ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2026. Т. 36. Вып. 2. С. 338–348.

УДК 512.55

© *В. В. Чермных*

О ПОЛУКОЛЬЦЕ ЧАСТНЫХ КОММУТАТИВНОГО СТРОГО РИККАРТОВА ПОЛУКОЛЬЦА И ЕГО ПИРСОВСКИХ СЛОЯХ

Рассматриваются представления коммутативного строго риккартова полукольца и его полного полукольца частных сечениями их пирсовских пучков. Установлено, что базисные пространства этих пучков совпадают. В основной теореме получена характеризация строго риккартова полукольца и его полного полукольца частных в терминах пирсовских слоев. Это обобщает результат Дж. М. Бергмана о характеризации коммутативного риккартова кольца.

Ключевые слова: строго риккартово полукольцо, полукольцо частных, пирсовский пучок, пирсовский слой.

DOI: 10.35634/vm260209

Введение

В 1971 г. Дж. М. Бергманом [1, Lemma 3.1] получена характеризация коммутативного риккартова (или pp-) кольца с единицей в терминах пирсовских слоев кольца S и пирсовских слоев его полного кольца частных SC^{-1}; при этом SC^{-1} оказывается регулярным кольцом, каждый идемпотент которого лежит в S. В настоящей статье проводятся аналогичные исследования для строго риккартова полукольца и его полного полукольца частных.

Конструкция пирсовского пучка колец появилась в 1967 г. в фундаментальной статье Р. С. Пирса [2], в ней же получены первые результаты о связи свойств колец со свойствами их пирсовских пучков. В дальнейшем аналоги пирсовского пучка колец были найдены для решеточно упорядоченных колец [3], ограниченных дистрибутивных решеток [4], почти-колец [5], универсальных алгебр [6], колец с инволюцией [7]. В 1993 г. было получено изоморфное пирсовское представление для произвольного полукольца [8]. Для алгебр с нетривиальной решеткой центральных дополняемых идемпотентов успешно применялись пирсовские пучки и связанные с ними конструкции [9]. Например, характеризации в терминах пирсовского пучка и пирсовских слоев были получены для различных полуколец [10–12]. Укажем один из типичных результатов, имеющий к тому же отношение к нашей статье: *полукольцо строго риккартово тогда и только тогда, когда его пирсовский пучок хаусдорфов, а все пирсовские слои являются слабо симметрическими полукольцами без уравнителей* [11, теорема 1].

Одним из объектов исследования в нашей статье является полное полукольцо частных коммутативного полукольца. В самой известной и обширной монографии о полукольцах (Дж. С. Голан [13]) имеется глава о полукольцах частных. Конструкция, рассматриваемая в ней, почти дословно повторяет кольцевой вариант. В результате получаемое полукольцо частных SC^{-1} в общем случае не является расширением исходного полукольца S. Так, в [13, Example 11.7] справедливо указано, что полукольцо частных SC^{-1} коммутативного полукольца S без делителей нуля относительно $C = S \setminus \{0\}$ является полуполем. Но взяв, допустим, в качестве S более чем двухэлементную ограниченную цепь, мы получим полуполе SC^{-1} из двух элементов. Если же в конструкции Голана потребовать, чтобы мультипликативный подмоноид полукольца, используемый в качестве множества знаменателей, состоял из неуравнителей полукольца S, то получается нужное нам полукольцо частных, уже содержащее S в качестве подполукольца (см. также [13, абзац после Example 11.9]).

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть S — коммутативное полукольцо, SC^{-1} — полное полукольцо частных. Тогда равносильны условия:*

(1) *S — строго риккартово полукольцо;*

(2) *пирсовский пучок $(\mathbb{P}(S), \operatorname{Max} BS)$ хаусдорфов, каждый его пирсовский слой — полукольцо без уравнителей;*

(3) *$BS = B(SC^{-1})$, пирсовский пучок $(\mathbb{P}(SC^{-1}), \operatorname{Max} B(SC^{-1}))$ хаусдорфов, каждый пирсовский слой полукольца SC^{-1} является полуполем;*

(4) *$BS = B(SC^{-1})$, пирсовский пучок $(\mathbb{P}(SC^{-1}), \operatorname{Max} B(SC^{-1}))$ хаусдорфов, SC^{-1} — бирегулярное полукольцо.*

Вспомогательные утверждения также представляют самостоятельный интерес, особенно предложение 2 о строении пирсовского пучка полукольца частных коммутативного полукольца.

