

УДК 517.95

© К. А. Зубанкова, А. Г. Лосев, Е. А. Мазена

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В работе изучается асимптотическое поведение решений задачи Дирихле для неоднородного уравнения Шрёдингера с граничными данными на бесконечности на модельных римановых многообразиях. Под модельными понимают полные некомпактные римановы многообразия, представимые в виде $M_g = B \cup D$, где B — некоторый связный предкомпакт с непустой внутренностью (∂B — гладкая граница), а D — многообразие со сферически-симметричной метрикой (модельный конец). В первой части работы изучаются свойства решений внешней краевой задачи Дирихле на модельном конце D . В частности, найдены достаточно точные оценки скорости асимптотического приближения рассматриваемого решения к граничным данным на бесконечности в равномерной норме. Во второй части показана возможность продолжения решения внешней краевой задачи для неоднородного уравнения Шрёдингера с модельного конца D на все модельное многообразие с сохранением асимптотического неравенства. Оценка скорости асимптотического сближения получена в терминах метрики многообразия и коэффициентов неоднородного уравнения Шрёдингера.

Ключевые слова: задача Дирихле, неоднородное уравнение Шрёдингера, модельное риманово многообразие, асимптотическое поведение.

DOI: [10.35634/vm260301](https://doi.org/10.35634/vm260301)**Введение**

Работа посвящена изучению асимптотического поведения решений задачи Дирихле с краевыми условиями на «бесконечности» для неоднородного уравнения Шрёдингера на модельных римановых многообразиях и выполнена в русле современного геометрического анализа. Данное исследовательское направление возникло на стыке дифференциальной геометрии, математического и функционального анализа, теории уравнений в частных производных, теории случайных процессов. В настоящее время в математике изучение эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях охватывает достаточно весомую часть исследований, истоки которой восходят к классификационной теории некомпактных римановых поверхностей и многообразий (см., например, [1, 2]), основанной на изучении некоторых функциональных классов на заданных геометрических объектах. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно также получить из работ [3–5]. Остановимся кратко на некоторых важных моментах.

В настоящее время в изучении эллиптических уравнений на римановых многообразиях выделяют три основных направления.

Первое направление связано с исследованием вопроса выполнения теорем типа Лиувилля о тривиальности решений эллиптических уравнений, принадлежащих соответствующему функциональному классу (см., например, [2, 3, 6–10]).

Второе направление связано с нахождением размерности пространства решений изучаемого линейного эллиптического уравнения на заданном многообразии (см., например, [7, 11–13]). В принципе, данное направление можно относить к теоремам типа Лиувилля.

И третье направление охватывает вопросы разрешимости различных краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, в частности задачи Дирихле о восстановлении решения эллиптического уравнения с заданным асимптотическим поведением.

Остановимся подробнее на последнем направлении. Заметим, что на произвольном некомпактном римановом многообразии весьма затруднительна общепринятая постановка задачи Дирихле. Однако в некоторых случаях геометрическая компактификация многообразия позволяет сделать это в классической формулировке (аналогично постановке задачи Дирихле в ограниченных областях $\mathbb{R}^n$). Одним из классов таких римановых многообразий являются многообразия с отрицательной секционной кривизной. Например, М. Андерсон и Д. Сулливан (см. [14, 15]) показали, что на полном односвязном многообразии с отрицательной секционной кривизной $\text{sect } M$, удовлетворяющей условиям $-b^2 \leq \text{sect } M \leq -a^2 < 0$, существует геометрическая компактификация, добавляющая сферу на бесконечности $S(\infty)$ и доказано, что на $\overline{M} = M \cup S(\infty)$ однозначно разрешима задача Дирихле о восстановлении гармонической на таком многообразии функции по непрерывным граничным данным на $S(\infty)$.

Близкий к этому подход к постановке краевых задач и получению условий их разрешимости для гармонических функций и решений стационарного уравнения Шрёдингера может быть осуществлен на сферически-симметричных многообразиях, а также некомпактных модельных и квазимодельных римановых многообразиях, обобщающих сферически-симметричные (работы [9, 11, 16]).

Другой подход к постановке краевых задач был предложен в работе [17]. Он основан на понятии классов эквивалентных функций, которые предопределяют асимптотическое поведение решений краевых задач с помощью равномерной нормы в пространстве непрерывных функций на многообразии. Такой подход позволил осуществить постановку краевых задач на многообразии при отсутствующей естественной геометрической компактификации.

