(u_l^1(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds \in \\ \in \xi_l(T_0) + \int_{t_0}^{T_l} \lambda_l(T_0, s, v(s))\big(M_l(T_0) - \xi_l(T_0)\big)\, ds = \\ = \xi_l(T_0)\left(1 - \int_{t_0}^{T_l} \lambda_l(T_0, s, v(s))\, ds\right) + \int_{t_0}^{T_l} \lambda_l(T_0, s, v(s)) M_l(T_0)\, ds = M_l(T_0). \end{gathered}$$

Если $T_l > \theta_l$, то $\theta_l + h_l + t_l \leqslant T_l \leqslant T_0$. Тогда

$$\begin{gathered} z_l(T_0) = \xi_l(T_0) + \int_{t_0}^{\theta_l} \big(F(T_0, s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds - \\ - \int_{\theta_l}^{\theta_l + h_l} \big(F(T_0, s)v(s) + \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds + \int_{\theta_l + h_l}^{\theta_l + h_l + t_l} \big(F(T_0, s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds + \\ + \int_{\theta_l + h_l + t_l}^{T_l} \big(F(T_0, s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds + \int_{T_l}^{T_0} \big(F(T_0, s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0, s)\big)\, ds. \end{gathered}$$

В силу выбора управлений преследователей получаем, что справедливы следующие соотношения:

$$\int_{T_l}^{T_0} \big(F(T_0,s)\big(u_l^2(s)-v(s)\big)-\gamma_l(T_0,s)\big)\,ds=0,$$

$$-\int_{\theta_l}^{\theta_l+h_l} \big(F_l(T_0,s)v(s)+\gamma_l(T_0,s)\big)\,ds+\int_{\theta_l+h_l}^{\theta_l+h_l+t_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l^3(s)-v(s)\big)-\gamma_l(T_0,s)\big)\,ds=0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
z_l(T_0)&=\xi_l(T_0)+\int_{t_0}^{\theta_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l^1(s)-v(s)\big)-\gamma_l(T_0,s)\big)\,ds+\\
&+\int_{\theta_l+h_l+t_l}^{T_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l^1(s)-v(s)\big)-\gamma_l(T_0,s)\big)\,ds\in\\
&\in \xi_l(T_0)+\int_{t_0}^{\theta_l}\lambda_l(T_0,s,v(s))\big(M_l(T_0)-\xi_l(T_0)\big)\,ds+\\
&+\int_{\theta_l+h_l+t_l}^{T_l}\lambda_l(T_0,s,v(s))\big(M_l(T_0)-\xi_l(T_0)\big)\,ds=\\
&=\xi_l(T_0)\left(1-\int_{t_0}^{\theta_l}\lambda_l(T_0,s,v(s))\,ds-\int_{\theta_l+h_l+t_l}^{T_l}\lambda_l(T_0,s,v(s))\,ds\right)+\\
&+\left(\int_{t_0}^{\theta_l}\lambda_l(T_0,s,v(s))\,ds+\int_{\theta_l+h_l+t_l}^{T_l}\lambda_l(T_0,s,v(s))\,ds\right)M_l(T_0)=M_l(T_0).
\end{aligned}$$

Получили, что $z_l(T_l)\in M_l(T_0)$.

Отметим, что случай $\theta_l>T_l$, $\theta_l+h_l+t_l>T_l$ невозможен в силу определения T_l. □

Следствие 2.1. *Пусть в системе* (1.3) $t_0=0$, $f(t)=0$ *для всех* $t\geqslant 0$ *и выполнены следующие условия:*

(1a) $W_i(t)=U_i(t)\overset{*}{-}V(t)\neq\varnothing$ *для всех* $i\in I$, $t\geqslant 0$;

(2a) *для каждого* $i\in I$ *существует измеримый селектор* $\gamma_i(t)\in W_i(t)$ *такой, что* $\xi_i(t)\notin M_i(t)$, $t\geqslant 0$, *где*

$$\xi_i(t)=z_i^0+\int_0^t\gamma_i(s)\,ds;$$

(3a) *для каждого* $i\in I$ *существует* $t_i>0$ *такое, что для всех* $\theta_i>0$ *справедливо включение*

$$\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i}\big(V(s)+\gamma_i(s)\big)\,ds\subset\int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i}\big(W_i(s)-\gamma_i(s)\big)\,ds;$$

(4a) *обозначим*

$$\begin{gathered}
\lambda_i(t,v)=\sup\big\{\lambda\geqslant 0\mid \lambda\big(M_i(t)-\xi_i(t)\big)\cap\big(W_i(t,v)-\gamma_i(t)\big)\neq\varnothing\big\},\\
\delta(t)=\min_{v\in V(t)}\max_i\lambda_i(t,v).
\end{gathered}\tag{2.4}$$