В заключительной части статьи мы даем краткий анализ доказательства результата Бергмана [1, Lemma 3.1], послужившего прообразом нашей основной теоремы.

§ 1. О полукольце частных

Определение 1. *Полукольцом* называется непустое множество S с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$. Полукольцо с тождеством $xy = yx$ называется *коммутативным*.

Полукольца образуют широкий класс, включающий ассоциативные кольца с единицей, ограниченные дистрибутивные решетки. Широкое применение находят различные числовые полукольца — в тропической математике, в теории оптимизации, при изучении многозначных логик (связь с MV-алгебрами); активно изучаются матричные полукольца, полукольца многочленов. О приложениях полуколец имеется много информации в монографии Голана [13].

Далее, если не указано противное, под полукольцом будем понимать коммутативное полукольцо с единицей.

Пусть a, b — элементы полукольца S. Множество $\operatorname{eq}(a, b) = \{s \in S\colon as = bs\}$ называется *уравнителем* элементов a и b. Уравнитель произвольной пары является идеалом полукольца S, представляет собой полезное обобщение аннулятора элемента кольца. В случае, когда необходимо указать, в каком полукольце рассматривается уравнитель, будем использовать обозначение вида $\operatorname{eq}_S(a, b)$. Полукольцо S, в котором $\operatorname{eq}(a, b) = 0$ для любой пары различных элементов a, b, называется *полукольцом без уравнителей*.

Приступим к описанию конструкции полукольца частных коммутативного полукольца. Напомним, что *полуполем* называется коммутативное полукольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

Предложение 1. *Пусть C — мультипликативный моноид неуравнителей коммутативного полукольца S, тогда множество классов эквивалентности дробей вида s/c, $s \in S$, $c \in C$, по отношению*

$$s/c \sim t/d \Leftrightarrow sd = tc$$

— полукольцо SC^{-1}, являющееся расширением полукольца S. Если C совпадает с множеством $S \setminus \{0\}$, то SC^{-1} — полуполе.

Доказательство. В SC^{-1} вводятся операции сложения и умножения

$$s/c+t/d=(sd+tc)/cd,\ s/c\cdot t/d=st/cd,$$

относительно которых SC^{-1} становится полукольцом. Полукольцо S вкладывается в SC^{-1} при отображении $s\mapsto s/1$. Проверка корректности операций и доказательство необходимых свойств стандартны. □

Назовем SC^{-1} *полным полукольцом частных коммутативного полукольца* S, если C — множество всех неуравнителей полукольца S. Указанная конструкция является аналогом кольца частных коммутативного кольца; отличие полукольцевого варианта заключается в необходимости рассматривать вместо мультипликативного моноида неделителей нуля моноид неуравнителей.

§ 2. О пирсовском пучке и пирсовских слоях

Изложим основные понятия, необходимые для применения пирсовских пучков. В параграфе рассматриваются полукольца, не обязательно коммутативные.

Идемпотентом полукольца S называется элемент $e\in S$ такой, что $e=e^2$. Элемент $a\in S$ называется *центральным*, если $as=sa$ для любого $s\in S$. Элемент $e\in S$ называется *дополняемым*, если существует такой $e^{\perp}\in S$, что $e+e^{\perp}=1$, $ee^{\perp}=e^{\perp}e=0$.

Легко проверить, что если e — дополняемый элемент, то он является идемпотентом, его дополнение определяется однозначно и также является дополняемым идемпотентом. Обозначим через BS множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S. Со сложением $e\oplus f=ef^{\perp}+e^{\perp}f$ и обычным полукольцевым умножением получаем булево кольцо $\langle BS,\oplus,\cdot\rangle$.

Пусть S — произвольное полукольцо, M — максимальный идеал кольца BS. Введем на полукольце S отношение:

$$a\equiv b(\rho_M)\Leftrightarrow ae^{\perp}=be^{\perp}\ \text{ для некоторого }\ e\in M.$$

Это отношение является конгруэнцией на полукольце S. Факторполукольцо S/ρ_M называется *пирсовским слоем* полукольца S.

Пусть S — произвольное полукольцо. Множество $\operatorname{Max}BS$ всех максимальных идеалов кольца BS со стоуновской топологией образует пространство, являющееся *нульмерным компактом* (компактным хаусдорфовым пространством с базой открыто-замкнутых множеств); открытыми являются множества $D(A)=\{M\in\operatorname{Max}BS\colon M\not\supseteq A\}$ для произвольного идеала A кольца BS, а множества вида $D(e)=\{M\in\operatorname{Max}BS\colon e\notin M\}$, $e\in BS$, образуют базис открыто-замкнутых множеств.