Все описанные выше результаты касались однородных эллиптических уравнений. В последние 20 лет стали появляться работы, связанные с изучением решений неоднородных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях (см., например, [18–22]).

При этом в исследованиях, посвященных разрешимости краевых задач как для однородных так и для неоднородных уравнений, традиционно большое внимание уделяется вопросу: в каком смысле (или в какой метрике) понимать близость решения к граничным данным. Так в работах [9, 11, 16] показано асимптотическое приближение решения задачи Дирихле к непрерывным граничным данным в равномерной норме (см., например, [20, 21]). Одновременно, вызывает интерес получение количественных характеристик, оценивающих скорость приближения решения к граничным данным. В этом направлении можно указать знаменитую «лемму о возрастании» (см. [23]), а также работы [24–26].

Именно в этом русле и выполнена данная работа. В частности, найдены достаточно точные оценки скорости асимптотического приближения решений задачи Дирихле к граничным данным на некомпактных римановых многообразиях некоторого специального вида, полученные в терминах метрики многообразия и коэффициентов неоднородного уравнения Шрёдингера.

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Одним из классов римановых многообразий, на которых постановка краевых задач имеет естественную геометрическую интерпретацию, является множество многообразий следующего вида (называемых — модельными): $M_g = B \cup D$, где B — некоторый связный предкомпакт с непустой внутренней частью (∂B — гладкая граница), а D (модельный конец) изометрично прямому произведению $[r_0; +\infty) \times S$ ($r_0 > 0$ и S — компактное риманово многообразие без края) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r) d\theta^2.$$

Здесь $g(r)$ — положительная и гладкая на $[r_0; +\infty)$ функция, а $d\theta^2$ — метрика на S . Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$, поверхности вращения и другие.

За последние годы был опубликован ряд работ, посвященных изучению поведения решений различных эллиптических уравнений и неравенств на подобных многообразиях и некоторых их обобщениях (см., например, [7, 9, 11, 16, 20, 21]). В частности, в работе [20] исследуются решения уравнения Пуассона $u \in C^2(M_g)$

$$\Delta u = f(x), \quad (1)$$

где $f \in C^{0,\alpha}(M_g) \cap G^{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor}(D)$. Здесь $n = \dim M_g$, и

$$G^p(D) = \{ \phi(r, \theta) \in C^{0,\alpha}(M_g) : \forall r \in [r_0; +\infty) \phi(r, \theta) \in C^p(S) \}$$

— подмножество пространства гёльдеровых на M_g функций, являющихся p раз непрерывно дифференцируемыми по второму аргументу на D для любого фиксированного первого аргумента. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_0(r) &= \|f(r, \theta)\|_{L^1(S)}, \quad \varphi_m(r) = \|\Delta_\theta^m f(r, \theta)\|_{L^2(S)}, \\ h_m(r) &= \int_r^\infty g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t \left(\frac{1}{g^2(\xi)} + \varphi_0(\xi) + \varphi_m(\xi) \right) g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt. \end{aligned}$$

В [20] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть многообразие M_g таково, что $h_m(r_0) < \infty$, где $m = \lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$. Тогда для любой функции $\Phi(\theta) \in C(S)$ на M_g существует единственное решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что на D выполнено

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) = \Phi(\theta).$$

Также отметим, что предельный переход в граничных условиях на «бесконечности» понимается в смысле равномерной сходимости, то есть

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|u(r, \theta) - \Phi(\theta)\|_{C(M_g \setminus B(r))} = 0,$$

где $B(r)$ — геодезический шар радиуса r с центром в некоторой фиксированной точке.

Таким образом, была доказана разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона на модельных римановых многообразиях. Позднее в работе [25] данный результат был уточнен и получена оценка скорости асимптотической сходимости решения к граничным данным.

В данной работе изучаются аналогичные задачи для более общего неоднородного эллиптического уравнения, а именно, для неоднородного уравнения Шрёдингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = f(x), \quad (2)$$

где $c(x), f(x) \in C^{0,\alpha}(M_g)$, $c(x) \geq 0$ на M_g .