Для каждого $\gamma>0$ *существует* $T=T(\gamma)>t_0$ *такое, что для любого измеримого множества* $E\subset\mathbb{R}^1$ *такого, что* $\mu(E)\leqslant\gamma$ (μ — *мера Лебега*) *выполнено неравенство*

$$\int_{E_\gamma}\delta(s)\,ds\geqslant n,\quad \text{где}\ \ E_\gamma=[t_0,T]\setminus E.$$

Тогда в игре $\Gamma(n+1)$ *происходит поимка.*

Справедливость данного следствия вытекает из теоремы 2.1.

Следствие 2.2. *Пусть в системе* (1.3) $t_0 = 0$, $f(t) = 0$ *для всех* $t \geqslant 0$ *и выполнены следующие условия:*

(1b) $U_i(t) = V(t)$ *для всех* $i \in I$, $t \geqslant 0$;

(2b) *для каждого* $i \in I$ *существует измеримый селектор* $\gamma_i(t) \in W_i(t)$ *такой, что* $\xi_i(t) \notin M_i(t)$, $t \geqslant 0$, *где*

$$\xi_i(t) = z_i^0 + \int_0^t \gamma_i(s)\, ds.$$

(3b) $h_i = 0$ *для всех* $i \in I$;

(4b) *существует* $T > 0$ *такое, что выполнено неравенство*

$$\int_0^T \delta(s)\, ds \geqslant n,$$

где $\delta(t)$ *определено равенством* (2.4).

Тогда в игре $\Gamma(n+1)$ *происходит поимка.*

§ 3. Поимка с новой целью

Определение 3.1. В игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка, если существуют $T_0 > t_0$, стратегии $\mathcal{U}_i$, $i \in I$, преследователей P_i, $i \in I$, такие, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $l \in I$, для которого $z_l(T_0) \in M_l(T_0)$.

Введем многозначные отображения:

$$W_i(t,\tau,v) = F(t,\tau)U_i(\tau) - F(t,\tau)v, \quad v \in V(\tau),$$
$$W_i(t,\tau) = F(t,\tau)U_i(\tau) \overset{*}{-} F(t,\tau)V(\tau), \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Предположение 3.1. $W_i(t,\tau) \neq \varnothing$ для всех $i \in I$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Отображения $W_i(t,\tau)$ являются измеримыми и замкнутозначными. Значит, для каждого $i \in I$ существует измеримый селектор $\gamma_i(t,\tau) \in W_i(t,\tau)$. Зафиксируем его и обозначим

$$\xi_i(t) = F(t,t_0)z_i^0 + \int_{t_0}^t \gamma_i(t,s)\, ds.$$

Предположение 3.2.

1. Для каждого $i \in I$ существует отображение $\widehat{M}_i(\cdot)$ на $[t_0, +\infty)$ такое, что $\widehat{M}_i(t)$ — выпуклый компакт для всех $t \geqslant t_0$ и для любых $\theta_i \geqslant t_0$, $\tau \geqslant \theta_i + h_i$ справедливо включение
$$\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} \big(F(\tau,s)V(s) + W_i(\tau,s)\big)\, ds \subset \widehat{M}_i(\tau).$$
2. $M_i^1(t) := M_i(t) \overset{*}{-} \widehat{M}_i(t) \neq \varnothing$ для всех $i \in I$, $t \geqslant t_0$.

Предположение 3.3. $\xi_i(t) \notin M_i(t)$ для всех $i \in I$, $t \geqslant t_0$.

Введем следующие обозначения.

$$\lambda_i(t,\tau,v) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 \mid \lambda\big(M_i^1(t) - \xi_i(t)\big) \cap \big(W_i(t,\tau,v) - \gamma_i(t,\tau)\big) \neq \varnothing\big\},$$
$$\delta(t,\tau) = \min_{v \in V(\tau)} \max_i \lambda_i(t,\tau,v).$$