Дизъюнктное объединение $\mathbb{P}(S)=\dot\cup S/\rho_M$ всех пирсовских слоев является топологическим пространством и называется *накрывающим*, пространство $\operatorname{Max}BS$ — *базисным*, а пара $(\mathbb{P}(S),\operatorname{Max}BS)$ образует *пирсовский пучок* полукольца S.

С деталями, связанными с пучковыми представлениями, в частности, как вводится топология накрывающего пространства пучка, можно ознакомиться, например, в [2, 14, 15].

Для колец пирсовский пучок был введен Р. С. Пирсом [2], для полуколец — В. В. Чермных [8]. Непрерывные отображения из $\operatorname{Max}BS$ в $\mathbb{P}(S)$ (каждая точка $M\in\operatorname{Max}BS$ отображается в «свой» пирсовский слой S/ρ_M) называются *глобальными сечениями*. Глобальные сечения пирсовского пучка исчерпываются сечениями вида $\hat{s}$, $s\in S$, где $\hat{s}(M)$ — класс элемента s в слое S/ρ_M. Иногда нам удобней использовать обозначение $s_M=\hat{s}(M)$.

Важными для применения пирсовских пучков к исследованию алгебр являются теоремы о представлениях: *произвольное кольцо* (*полукольцо*) *с единицей изоморфно кольцу* (*соответственно полукольцу*) *всех глобальных сечений своего пирсовского пучка* [2, Theorem 4.4], [8, теорема 3].

Укажем известные (и легко проверяемые) свойства пирсовских пучков, которые будут использоваться далее.

Лемма 1. *Для пирсовского пучка полукольца S справедливы следующие утверждения:*

(1) *глобальное сечение $\hat{e}$ пирсовского пучка, соответствующее элементу $e \in BS$, в каждом пирсовском слое S/ρ_M принимает либо значение $\hat{0}(M)$, либо значение $\hat{1}(M)$;*

(2) *если $\hat{a}(M) = \hat{b}(M)$ для $a, b \in S$, то сечения $\hat{a}$ и $\hat{b}$ совпадают и на некоторой открыто-замкнутой* (*например, базисной*) *окрестности U точки M;*

(3) *если U — открыто-замкнутое подмножество множества $\mathrm{Max}\, BS$, то существует глобальное сечение, называемое характеристическим, совпадающее с единичным сечением на U и нулевым на его дополнении.*

Отметим, что если имеется некоторое локальное сечение, определенное на открыто-замкнутом множестве U базисного пространства, то его можно продолжить до глобального, доопределив на дополнении к U либо единичное, либо нулевое сечение.

Известно, что в произвольном пучке множество всех точек базисного пространства, в которых совпадают два сечения, открыто. Пучок называется *хаусдорфовым*, если хаусдорфово его накрывающее пространство. Имеется следующая характеризация хаусдорфовости пучка: *пучок хаусдорфов тогда и только тогда, когда множество всех точек, в которых совпадают два сечения, открыто-замкнуто* [16, с. 14]. Несложно заметить, что для хаусдорфовости пучка колец (P, X) (но не пучка полуколец) достаточно открыто-замкнутости *носителя* $\mathrm{supp}\,\alpha = \{x \in X \colon \alpha_x \neq 0\}$ каждого сечения α пучка P.

§ 3. Строго риккартово полукольцо, основная теорема

Определение 2. Полукольцо S называется *строго риккартовым*, если уравнитель $\mathrm{eq}(a, b)$ произвольных $a, b \in S$ порождается центральным дополняемым идемпотентом; полукольцо называется *бирегулярным*, если любой его главный идеал порождается центральным дополняемым идемпотентом.

В коммутативном кольце строгая риккартовость в точности соответствует проективности главных идеалов. Такие кольца называются pp-кольцами, также используется другое название — риккартовы кольца. Риккартовы кольца — это в точности кольца, в которых аннулятор произвольного элемента порождается некоторым центральным идемпотентом. Любое бирегулярное полукольцо является риккартовым, а риккартово полукольцо строго риккартово.

Пример 1. Укажем несколько примеров строго риккартовых полуколец.

1. Любое полукольцо без делителей нуля является риккартовым, но не обязательно строго риккартовым. Так, ограниченная, более чем двухэлементная цепь, не является строго риккартовым полукольцом. Любое риккартово кольцо является строго риккартовым полукольцом.