Дополнительно полагаем, что $c(x)$ имеет некомпактный носитель на M_g (см. также [6]) и $c(x) > 0$ в некоторой окрестности предкомпактного подмножества $B \subset M_g$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что на D выполнены условия:

- 1) $c(r, \theta) \equiv c(r)$;
- 2) $f_1(r) \leq f(r, \theta) \leq f_2(r)$, где $f_1(r), f_2(r) \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}_+)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_r^\infty g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t g^{n-1}(\xi) \left(\frac{1}{g^2(\xi)} + c(\xi) \right) d\xi \right) dt, \\ h_i(r) &= I(r) + \int_r^\infty g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t |f_i(\xi)| g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt \quad (i = 1, 2), \\ h(r) &= I(r) + \int_r^\infty g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t \max\{|f_1(\xi)|, |f_2(\xi)|\} g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt \end{aligned}$$

и сформулируем основной результат.

Теорема 2. Пусть риманово многообразие M_g и правая часть $f(x)$ уравнения (2) таковы, что $h(r_0) < \infty$. Тогда для любой функции $\Phi(\theta) \in C^{2m_1}(S)$, где $m_1 = \left[\frac{3n}{4}\right] + 1$, на M_g существует единственное решение $u(x)$ уравнения (2) такое, что на D выполнено

$$|u(r, \theta) - \Phi(\theta)| \leq Ch(r)$$

для любых (r, θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r, θ) .

Доказательство данной теоремы проведем поэтапно в следующих двух параграфах.

§ 2. Асимптотическое поведение решений внешней краевой задачи Дирихле

В данном параграфе будем рассматривать уравнение (2) на модельном конце D

$$Lu = f(r, \theta).$$

Рассмотрим сначала на D неоднородные уравнения вида

$$Lu = f_i(r), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

и докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть многообразие M_g и правая часть $f_i(r)$ уравнения (3) таковы, что $h_i(r_0) < \infty$. Тогда для любых функций $\Psi(\theta) \in C^{2m_1}(S)$, $\Phi(\theta) \in C^{2m_1}(S)$, где $m_1 = \left[\frac{3n}{4}\right] + 1$, на D существует единственное ограниченное решение $u_i(r, \theta)$ уравнения (3) такое, что

$$u_i(r_0, \theta) = \Psi(\theta) \text{ и } |u_i(r, \theta) - \Phi(\theta)| \leq C \cdot h_i(r)$$

для любых (r, θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r, θ) .

Доказательство. Рассмотрим внешнюю краевую задачу для уравнения (3) на D . Будем искать функцию $u_i(r, \theta)$ такую, что

$$\begin{cases} Lu_i(r, \theta) = f_i(r), \\ u_i(r_0, \theta) = \Psi(\theta), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|u_i(r, \theta) - \Phi(\theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\Psi(\theta)$ и $\Phi(\theta)$ — некоторые заданные на D функции.

В свою очередь решение неоднородной задачи (4) ищем в виде

$$u_i(r, \theta) = u_{i1}(r, \theta) + u_{i2}(r),$$

где $u_{i1}(r, \theta)$ является решением внешней краевой задачи для однородного уравнения

$$\begin{cases} Lu_{i1}(r, \theta) = 0, \\ u_{i1}(r_0, \theta) = \Psi(\theta), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|u_{i1}(r, \theta) - \Phi(\theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0, \end{cases}$$

а $u_{i2}(r)$ — решением однородной краевой задачи для неоднородного уравнения

$$\begin{cases} Lu_{i2}(r, \theta) = f_i(r), \\ u_{i2}(r_0, \theta) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|u_{i2}(r, \theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Как показано в [11], в силу сходимости интеграла $h_i(r_0) < \infty$, решение $u_{i1}(r, \theta)$ на D существует и единственно. Покажем, что выполнено неравенство

$$|u_{i1}(r, \theta) - \Phi(\theta)| \leq Ch_i(r)$$

для любых (r, θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r, θ) .