Предположение 3.4. Для всякого $\gamma > 0$ существует $T = T(\gamma) > t_0$ такое, что для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^1$ такого, что $\mu(E) \leqslant \gamma$ (μ — мера Лебега), выполнено неравенство

$$\int_{E_\gamma} \delta(T,s)\,ds \geqslant n, \quad \text{где} \quad E_\gamma = [t_0,T] \setminus E.$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены предположения 3.1, 3.3, 3.4. Тогда для любых* $\varkappa_i > 0$, $i \in I$, *найдется момент* $T > t_0$ *такой, что для любой допустимой функции* $v(\cdot)$ *и любых измеримых множеств* E_i, $i \in I$, *таких, что* $\mu(E_i) \leqslant \varkappa_i$, *найдется номер* $l \in I$, *для которого справедливо неравенство*

$$\int_{E_l(T)} \lambda_l(T,s,v(s))\,ds \geqslant 1, \quad \textit{где} \quad E_l(T) = [t_0,T] \setminus E_l.$$

Доказательство леммы 3.1 проводится аналогично доказательству леммы 2.1.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены предположения 3.1, 3.2, 3.3, 3.4. Тогда в игре* $\Gamma(n+1)$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего и T_0 — момент времени, удовлетворяющий лемме 3.1 для множеств E_i, $\mu(E_i) \leqslant h_i$. Покажем, что поимка происходит в момент T_0. Рассмотрим функции

$$h_i(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \lambda_i^0(T_0,s,v(s))\,ds,$$

где

$$\lambda_i^0(T_0,s,v(s)) = \begin{cases} \lambda_i(T_0,s,v(s)), & s \notin [\theta_i, \theta_i + h_i], \\ 0, & s \in [\theta_i, \theta_i + h_i]. \end{cases}$$

Из определения момента T_0 следует, что существуют номер $l \in I$ и момент $T_l \in [t_0, T_0]$, для которых $h_l(T_l) = 0$. Обозначим через T_i — первый момент времени, для которого $h_i(T_i) = 0$, если T_i существует. Иначе считаем, что $T_i = T_0$.

Задаем управления преследователей P_i, $i \in I$, следующим образом. Определим многозначные отображения

$$U_i^4(\tau,v) = \bigl\{u_i \in U_i(\tau) \mid F(T_0,\tau)(u_i - v) - \gamma_i(T_0,\tau) \in \lambda_i(T_0,\tau,v)\bigl(M_i^1(T_0) - \xi_i(T_0)\bigr)\bigr\},$$
$$U_i^5(\tau,v) = \bigl\{u_i \in U_i(\tau) \mid F(T_0,\tau)(u_i - v) - \gamma_i(T_0,\tau) = 0\bigr\}.$$

Из предположения 3.3 следует, что $U_i^4(t,v) \neq \varnothing$, $U_i^5(t,v) \neq \varnothing$ для всех $v \in V(t)$, $i \in I$, $t \geqslant t_0$. Из теоремы об измеримом выборе [16, теорема 8.3.1] следует, что у многозначных отображений $U_i^4(t,v)$, $U_i^5(t,v)$, $i \in I$, существуют измеримые селекторы $u_i^4(v)$, $u_i^5(v)$, $i \in I$, такие, что функции $u_i^4(v(t))$, $u_i^5(v(t))$ являются измеримыми.

Для всех $t \in [t_0, T_0] \setminus [\theta_i, \theta_i + h_i]$, для которых $h_i(t) > 0$, полагаем управление преследователей P_i, $i \in I$, равными

$$u_i(t) = u_i^4(v(t)).$$

Для всех $t \in [T_i, T_0] \setminus [\theta_i, \theta_i + h_i]$ полагаем управление $u_i(t)$ преследователя P_i равным $u_i(t) = u_i^5(v(t))$.

Если $T_l \leqslant \theta_l$, $\theta_l + h_l < T_0$, то

$$z_l(T_0) = \xi_l(T_0) + \int_{t_0}^{T_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds +$$
$$+ \int_{T_l}^{\theta_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds - \int_{\theta_l}^{\theta_l+h_l} \big(F_l(T_0,s)v(s) + \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds +$$
$$+ \int_{\theta_l+h_l}^{T_0} \big(F(T_0,s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds.$$

Тогда, в силу выбора управления $u_l(\cdot)$,

$$\int_{T_l}^{\theta_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l^5(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds = \int_{\theta_l+h_l}^{T_0} \big(F(T_0,s)\big(u_l^5(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds = 0;$$

в силу предположения 3.2,

$$\int_{\theta_l}^{\theta_l+h_l} \big(F_l(T_0,s)v(s) + \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds \subset \int_{\theta_i}^{\theta_l+h_l} \big(F(T_0,s)V(s) + W_l(T_0,s)\big)\,ds \subset \widehat{M}_l(T_0).$$