2. Полукольцо целых неотрицательных чисел строго риккартово; в более общем случае, строго риккартовым является полукольцо без уравнителей.

3. Строго риккартовым полукольцом является произвольная булева решетка B, поскольку для любых $a, b \in B$ уравнитель $\mathrm{eq}(a, b)$ порождается элементом $ab + a^{\perp}b^{\perp}$.

4. Пусть $\mathbb{R}^+$ — полуполе неотрицательных действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения. Тогда полукольцо $C^+ = C(X, \mathbb{R}^+)$ всех непрерывных $\mathbb{R}^+$-значных функций на топологическом пространстве X строго риккартово, если X базисно несвязно (пространство называется *базисно несвязным*, если внутренность любого его нуль-множества замкнута). Действительно, кольцом разностей полукольца C^+ является кольцо $C = C(X, \mathbb{R})$ всех непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на X, и в этом случае кольцо C оказывается риккартовым [17, п. 3.3, теорема 1]. Для любых $a, b \in C^+ \subseteq C$ в силу риккартовости найдется такой идемпотент $e = e^2 \in C$, что $\operatorname{ann}_C(a - b) = eC$. Понятно, что $e \in C^+$ и $ae = be$. Если $f \in \operatorname{eq}_{C^+}(a, b)$, то $f \in \operatorname{ann}_C(a - b)$, поэтому $f = ef \in eC^+$ и, следовательно, $\operatorname{eq}_{C^+}(a, b) \subseteq eC^+$. Обратное включение очевидно.

5. Коммутативное полукольцо строго риккартово тогда и только тогда, когда оно изоморфно полукольцу всех глобальных сечений компактного хаусдорфова пучка коммутативных полуколец без уравнителей [11, теорема 1], [15, п. 4.1].

Лемма 2. *Пусть S — коммутативное строго риккартово полукольцо, A — подполукольцо в S и множества дополняемых идемпотентов полуколец S и A совпадают. Тогда A — строго риккартово полукольцо.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$, тогда $\operatorname{eq}_S(a, b) = eS$ для некоторого $e \in BS = BA$. Очевидно включение $\operatorname{eq}_A(a, b) \supseteq eA$. Если $as = bs$ для $s \in A$, то $s \in eS$, поэтому $s = et = e(et) = es \in eA$. Таким образом, $\operatorname{eq}_A(a, b) \subseteq eA$, и A — строго риккартово полукольцо. □

Лемма 3. *Пусть S — коммутативное строго риккартово полукольцо, SC^{-1} — его полное полукольцо частных. Тогда множества дополняемых идемпотентов полуколец S и SC^{-1} совпадают.*

Доказательство. Пусть s/c — идемпотент полукольца SC^{-1}, $s/c \cdot s/c = s/c$. Тогда $s^2c = sc^2$, и $s^2 = sc$, поскольку c — неуравнитель в S. Получаем $s \in \operatorname{eq}(s, c) = eS$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$, следовательно, $s = es$. Из $es = ec$ получаем $s = ec$. Наконец, $s/c = ec/c = e/1$ — дополняемый идемпотент полукольца S. Очевидно, дополняемый идемпотент из S является дополняемым идемпотентом полукольца SC^{-1}. □

Следствие 1. *Если S — коммутативное строго риккартово полукольцо, то*

$$\operatorname{Max} BS = \operatorname{Max} B(SC^{-1}).$$

Следующее утверждение верно, в частности, для коммутативного строго риккартова полукольца и его полного полукольца частных SC^{-1} (по лемме 3).

Предложение 2. *Пусть S — коммутативное полукольцо, SC^{-1} — его полукольцо частных, множества дополняемых идемпотентов полуколец S и SC^{-1} совпадают. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *пирсовский слой полукольца SC^{-1} в точке M изоморфен полукольцу частных $S_M C_M^{-1}$ пирсовского слоя $S_M = \varphi_M(S)$ относительно $C_M = \varphi_M(C)$, где $\varphi_M \colon S \to S/\rho_M$ — естественный эпиморфизм;*

(2) *пирсовский пучок $\mathbb{P}(S)$ хаусдорфов тогда и только тогда, когда пирсовский пучок $\mathbb{P}(SC^{-1})$ хаусдорфов.*