Пусть $\{w_k(\theta)\}$ — ортонормированный базис в $L^2(S)$ из собственных функций оператора Лапласа $-\Delta_\theta$, а λ_k — соответствующие собственные числа ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots$), то есть

$$\Delta_\theta w_k(\theta) + \lambda_k w_k(\theta) = 0.$$

Тогда имеют место следующие разложения

$$\Phi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(\theta), \quad \Psi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k w_k(\theta),$$

где

$$c_k = \int_S \Phi(\theta) w_k(\theta) d\theta, \quad z_k = \int_S \Psi(\theta) w_k(\theta) d\theta.$$

Также для любого фиксированного r справедливо представление для решения $u_{i1}(r, \theta)$

$$u_{i1}(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta), \quad \text{где } v_k(r) = \int_S u_{i1}(r, \theta) w_k(\theta) d\theta.$$

В работе [7] было показано, что для всех $k \geq 0$ коэффициенты Фурье $v_k(r)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$v_k''(r) + (n-1) \frac{g'(r)}{g(r)} v_k'(r) - \left(\frac{\lambda_k}{g^2(r)} + c(r) \right) v_k(r) = 0, \quad (6)$$

которое будем называть спектральным. В данном случае $v_k(r)$ также удовлетворяет краевым условиям $v_k(r_0) = z_k$, $\lim_{r \rightarrow \infty} v_k(r) = c_k$. Более того, в [11] показано, что для всех $r \geq r_0$ имеет место неравенство $|v_k(r)| \leq |c_k| + |z_k|$. Кроме того, как и в [11], легко показать абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(\theta), \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k w_k(\theta), \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta).$$

Для примера покажем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\omega_k(\theta)|$.

Пользуясь формулой Грина и определением собственных функций, получаем

$$|c_k| = \left| \int_S \Phi(\theta) w_k(\theta) d\theta \right| = \frac{1}{\lambda_k} \left| \int_S \Phi(\theta) \Delta_\theta w_k(\theta) d\theta \right| = \frac{1}{\lambda_k} \left| \int_S \Delta_\theta \Phi(\theta) w_k(\theta) d\theta \right|.$$

Применим формулу Грина m_1 раз:

$$|c_k| = \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} \left| \int_S \Delta_\theta^{m_1} \Phi(\theta) w_k(\theta) d\theta \right|.$$

Далее воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$|c_k| \leq \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} \left(\int_S (\Delta_\theta^{m_1} \Phi(\theta))^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_S w_k^2(\theta) d\theta \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{\lambda_k^{m_1}}, \quad (7)$$

где C — константа, зависящая от выбора краевых условий, а также от S и m_1 .

Известны следующие оценки собственных функций и собственных чисел (асимптотика Вейля) оператора Лапласа в $C(S)$ (см., например, [27])

$$\|w_k\|_{C(S)} \leq C_1 \lambda_k^{\frac{n-2}{4}}, \quad C_2 k^{\frac{2}{n-1}} \leq \lambda_k \leq C_3 k^{\frac{2}{n-1}}. \quad (8)$$

Учитывая приведенные выше оценки, получаем справедливость следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\omega_k(\theta)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{\lambda_k^{m_1}} C_1 \lambda_k^{\frac{n-2}{4}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^*}{k^{\frac{2m_1}{n-1}}} C_1^* k^{\frac{2}{n-1} \frac{n-2}{4}} \leq \\ &\leq C_1^{**} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{2m_1}{n-1} + \frac{n-2}{2n-2}} = C_1^{**} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{4m_1+n-2}{2n-2}} < \infty. \end{aligned}$$

При достаточно больших m_1 последний числовой ряд сходится. А именно, при $m_1 = \left[\frac{3n}{4} \right] + 1$ выполнено $\frac{-2-4m_1+n}{2n-2} < -1$, что обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость первого из рассматриваемых рядов.

Аналогично доказывается абсолютная и равномерная на D при $r \geq r_0$ сходимость двух других рядов.

Из равномерной и абсолютной на D при $r \geq r_0$ сходимости указанных рядов в частности следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (v_k(r) - c_k) w_k(\theta)$$

также сходится равномерно и абсолютно на этом множестве.

По определению равномерной сходимости функционального ряда имеем: для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех точек $(r, \theta) \in D$, $r \geq r_0$ выполнено

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} (v_k(r) - c_k) w_k(\theta) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim_{r \rightarrow \infty} v_k(r) = c_k$ для всех $k = 0, 1, \dots$, то для любого $k = 0, \dots, N$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $R_k(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $r > R_k(\varepsilon)$ выполнено

$$|v_k(r) - c_k| < \frac{\varepsilon}{2(N+1) \max_{\theta} |w_k(\theta)|},$$

откуда

$$\left| \sum_{k=0}^N (v_k(r) - c_k) w_k(\theta) \right| \leq \sum_{k=0}^N |v_k(r) - c_k| |w_k(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2(N+1)} (N+1) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $R(\varepsilon) = \max\{R_0(\varepsilon), \dots, R_N(\varepsilon), r_0\}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для всех $r > R(\varepsilon)$, для всех θ получим