Поэтому

$$z_l(T_0) = \xi_l(T_0) + \int_{t_0}^{T_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l^4(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds + \widehat{M}_l(T_0) \subset$$
$$\subset \xi_l(T_0) + \int_{t_0}^{T_l} \lambda_l(T_0,s,v(s))\big(M_l^1(T_0) - \xi_l(T_0)\big)\,ds + \widehat{M}_l(T_0) =$$
$$= \xi_l(T_0)\left(1 - \int_{t_0}^{T_l} \lambda_l(T_0,s,v(s))\,ds\right) + \int_{t_0}^{T_l} \lambda_l(T_0,s,v(s))M_l^1(T_0)\,ds + \widehat{M}_l(T_0) \subset$$
$$\subset M_l^1(T_0) + \widehat{M}_l(T_0) = \big(M_l(T_0) \overset{*}{-} \widehat{M}_l(T_0)\big) + \widehat{M}_l(T_0) \subset M_l(T_0).$$

Если $T_l \leqslant \theta_l$, $\theta_l + h_l \geqslant T_0$, то

$$z_l(T_0) = \xi_l(T_0) + \int_{t_0}^{T_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds +$$
$$+ \int_{T_l}^{\theta_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds - \int_{\theta_l}^{T_0} \big(F(T_0,s)v(s) + \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds =$$
$$= \xi_l(T_0) + \int_{t_0}^{T_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l^4(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds - \int_{\theta_l}^{T_0} \big(F(T_0,s)v(s) + \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds \subset$$
$$\subset \xi_l(T_0)\left(1 - \int_{t_0}^{T_l} \lambda_l(T_0,s,v(s))\,ds\right) + \int_{t_0}^{T_l} \lambda_l(T_0,s,v(s))M_l^1(T_0)\,ds + \widehat{M}_l(T_0) \subset$$
$$\subset M_l^1(T_0) + \widehat{M}_l(T_0) = \big(M_l(T_0) \overset{*}{-} \widehat{M}_l(T_0)\big) + \widehat{M}_l(T_0) \subset M_l(T_0).$$

Если $\theta_l \leqslant T_l$, $\theta_l + h_l \leqslant T_0$, то

$$z_l(T_0) = \xi_l(T_0) + \int_{t_0}^{\theta_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l^4(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds -$$
$$- \int_{\theta_l}^{\theta_l+h_l} \big(F_l(T_0,s)v(s) + \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds + \int_{\theta_l+h_l}^{T_0} \big(F(T_0,s)\big(u_l^4(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds +$$
$$+ \int_{T_0}^{T_l} \big(F(T_0,s)\big(u_l^5(s) - v(s)\big) - \gamma_l(T_0,s)\big)\,ds.$$

Отсюда

$$z_l(T_0) \subset \xi_l(T_0)\left(1 - \int_{t_0}^{\theta_l} \lambda_l(T_0, s, v(s))\, ds - \int_{\theta_l+h_l}^{T_0} \lambda(T_0, s, v(s))\, ds\right) +$$
$$+ \left(\int_{t_0}^{\theta_l} \lambda_l(T_0, s, v(s)) M_l^1(T_0)\, ds + \int_{\theta_l+h_l}^{T_0} \lambda_l(T_0, s, v(s)) M_l^1(T_0)\, ds\right) + \widehat{M}_l(T_0) =$$
$$= \left(M_l(T_0) \overset{*}{-} \widehat{M}_l(T_0)\right) + \widehat{M}_l(T_0) \subset M_l(T_0).$$

Отметим, что случай $\theta_l \leqslant T_l$, $\theta_l + h_l > T_0$ невозможен в силу определения функции h_l и момента времени T_l.

Таким образом доказано, что $z_l(T_0) \in M_l(T_0)$. Это и означает, что в игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка. □

Следствие 3.1. *Пусть в системе* (1.3) $t_0 = 0$, $f(t) = 0$ *для всех* $t \geqslant 0$, $h_i = 0$ *для всех* $i \in I$ *и выполнены следующие условия:*

(1) $W_i(t) := U_i(t) \overset{*}{-} V(t) \neq \varnothing$ *для всех* $i \in I$, $t \geqslant 0$;

(2) *для каждого* $i \in I$ *существует измеримый селектор* $\gamma_i(t) \in W_i(t)$ *такой, что* $\xi_i(t) \notin M_i(t)$, $t \geqslant 0$, *где*

$$\xi_i(t) = z_i^0 + \int_0^t \gamma_i(s)\, ds;$$

(3) *существует* $T > 0$ *такое, что выполнено неравенство*

$$\int_0^T \delta(s)\, ds \geqslant n,$$

где $\delta(t)$ *определено равенством* (2.4).