Доказательство. (1) Покажем, что множество C_M является мультипликативным моноидом неуравнителей полукольца S_M. Действительно, пусть $u \in C$, $\varphi_M(u) = u_M$ — произвольный элемент из C_M. Предположим, $a_M u_M = b_M u_M$ для $a, b \in S$. Тогда $aue = bue$ для некоторого $e \in BS \setminus M$, поэтому $ae = be$ и $a_M = b_M$. Получили, что u_M — неуравнитель полукольца S_M. Поэтому $S_M C_M^{-1}$ — полукольцо частных. Из условия следует, что базисные пространства пирсовских пучков полуколец S и SC^{-1} совпадают, поэтому для произвольного $M \in \operatorname{Max} BS$ рассмотрим соответствие $f\colon (SC^{-1})_M \to S_M C_M^{-1}$, определяемое правилом $(s/c)_M \mapsto s_M/c_M$. Покажем, что оно является изоморфизмом. Пусть $(s/c)_M = (t/d)_M$ — элементы пирсовского слоя полукольца SC^{-1}, тогда $s/c \cdot e = t/d \cdot e$ для некоторого $e \in B(SC^{-1}) \setminus M$. Получаем $sde = tce$, а по условию $e \in BS \setminus M$. Тогда $(sd)_M = (tc)_M$ как элементы пирсовского слоя полукольца S, поэтому $s_M d_M = t_M c_M$, что означает $s_M/c_M = t_M/d_M$. Показали, что f — отображение. Для всех переходов в приведенном рассуждении верны обратные импликации, потому f инъективно. Очевидно, f является сюръекцией. Стандартно проверяется, что f — полукольцевой гомоморфизм.

(2) Пусть V — множество, на котором в пучке $\mathbb{P}(SC^{-1})$ совпадают сечения $\widehat{s/c}$ и $\widehat{t/d}$, а U — множество, на котором в пучке $\mathbb{P}(S)$ совпадают сечения $\widehat{sd}$ и $\widehat{tc}$. Пусть $M \in V$, тогда $s/c \cdot e = t/d \cdot e$ для некоторого $e \in BS \setminus M$. Получаем $sd \cdot e = tc \cdot e$, следовательно, $(sd)_M = (tc)_M$, $M \in U$ и $V \subseteq U$. Если $N \in U$, то $sd \cdot f = tc \cdot f$ для некоторого $f \in BS \setminus N$. Но тогда $s/c \cdot f = t/d \cdot f$ и $N \in V$. Таким образом, $U = V$. Если пучок $\mathbb{P}(S)$ хаусдорфов, то U, как и V, — открыто-замкнуто в $\operatorname{Max} BS$, следовательно, $\mathbb{P}(SC^{-1})$ — хаусдорфов пучок. Очевидно, хаусдорфовость $\mathbb{P}(SC^{-1})$ влечет хаусдорфовость пучка $\mathbb{P}(S)$. □

Приступим к доказательству основной теоремы 1.

Доказательство. (1)⇔(2) следует из [11, теорема 1].
(3)⇔(4) следует из [11, теорема 2] поскольку коммутативное простое полукольцо является полуполем.
(1)&(2)⇒(3). Пусть S — коммутативное строго риккартово полукольцо. По лемме 3 и предложению 2, (1) пирсовский слой полукольца SC^{-1} в точке M изоморфен $S_M C_M^{-1}$, поэтому достаточно показать, что $C_M = S_M \setminus \{0\}$. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент слоя в точке M пучка $\mathbb{P}(S)$, допустим, c_M для некоторого $c \in S$. Пучок $\mathbb{P}(S)$ хаусдорфов, поэтому носитель любого сечения — открыто-замкнутое множество. Глобальное сечение

$$\chi = \begin{cases} \hat{c} & \text{на } \operatorname{supp} \hat{c}, \\ \hat{1} & \text{на } \operatorname{Max} BS \setminus \operatorname{supp} \hat{c} \end{cases}$$

имеет вид $\hat{d}$ для некоторого элемента $d \in S$ [8, теорема 3]. В силу построения сечение $\hat{d}$ принимает ненулевое значение в каждом слое, поэтому по [11, следствие, п. 1)] d является неуравнителем полукольца S. Получаем $s_M = d_M \in C_M$, следовательно, $C_M = S_M \setminus \{0\}$, и $S_M C_M^{-1}$ — полуполе. Условие $BS = B(SC^{-1})$ следует из леммы 3, хаусдорфовость пучка $(\mathbb{P}(SC^{-1}), \operatorname{Max} B(SC^{-1}))$ — из предложения 2, (2).
(3)⇒(1) Пирсовские слои полукольца SC^{-1} являются полуполями, поэтому — полукольцами без уравнителей, пучок $\mathbb{P}(SC^{-1})$ хаусдорфов, следовательно по [11, теорема 1] SC^{-1} — строго риккартово полукольцо. Поскольку $BS = B(SC^{-1})$ и S является подполукольцом SC^{-1}, то по лемме 2 S — строго риккартово полукольцо. □

Заключение

Покажем, почему теорема 1 является обобщением леммы 3.1 Бергмана [1], и обсудим некоторые моменты в доказательстве этой леммы.