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (v_k(r) - c_k) w_k(\theta) \right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |u_{i1}(r, \theta) - \Phi(\theta)| < \varepsilon,$$

учитывая свойства сходящихся рядов. Последнее условие равносильно предельному равенству

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{D \setminus B(R)} |u_{i1}(r, \theta) - \Phi(\theta)| = 0,$$

откуда следует равномерная сходимость решения к граничным данным на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|u_{i1}(r, \theta) - \Phi(\theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0.$$

Далее, используя неравенство треугольника, оценим разность

$$\begin{aligned} |u_{i1}(r, \theta) - \Phi(\theta)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) \omega_k(\theta) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k(\theta) \right| = \\ &= \left| (v_0(r) - c_0) \omega_0(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} (v_k(r) - c_k) \omega_k(\theta) \right| \leq \\ &\leq |(v_0(r) - c_0) \omega_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r) - c_k| |\omega_k(\theta)|. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее оценим сверху первое слагаемое. При $k = 0$ спектральное уравнение примет вид

$$v_0''(r) + (n-1) \frac{g'(r)}{g(r)} v_0'(r) - c(r) v_0(r) = 0. \quad (10)$$

Дважды интегрируя уравнение (10), как и в [11], имеем

$$v_0(r) = \int_{r_0}^r g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t c(\xi) v_0(\xi) g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt + v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + v_0(r_0).$$

Так как $\lim_{r \rightarrow \infty} v_0(r) = c_0$, то

$$c_0 = \int_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t c(\xi) v_0(\xi) g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt + v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + v_0(r_0).$$

Из определения собственных функций следует $w_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{|S|}}$, где $|S|$ — объем S . Тогда оценим разность

$$\begin{aligned} |(v_0(r) - c_0)| &= \left| \int_{r_0}^r g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t c(\xi) v_0(\xi) g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt + \right. \\ &+ v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + v_0(r_0) - \int_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t c(\xi) v_0(\xi) g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt - \\ &\left. - v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} - v_0(r_0) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| -v'_0(r_0)g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} - v_0(r_0) \right| \leq \\
& \leq \int_r^{\infty} g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t c(\xi)|v_0(\xi)|g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt + |v'_0(r_0)|g^{n-1}(r_0) \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \leq \\
& \leq (|c_0| + |z_0|) \int_r^{\infty} g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t c(\xi)g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt + |v'_0(r_0)|g^{n-1}(r_0) \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \leq \\
& \leq (|c_0| + |z_0|)I(r) + |v'_0(r_0)|g^{n-1}(r_0)I(r) = CI(r).
\end{aligned}$$

Здесь C — константа, не зависящая от r .

Теперь оценим сверху каждый член ряда из неравенства (9). Дважды интегрируя спектральное уравнение (6) при $k > 0$, получим

$$\begin{aligned}
v_k(r) = & \int_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (\lambda_k g^{n-3}(z) + c(z)g^{n-1}(z)) v_k(z) dz + \\
& + v'_k(r_0)g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + v_k(r_0).
\end{aligned} \tag{11}$$

С учетом краевых условий $v_k(r_0) = z_k$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} v_k(r) = c_k$, имеем

$$c_k = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (\lambda_k g^{n-3}(z) + c(z)g^{n-1}(z)) v_k(z) dz + v'_k(r_0)g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + z_k.$$

Выразим отсюда z_k :

$$z_k = c_k - \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (\lambda_k g^{n-3}(z) + c(z)g^{n-1}(z)) v_k(z) dz - v'_k(r_0)g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)}.$$

Подставляя полученное выражение в (11), получим

$$\begin{aligned}
v_k(r) = & \int_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (\lambda_k g^{n-3}(z) + c(z)g^{n-1}(z)) v_k(z) dz + v'_k(r_0)g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + \\
& + c_k - \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (\lambda_k g^{n-3}(z) + c(z)g^{n-1}(z)) v_k(z) dz - v'_k(r_0)g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} = \\
& = c_k - \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (\lambda_k g^{n-3}(z) + c(z)g^{n-1}(z)) v_k(z) dz - v'_k(r_0)g^{n-1}(r_0) \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)}.
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
|v_k(r) - c_k| = & \left| \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (\lambda_k g^{n-3}(z) + c(z)g^{n-1}(z)) v_k(z) dz - v'_k(r_0)g^{n-1}(r_0) \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \right| \leq \\
& \leq \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (\lambda_k g^{n-3}(z) + c(z)g^{n-1}(z)) |v_k(z)| dz + |v'_k(r_0)|g^{n-1}(r_0) \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)}.
\end{aligned}$$