Тогда в игре $\Gamma(n+1)$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $h_i = 0$, то для выполнения предположения 3.2 достаточно взять $\widehat{M}_i = \{0\}$, тогда $M_i^1(t) = M_i(t)$. Из условий следствия также следует, что выполнены предположения 3.3, 3.4. Поэтому, по теореме 3.1, в игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка. □

§ 4. Примеры

Пример 4.1. Пусть в системе (1.3) $f(t) = \cos t$, $t_0 = 0$, $h_i \geqslant 0$, $U_i(t) \equiv D_3(0)$, $V(t) \equiv D_1(0)$, $M_i(t) \equiv D_\varepsilon(0)$, $\varepsilon > 0$, где $D_r(a) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \|z - a\| \leqslant r\}$. Считаем, что

$$\|z_i^0\| > e\varepsilon. \tag{4.1}$$

Здесь и всюду далее считаем, что норма является евклидовой. Тогда

$$F(t, s) = e^{\sin t - \sin s}, \quad F(t, t_0) = e^{\sin t}.$$

Получим условия на параметры задачи, при которых будут выполнены предположения 2.1–2.4. Так как $W_i(t, \tau) = e^{\sin t - \sin \tau} D_3(0) \overset{*}{-} e^{\sin t - \sin \tau} D_1(0) = e^{\sin t - \sin \tau} D_2(0) \neq \varnothing$, то предположение 2.1 выполнено. Возьмем в качестве $\gamma_i(t, s) = (0, 0)$. Имеем $\xi_i(t) = F(t, t_0) z_i^0 = \exp(\sin t) z_i^0$. В силу (4.1) получаем, что $\xi_i(t) \notin D_\varepsilon(0)$. Таким образом, предположение 2.2 выполнено.

Подберем t_i, $i \in I$, при которых будет выполнено следующее включение из предположения 2.3:

$$\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} e^{\sin t - \sin s} D_1(0)\, ds \subset \int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i} e^{\sin t - \sin s} D_2(0)\, ds. \tag{4.2}$$

Включение (4.2) равносильно

$$D_1(0)\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} e^{-\sin s}\,ds \subset D_2(0)\int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i} e^{-\sin s}\,ds.$$

Так как

$$\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} e^{-\sin s}\,ds \leqslant e\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} ds \leqslant eh_i,$$

то

$$D_1(0)\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} e^{-\sin s}\,ds \subset D_r(0), \quad \text{если} \quad r = eh_i.$$

Далее имеем

$$\int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i} e^{-\sin s}\,ds \geqslant e^{-1}\int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i} ds \geqslant e^{-1}t_i.$$

Следовательно,

$$D_q(0) \subset D_2(0)\int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i} e^{-\sin s}\,ds, \quad \text{если} \quad q = 2e^{-1}t_i.$$

Для выполнения предположения 2.3 достаточно выполнение включения

$$D_r(0) \subset D_q(0).$$

Получаем, что предположение 2.3 будет выполнено, если

$$t_i \geqslant \frac{e^2 h_i}{2}.$$

Пусть $m \in M_i(t)$, $\eta_i(t) = m - e^{\sin t} z_i^0$,

$$\widehat{\lambda}_i(t,\tau,v) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 \mid \lambda(m - e^{\sin t} z_i^0) \in W(t,\tau,v)\bigr\}.$$

Обозначим $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение. Тогда

$$\widehat{\lambda}_i(t,\tau,v) = \frac{F(t,\tau)}{\|\eta_i(t)\|}\left(-\left(\frac{\eta_i(t)}{\|\eta_i(t)\|}, v\right) + \sqrt{\left(\frac{\eta_i(t)}{\|\eta_i(t)\|}, v\right)^2 + 9 - \|v\|^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{F(t,\tau)}{\|\eta_i(t)\|}\left(-\left(\frac{\eta_i(t)}{\|\eta_i(t)\|}, v\right) + \sqrt{\left(\frac{\eta_i(t)}{\|\eta_i(t)\|}, v\right)^2 + 8}\right).$$

Функция $g(z) = \sqrt{z^2+8} - z$ убывает на $[-1,1]$. Поэтому $g(z) \geqslant 2$ для всех $z \in [-1,1]$. Следовательно,

$$\widehat{\lambda}_i(t,\tau,v) \geqslant \frac{2F(t,\tau)}{\|\eta_i(t)\|}$$

для всех $t \geqslant 0$. Так как $\|\eta_i(t)\| = \|m - e^{\sin t} z_i^0\| \leqslant \varepsilon + e\|z_i^0\|$, то

$$\widehat{\lambda}_i(t,\tau,v) \geqslant \frac{2F(t,\tau)}{\varepsilon + e\|z_i^0\|} \geqslant \frac{2e^{-2}}{\varepsilon + e\|z_i^0\|}.$$