Пусть S — коммутативное кольцо с единицей. *Носителем элемента* $a \in S$ в $\operatorname{Max} BS$ называется множество $\{M \in \operatorname{Max} BS\colon a_M \neq 0_M\}$, это понятие согласуется с используемым выше понятием носителя сечения. Отметим, что открыто-замкнутость в $\operatorname{Max} BS$ носителя каждого элемента кольца S равносильна хаусдорфовости пирсовского пучка $\mathbb{P}(S)$. Кольцо называется *регулярным*, если в нем разрешимо уравнение $axa = a$ для любого элемента a. Для удобства укажем формулировку результата Бергмана.

Lemma 3.1 (Бергман [1]). Пусть S — коммутативное кольцо с единицей, C — мультипликативная полугруппа всех неделителей нуля, SC^{-1} — полное кольцо частных. Тогда равносильны следующие условия:

(i) S риккартово;

(ii) носитель в $\operatorname{Max} BS$ любого элемента из S открыто-замкнут, слой кольца S в каждой точке из $\operatorname{Max} BS$ есть область целостности;

(iii) слой кольца SC^{-1} в каждой точке из $\operatorname{Max} BS$ является полем;

(iv) SC^{-1} — регулярное кольцо, и все идемпотенты из SC^{-1} лежат в S.

Открыто-замкнутость произвольного носителя в условии (ii) означает, что накрывающее пространство пирсовского пучка кольца S хаусдорфово. С другой стороны, пирсовский пучок риккартова полукольца хаусдорфовым не является (см. [11, определение 4, предложение 4]). По этой причине в теореме 1 S — строго риккартово полукольцо [11, теорема 1]. Очевидно, если строго риккартово полукольцо является кольцом, то оно риккартово. В пункте (4) теоремы 1 вместо бирегулярности можно было бы оставить регулярность полукольца SC^{-1}, в коммутативном полукольце эти понятия совпадают.

Рассмотрим сейчас более пристально доказательство леммы 3.1 [1]. Самое большое сомнение в предложенном доказательстве Бергмана вызвали рассуждения в переходе (ii)⇒(iii) и обоснование импликации (iii)⇒(iv). Именно, предлагается рассмотреть пучок на базисном пространстве $\operatorname{Max} BS$ со слоями $S_M C_M^{-1}$, $M \in \operatorname{Max} BS$ (мы используем обозначения, принятые в предложении 2 нашей статьи). Во-первых, заметим, что замена в некотором пучке слоев на другие не гарантирует получение нового пучка. В своей работе Бергман меняет каждый слой S_M на $S_M C_M^{-1}$. Во-вторых, приводимые рассуждения и пример после леммы 3.1 [1] показывают, что Бергман допускает несовпадение множеств BS и $B(SC^{-1})$. Но в такой ситуации предлагаемая конструкция $(P, X) = (\dot{\cup} S_M C_M^{-1}, \operatorname{Max} BS)$ точно не является пирсовским пучком кольца SC^{-1}. Отметим, что $\operatorname{Max} BS$ не является и подпространством $\operatorname{Max} B(SC^{-1})$, и о возможных связях между этими топологическими пространствами ничего не говорится. Возможно, построение пучка (P, X) мыслилось Бергманом в виде пучка ростков предпучка, об этом в других терминах кратко упоминается в его статье. Так или иначе, необходимых доводов, что (P, X) является пучком, на наш взгляд, не хватает.

Таким образом, претензии к доказательству Бергмана следующие. В импликации (ii)⇒(iii) строится некоторый пучок, но обоснования, что получается пучок, отсутствуют (скорее всего Бергман понимает его как пирсовский пучок кольца SC^{-1}). В (iii)⇒(iv) необоснованная конструкция пучка применяется для доказательства свойств кольца SC^{-1}, при этом используется условие вложения SC^{-1} в кольцо глобальных сечений этого пучка.