Напомним, что $|v_k(r)| \leq |c_k| + |z_k|$. Тогда последнее неравенство можно продолжить следующим образом

$$\begin{aligned}
|v_k(r) - c_k| \leq & (|c_k| + |z_k|) \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (\lambda_k g^{n-3}(z) + c(z)g^{n-1}(z)) dz + \\
& + |v'_k(r_0)|g^{n-1}(r_0) \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \leq \max\{\lambda_k, 1\}(|c_k| + |z_k|)I(r) + |v'_k(r_0)|g^{n-1}(r_0)I(r).
\end{aligned}$$

Учитывая вышеизложенное, продолжим оценку (9):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r) - c_k| |\omega_k(\theta)| &\leq I(r) \sum_{k=1}^{\infty} (\max\{\lambda_k, 1\} (|c_k| + |z_k|) + g^{n-1}(r_0) |v'_k(r_0)|) |\omega_k(\theta)| \leq \\ &\leq I(r) \sum_{k=1}^{\infty} (\max\{\lambda_k, 1\} |c_k| |\omega_k(\theta)| + \max\{\lambda_k, 1\} |z_k| |\omega_k(\theta)| + g^{n-1}(r_0) |v'_k(r_0)| |\omega_k(\theta)|) \leq \\ &\leq I(r) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \max\{\lambda_k, 1\} |c_k| |\omega_k(\theta)| + \sum_{k=1}^{\infty} \max\{\lambda_k, 1\} |z_k| |\omega_k(\theta)| + \sum_{k=1}^{\infty} g^{n-1}(r_0) |v'_k(r_0)| |\omega_k(\theta)| \right). \end{aligned}$$

Далее покажем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \max\{\lambda_k, 1\} |c_k| |\omega_k(\theta)|.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\max\{\lambda_k, 1\} = \lambda_k$. Учитывая полученные выше оценки (7) и асимптотику Вейля (8), имеем справедливость следующих неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \max\{\lambda_k, 1\} |c_k| |\omega_k(\theta)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} C_3 k^{\frac{2}{n-1}} \frac{C}{\lambda_k^{m_1}} C_1 \lambda_k^{\frac{n-2}{4}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} C_3 k^{\frac{2}{n-1}} \frac{C^*}{k^{\frac{2m_1}{n-1}}} C_1^* k^{\frac{2}{n-1} \frac{n-2}{4}} \leq \\ &\leq C_3^* \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2}{n-1} - \frac{2m_1}{n-1} + \frac{n-2}{2n-2}} = C_3^* \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{4-4m_1+n-2}{2n-2}} = C_3^* \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2-4m_1+n}{2n-2}} < \infty. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\max\{\lambda_k, 1\} = 1$. Как и выше получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \max\{\lambda_k, 1\} |c_k| |\omega_k(\theta)| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\omega_k(\theta)| \leq C_3^{**} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{-2-4m_1+n}{2n-2}} < \infty.$$

Оба ряда сходятся при достаточно больших m_1 . Например, полагая $m_1 = \left[\frac{3n}{4}\right] + 1$, получаем неравенство $\frac{2-4m_1+n}{2n-2} < -1$ для первого случая и неравенство $\frac{-2-4m_1+n}{2n-2} < -1$ во втором случае, которые влекут сходимость указанных рядов.