Поэтому

$$\delta(t,s) \geqslant \delta = \frac{2e^{-2}}{\varepsilon + e\max_i \|z_i^0\|}.$$

Тогда для любого множества $E \subset \mathbb{R}^1$, $\mu(E) \leqslant \gamma$ получаем

$$\int_{E_\gamma} \delta(T,s)\,ds \geqslant \delta(T-\gamma).$$

Из последнего неравенства следует, что выполнено предположение 2.4. Следовательно, если параметры задачи удовлетворяют соответствующим условиям, то в игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка.

Пример 4.2. Пусть в системе (1.3) $f(t) = a$, $a < 0$, $t_0 = 0$, $h_i \geqslant 0$, $U_i(t) \equiv D_\rho(0)$, $V(t) \equiv D_\sigma(0)$, $\rho > \sigma$, где $D_r(a) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \|z-a\| \leqslant r\}$.

Тогда

$$F(t,s) = e^{a(t-s)}, \quad F(t,t_0) = e^{at}.$$

Проверим выполнимость предположения 2.1. Имеем

$$W_i(t,\tau) = e^{a(t-\tau)}D_\rho(0) \overset{*}{-} e^{a(t-\tau)}D_\sigma(0) = e^{a(t-\tau)}D_{\rho-\sigma}(0) \neq \varnothing.$$

Возьмем в качестве $\gamma_i(t,s) = (0,0)$. Подберем t_i, $i \in I$, при которых будет выполнено включение

$$\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} e^{a(t-s)}D_\sigma(0)\,ds \subset \int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i} e^{a(t-s)}D_{\rho-\sigma}(0)\,ds$$

для всех $\theta_i > t_0$, $t > \theta_i + h_i$. Для этого достаточно выполнение неравенства

$$\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} e^{a(t-s)}\sigma\,ds \leqslant \int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i} e^{a(t-s)}(\rho-\sigma)\,ds.$$

Последнее равносильно

$$\frac{\sigma(e^{ah_i}-1)}{a} \leqslant \frac{(\rho-\sigma)(1-e^{-at_i})}{a}. \tag{4.3}$$

Так как $a < 0$, то неравенство (4.3) представимо в виде

$$\sigma(e^{ah_i}-1) \geqslant (\rho-\sigma)(1-e^{-at_i}).$$

Отсюда

$$t_i \geqslant -\frac{1}{a}\ln\left(1 + \frac{\sigma}{\rho-\sigma}(1-e^{ah_i})\right). \tag{4.4}$$

1. Пусть $M_i = \{0\}$ для всех $i \in I$. Так как $\xi_i(t) = e^{at}z_i^0 \neq 0$, то предположение 2.2 выполнено. Далее имеем

$$\lambda_i(t,\tau,v) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 \mid \lambda e^{at}z_i^0 \in W(t,\tau,v)\bigr\} =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 \mid \lambda e^{at}z_i^0 \in e^{a(t-\tau)}D_\rho(0) - e^{a(t-\tau)}v\bigr\} = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 \mid \lambda z_i^0 \in e^{-a\tau}D_\rho(0) - e^{-a\tau}v\bigr\}.$$

Следовательно,

$$\lambda_i(t,\tau,v) = \frac{1}{\|z_i^0\|}\left(-\left(\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|}, v\right) + \sqrt{\left(\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|}, v\right)^2 + e^{-2a\tau}(\rho^2 - \|v\|^2)}\right).$$

Поэтому

$$\lambda_i(t,\tau,v) \geqslant \frac{1}{\|z_i^0\|}\left(-\left(\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|}, v\right) + \sqrt{\left(\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|}, v\right)^2 + e^{-2a\tau}(\rho^2-\sigma^2)}\right).$$

Функция $g(z) = \sqrt{z^2 + e^{-2a\tau}(\rho^2-\sigma^2)} - z$ убывает на $[-1,1]$. Поэтому

$$g(z) \geqslant \sqrt{1+(\rho^2-\sigma^2)} - 1 \quad \text{для всех} \quad z \in [-1,1].$$

Отсюда

$$\lambda_i(t,\tau,v) \geqslant \frac{1}{\|z_i^0\|}\left(\sqrt{1+(\rho^2-\sigma^2)} - 1\right)$$

для всех $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $v \in D_\sigma(0)$. Следовательно,

$$\delta(t,\tau) = \min_{v\in D_\sigma(0))}\max_{i\in I}\lambda_i(t,\tau,v) \geqslant \delta = \frac{1}{\max\limits_i \|z_i^0\|}\left(\sqrt{1+(\rho^2-\sigma^2)} - 1\right)$$

для всех $t \geqslant 0$, $\tau \in [0,t]$. Тогда

$$\int_{E_\gamma} \delta(T,s)\,ds \geqslant \int_{E_\gamma} \delta\,ds = \delta(T-\gamma).$$

Из последнего неравенства следует справедливость предположения 2.4.