Видимо указанные претензии можно снять, поскольку найдены понятные нам уточнения условий и доказательства, изложенные в нашей теореме 1. При этом остается вопрос, верна ли лемма 3.1 в формулировке, указанной в [1]? К пунктам (i) и (ii) претензий нет, и очевидна их равносильность. С имеющимся у Бергмана обоснованием перехода к пункту (iii) можно согласиться, поскольку применяется только конструкция пирсовского пучка кольца S. Однако, является ли оригинальная формулировка (iii) достаточной для пункта (iv), весьма сомнительно. Поэтому проведем следующее рассуждение. Рассмотрим более сильное, чем (iii), условие. Лемма 3 и предложение 2, (1) нашей статьи позволяют из (ii) получить:

(iii’) *пирсовский пучок кольца SC^{-1} имеет базисное пространство $\operatorname{Max} BS$, его каждый пирсовский слой является полем.*

По существу это кольцевая переформулировка пункта (3) теоремы 1. Импликации (iii’)⇒(iv)⇒(i) очевидны.

В заключение отметим, что скромное название (лемма) утверждения Бергмана не должно вводить в заблуждение: хотя в статье она действительно несколько раз используется для обоснования других результатов, ее самостоятельное значение несомненно. На это указывает и ее активное цитирование.

Остается открытой задача обобщения теоремы 1 для некоммутативных полуколец. В классе коммутативных полуколец перспективным выглядит использование теоремы 1 для исследований наследственных и полунаследственных полуколец — как обобщения результатов статьи Бергмана [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bergman G. M. Hereditary commutative rings and centres of hereditary rings // Proceedings of the London Mathematical Society. 1971. Vol. s3-23. Issue 2. P. 214–236. https://doi.org/10.1112/plms/s3-23.2.214
2. Pierce R. S. Modules over commutative regular rings // Memoirs of the American Mathematical Society. 1967. No. 70. P. 53–110. https://doi.org/10.1090/memo/0070
3. Keimel K., Teleman S. Tulane university ring and operator theory year, 1970–1971. Vol. 3: Lectures on the applications of sheaves to ring theory. Berlin–Heidelberg: Springer, 1971. https://doi.org/10.1007/BFb0058562
4. Georgescu G. Pierce representations of distributive lattices // Kobe Journal of Mathematics. 1993. Vol. 10. No. 1. P. 1–11. https://zbmath.org/0801.06018
5. Szeto G. The sheaf representation of near-rings and its applications // Communications in Algebra. 1977. Vol. 5. Issue 7. P. 773–782. https://doi.org/10.1080/00927877708822193
6. Comer S. D. Representations by algebras of sections over Boolean spaces // Pacific Journal of Mathematics. 1971. Vol. 38. No. 1. P. 29–38. https://doi.org/10.2140/pjm.1971.38.29
7. Салавова К. Кольца с инволюцией: дис. . . . канд. физ.-матем. наук / МГУ имени М. В. Ломоносова. Москва, 1978. https://istina.msu.ru/dissertations/4718443/
8. Чермных В. В. Пучковые представления полуколец // Успехи математических наук. 1993. Т. 48. Вып. 5 (293). С. 185–186. https://www.mathnet.ru/rus/rm1341
9. Burgess W. D., Stephenson W. An analogue of the Pierce sheaf for non-commutative rings // Communications in Algebra. 1978. Vol. 6. Issue 9. P. 863–886. https://doi.org/10.1080/00927877808822272
10. Марков Р. В., Чермных В. В. О пирсовских слоях полуколец // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 19. Вып. 2. С. 171–186. https://www.mathnet.ru/rus/fpm1582
11. Марков Р. В., Чермных В. В. Полукольца, близкие к регулярным, и их пирсовские слои // Труды института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 3. С. 213–221. https://www.mathnet.ru/rus/timm1214
12. Бабенко М. В., Чермных В. В. Пирсовские слои полуколец косых многочленов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 48–60. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-48-60
13. Golan J. S. Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. https://zbmath.org/0947.16034
14. Vechtomov E. M. Rings and sheaves // Journal of Mathematical Sciences. 1995. Vol. 74. Issue 1. P. 749–798. https://doi.org/10.1007/BF02362842
15. Чермных В. В. Функциональные представления полуколец // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 3. С. 111–227. https://www.mathnet.ru/rus/fpm1417
16. Бредон Г. Э. Теория пучков. М.: Наука, 1988.
17. Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники. Серия «Алгебра. Топология. Геометрия». 1991. Т. 29. С. 119–191. https://www.mathnet.ru/rus/inta131

Поступила в редакцию 26.11.2025
Принята к публикации 16.05.2026

Чермных Василий Владимирович, д. ф.-м. н., доцент, главный научный сотрудник, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, 167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8650-4554
E-mail: vv146@mail.ru

Цитирование: В. В. Чермных. О полукольце частных коммутативного строго риккартова полукольца и его пирсовских слоях // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 2. С. 338–348.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2026. Vol. 36. Issue 2. Pp. 338–348.