2. Пусть $M_i(t) \equiv D_\varepsilon(0)$, $\varepsilon \geqslant 0$. Тогда, так как $\xi_i(t) = e^{at}z_i^0 \to 0$ при $t \to \infty$, то предположение 2.2 не выполнено. Покажем, что и в этом случае в игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка. Возьмем T_0, для которого справедливо неравенство $\|e^{aT_0}z_i^0\| < \varepsilon$ для любого $i \in I$, и пусть $T = T_0 + \max\limits_i\{h_i + t_i\}$, где t_i удовлетворяет условию (4.4).

На множестве $[0,T] \setminus [\theta_i, \theta_i + h_i + t_i]$ задаем управление преследователя P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t).$$

На отрезке $[\theta_i + h_i, \theta_i + h_i + t_i]$ управление преследователя задаем в соответствии с теоремой 2.1. Тогда

$$z_i(T) = \xi_i(T) + \int_{t_0}^{\theta_i} F(T,s)\big(u_i(s) - v(s)\big)\,ds + \int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} F(T,s)\big(u_i(s) - v(s)\big)\,ds -$$
$$- \int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i} F(T,s)v(s)\,ds + \int_{\theta_i+h_i+t_i}^{T} F(T,s)\big(u_i(s) - v(s)\big)\,ds = \xi_i(T).$$

Так как $T \geqslant T_0$, тогда $\|\xi_i(T)\| \leqslant \|\xi_i(T_0)\| < \varepsilon$. Следовательно, в игре происходит поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский М. С. Задача о переправе с возможной остановкой двигателя // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 11. С. 1937–1940. https://www.mathnet.ru/rus/de8235
2. Никольский М. С., Пэн Чж. Дифференциальная игра преследования с нарушениями в динамике // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1923–1927. https://www.mathnet.ru/rus/de8489

3. Никольский М. С. Об одной задаче управления с нарушениями в динамике // Труды ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции Математического института имени В. А. Стеклова. 1988. Т. 185. С. 181–186. https://www.mathnet.ru/rus/tm1860
4. Ушаков В. Н., Ухоботов В. И., Изместьев И. В. Об одной задаче импульсного управления при наличии помехи и возможной поломки // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 249–263. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-2-249-263
5. Ухоботов В. И. Об одной задаче управления при наличии помехи и возможной поломке // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 265–278. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-265-278
6. Анисов В. О. Линейная дифференциальная игра удержания с поломкой // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». 2022. Т. 14. № 2. С. 5–12. https://doi.org/10.14529/mmph220201
7. Изместьев И. В., Ливанов И. Д. Задача управления параболической системой с помехами и возможными изменениями в динамике // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2024. Т. 64. С. 34–47. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-64-03
8. Изместьев И. В., Ухоботов В. И. Задача управления параболической системой с помехами и выпуклой целью // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 30–42. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-03
9. Чикрий К. А. Об игровом управлении движением при временном отказе управляющих устройств // Кибернетика и системный анализ. 2014. Т. 50. № 3. С. 130–136.
10. Voskolovych O. I., Chikrii K. A. Failure of control devices under conflict conditions // Кібернетика та системний аналіз. 2023. Т. 59. № 2. С. 146–157.
11. Shinar J., Glizer V. Y., Turetsky V. Robust pursuit of a hybrid evader // Applied Mathematics and Computation. 2010. Vol. 217. Issue 3. P. 1231–1245. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.04.019
12. Shinar J., Glizer V. Y., Turetsky V. Capture zone of linear strategies in the interception problems with variable structure dynamics // Journal of the Franklin Institute. 2014. Vol. 351. Issue 4. P. 2378–2395. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2013.09.017
13. Gromov D., Gromova E. On a class of hybrid differential games // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. No. 2. P. 266–288. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0185-3
14. Fabra N., García A. Dynamic price competition with switching costs // Dynamic Games and Applications. 2015. Vol. 5. No. 4. P. 540–567. https://doi.org/10.1007/s13235-015-0157-z
15. Petrov N. N., Fomina E. S. A problem of simple group pursuit with possible dynamical disturbance in dynamics and phase constraints // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 1. P. 82–95. https://doi.org/10.35634/vm250105
16. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. https://zbmath.org/0713.49021

Поступила в редакцию 23.02.2026
Принята к публикации 22.05.2026

Фомина Екатерина Сергеевна, магистрант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-1724-0510
E-mail: katefo631@gmail.com

Цитирование: Е. С. Фомина. Групповое преследование с возможным нарушением в динамике в линейных нестационарных дифференциальных играх с простой матрицей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 2. С. 321–337.

MATHEMATICS 2026. Vol. 36. Issue 2. Pp. 321–337.

E. S. Fomina

Group pursuit with possible violation of dynamics in linear nonstationary differential games with a simple matrix

Keywords: differential games, pursuer, evader, capture, breakdown.

MSC2020: 49N70, 49N75, 91A06

DOI: 10.35634/vm260208

In a finite-dimensional Euclidean space, we consider the problem of pursuit by a group of pursuers of a single evader, described by a system of the form

$$\dot{z}_i = f(t)z_i + a_i(t)u_i - v, \quad u_i \in U_i(t), \quad v \in V(t),$$

where the functions $a_i(t)$ are equal to 1 for all t, except for a certain segment of a given length, on which they are equal to zero (a separate segment for each pursuer). This fact can be interpreted as meaning that each pursuer may experience a control device failure at any previously unknown point in time, and the length of the time interval required to fix the failure is given. During the process of fixing the failure, the pursuers are unable to capture the evader. The target sets are convex compact sets. Sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem are obtained.

REFERENCES

1. Nikol'skii M. S. A crossing problem with possible stop of engine, *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 11, pp. 1681–1684. https://zbmath.org/0816.90147
2. Nikol'skii M. S., Pang Chg. A differential pursuit game with disturbed dynamics, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 11, pp. 1775–1778. https://zbmath.org/0885.90140
3. Nikol'skii M. S. On a control problem with disturbances in the dynamics, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1990, vol. 185, pp. 203–208.
4. Ushakov V. N., Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. On a problem of impulse control under disturbance and possible breakdown, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2021, vol. 315, suppl. 1, pp. S236–S249. https://doi.org/10.1134/S0081543821060195
5. Ukhobotov V. I. On a control problem under a disturbance and possible breakdown, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2019, vol. 307, suppl. 1, pp. 159–171. https://doi.org/10.1134/S0081543819070137
6. Anisov V. O. Linear differential holding game with a break, *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2022, vol. 14, no. 2, pp. 5–12 (in Russian). https://doi.org/10.14529/mmph220201
7. Izmest'ev I. V., Livanov N. D. Control problem for a parabolic system with disturbances and possible changes in dynamics, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2024, vol. 64, pp. 34–47 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-64-03
8. Izmest'ev I. V., Ukhobotov V. I. Control of a parabolic system with disturbances and a convex goal, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 30–42 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-03
9. Chikrii K. A. Motion game control under temporary failure of control unit, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2014, vol. 50, no. 3. pp. 439–444. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9632-6
10. Voskolovych O. I., Chikrii K. A. Failure of control devices under conflict conditions, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 306–316. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00564-4
11. Shinar J., Glizer V. Y., Turetsky V. Robust pursuit of a hybrid evader, *Applied Mathematics and Computation*, 2010, vol. 217, issue 3, pp. 1231–1245. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.04.019
12. Shinar J., Glizer V. Y., Turetsky V. Capture zone of linear strategies in the interception problems with variable structure dynamics, *Journal of the Franklin Institute*, 2014, vol. 351, issue 4, pp. 2378–2395. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2013.09.017

13. Gromov D., Gromova E. On a class of hybrid differential games, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, no. 2, pp. 266–288. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0185-3
14. Fabra N., García A. Dynamic price competition with switching costs, *Dynamic Games and Applications*, 2015, vol. 5, no. 4, pp. 540–567. https://doi.org/10.1007/s13235-015-0157-z
15. Petrov N. N., Fomina E. S. A problem of simple group pursuit with possible dynamical disturbance in dynamics and phase constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 1, pp. 82–95. https://doi.org/10.35634/vm250105
16. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-valued analysis*, Boston: Birkhäuser, 1990. https://zbmath.org/0713.49021

Received 23.02.2026
Accepted 22.05.2026

Ekaterina Sergeevna Fomina, Master Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-1724-0510
E-mail: katefo631@gmail.com

Citation: E. S. Fomina. Group pursuit with possible violation of dynamics in linear nonstationary differential games with a simple matrix, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 2, pp. 321–337.