V. V. Chermnykh

On the semiring of fractions of a commutative strongly Rickart semiring and its Pierce stalks

Keywords: strongly Rickart semiring, semiring of fractions, Pierce sheaf, Pierce stalk.

MSC2020: 16Y60

DOI: 10.35634/vm260209

We consider representations of a commutative strongly Rickart semiring and its total semiring of fractions by sections of their Pierce sheaves. It is established that the basis spaces of these sheaves coincide. The main theorem provides a characterization of the strogly Rickart semiring and its total semiring of fractions in terms of Pierce stalks. This generalizes G. M. Bergman's result on the characterization of a commutative Rickart ring.

REFERENCES

1. Bergman G. M. Hereditary commutative rings and centres of hereditary rings, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1971, vol. s3-23, issue 2, pp. 214–236. https://doi.org/10.1112/plms/s3-23.2.214
2. Pierce R. S. Modules over commutative regular rings, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1967, no. 70, pp. 53–110. https://doi.org/10.1090/memo/0070
3. Keimel K., Teleman S. *Tulane university ring and operator theory year, 1970–1971. Vol. 3: Lectures on the applications of sheaves to ring theory*, Berlin–Heidelberg: Springer, 1971. https://doi.org/10.1007/BFb0058562
4. Georgescu G. Pierce representations of distributive lattices, *Kobe Journal of Mathematics*, 1993, vol. 10, no. 1, pp. 1–11. https://zbmath.org/0801.06018
5. Szeto G. The sheaf representation of near-rings and its applications, *Communications in Algebra*, 1977, vol. 5, issue 7, pp. 773–782. https://doi.org/10.1080/00927877708822193
6. Comer S. D. Representations by algebras of sections over Boolean spaces, *Pacific Journal of Mathematics*, 1971, vol. 38, no. 1, pp. 29–38. https://doi.org/10.2140/pjm.1971.38.29
7. Salavova K. *Rings with involution*, Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Moscow, 1978. (In Russian). https://istina.msu.ru/dissertations/4718443/
8. Chermnykh V. V. Sheaf representation of semirings, *Russian Mathematical Surveys*, 1993, vol. 48, issue 5, pp. 169–170. https://doi.org/10.1070/RM1993v048n05ABEH001078
9. Burgess W. D., Stephenson W. An analogue of the Pierce sheaf for non-commutative rings, *Communications in Algebra*, 1978, vol. 6, issue 9, pp. 863–886. https://doi.org/10.1080/00927877808822272
10. Markov R. V., Chermnykh V. V. On Pierce stalks of semirings, *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 213, issue 2, pp. 243–253. https://doi.org/10.1007/s10958-016-2713-5
11. Markov R. V., Chermnykh V. V. Semirings close to regular and their Pierce stalks, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 213–221 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/timm1214
12. Babenko M. V., Chermnykh V. V. Pierce stalks of semirings of skew polynomials, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 48–60 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-48-60
13. Golan J. S. *Semirings and their applications*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. https://zbmath.org/0947.16034
14. Vechtomov E. M. Rings and sheaves, *Journal of Mathematical Sciences*, 1995, vol. 74, issue 1, pp. 749–798. https://doi.org/10.1007/BF02362842
15. Chermnykh V. V. Functional representations of semirings, *Journal of Mathematical Sciences*, 2012, vol. 187, issue 2, pp. 187–267. https://doi.org/10.1007/s10958-012-1062-2
16. Bredon G. E. *Sheaf theory*, New York: McGraw-Hill, 1967. https://zbmath.org/0158.20505

17. Vechtomov E. M. Rings of continuous functions. Algebraic aspects, *Journal of Mathematical Sciences*, 1994, vol. 71, issue 2, pp. 2364–2408. https://doi.org/10.1007/BF02111022

Received 26.11.2025
Accepted 16.05.2026

Vasiliy Vladimirovich Chermnykh, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Chief Researcher, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Oktyabr'skii pr., 55, Syktyvkar, 167001, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8650-4554
E-mail: vv146@mail.ru

Citation: V. V. Chermnykh. On the semiring of fractions of a commutative strongly Rickart semiring and its Pierce stalks, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 2, pp. 338–348.