Аналогичным образом доказывается сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |z_k| |\omega_k(\theta)| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |v'_k(r_0)| |\omega_k(\theta)|.$$

Более подробно остановимся на исследовании последнего ряда. Сначала отдельно оценим $v'_k(r)$. По определению имеем

$$v_k(r) = \int_S u_{i1}(r, \theta) w_k(\theta) d\theta,$$

причем с учетом степени гладкости граничных данных и коэффициентов уравнения (3) функция $u_{i1}(r, \theta)$ является решением класса $C^{2,\alpha}(D) \cap G^{2m_1+2}(D)$. Следовательно, дифференцируя обе части равенства, а также используя определение собственных функций $w_k(\theta)$, получаем

$$|v'_k(r)| = \left| \int_S \frac{\partial u_{i1}}{\partial r}(r, \theta) w_k(\theta) d\theta \right| = \frac{1}{\lambda_k} \left| \int_S \frac{\partial u_{i1}}{\partial r}(r, \theta) \Delta_{\theta} w_k d\theta \right|.$$

Применим формулу Грина m_1 раз и воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned} |v'_k(r_0)| &= \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} \left| \int_S \Delta_\theta^{m_1} \frac{\partial u_{i1}}{\partial r}(r_0, \theta) w_k(\theta) d\theta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_k^{m_1}} \sqrt{\int_S \left(\Delta_\theta^{m_1} \frac{\partial u_{i1}}{\partial r}(r_0, \theta) \right)^2 d\theta} \sqrt{\int_S w_k^2(\theta) d\theta} = \frac{C}{\lambda_k^{m_1}}, \end{aligned}$$

где $C > 0$ — некоторая константа, зависящая от S и m_1 . Из асимптотики Вейля следует

$$|v'_k(r_0)| \leq \frac{C}{\lambda_k^{m_1}} \leq \frac{C^*}{\left(k^{\frac{2}{n-1}}\right)^{m_1}}.$$

Далее доказательство сходимости этого ряда дословно совпадает с исследованием сходимости первого ряда.

С учетом сходимости рядов получаем справедливость следующих неравенств:

$$\begin{aligned} |u_{i1}(r, \theta) - \Phi(\theta)| &\leq |v_0(r)\omega_0 - c_0\omega_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r) - c_k| |\omega_k(\theta)| \leq I(r) \left(\frac{C}{\sqrt{|S|}} + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k| |\omega_k(\theta)| + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |z_k| |\omega_k(\theta)| + \sum_{k=1}^{\infty} g^{n-1}(r_0) |v'_k(r_0)| |\omega_k(\theta)| \left. \right) \leq C^{**} I(r) \end{aligned}$$

для всех (r, θ) при $r > r_0$, где $C^{**} > 0$ — некоторая константа, зависящая от S и m_1 , от выбора краевых условий и не зависящая от (r, θ) .

Далее рассмотрим решение $u_{i2}(r)$ однородной краевой задачи для неоднородного уравнения Шрёдингера (5). Разрешимость этой задачи получена в работе [21]. Докажем справедливость оценки

$$|u_{i2}(r)| \leq Q h_i(r),$$

для всех $r > r_0$ с некоторой константой $Q > 0$, которая не зависит от (r, θ) .

Учитывая вид оператора Лапласа на модельном конце D , легко проверить, что решение $u_{i2}(r)$ краевой задачи (5) является решением неоднородного спектрального уравнения при $k = 0$

$$v_0''(r) + (n-1) \frac{g'(r)}{g(r)} v_0'(r) - c(r) v_0(r) = f_i(r). \quad (12)$$

Дважды интегрируя уравнение (12) в пределах $[r_0, r]$, получаем эквивалентное данному спектральному уравнению интегральное уравнение

$$v_0(r) = \int_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (c(z)v_0(z) + f_i(z)) g^{n-1}(z) dz + v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} + v_0(r_0). \quad (13)$$

Кроме того, $v_0(r)$ удовлетворяет краевым условиям $v_0(r_0) = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} v_0(r) = 0$.

Учитывая краевые условия, из (13) имеем

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (c(z)v_0(z) + f_i(z)) g^{n-1}(z) dz = -v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)}.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\begin{aligned} &\int_{r_0}^r \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (c(z)v_0(z) + f_i(z)) g^{n-1}(z) dz = \\ &= - \int_r^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (c(z)v_0(z) + f_i(z)) g^{n-1}(z) dz - v_0'(r_0) g^{n-1}(r_0) \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получаем

$$\begin{aligned}
 |v_0(r)| &= \left| - \int_r^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (c(z)v_0(z) + f_i(z))g^{n-1}(z) dz - v'_0(r_0)g^{n-1}(r_0) \int_r^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \right| = \\
 &= \left| \int_r^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t (c(z)v_0(z) + f_i(z))g^{n-1}(z) dz + v'_0(r_0)g^{n-1}(r_0) \int_r^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \right| \leq \\
 &\leq \int_r^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t |c(z)v_0(z) + f_i(z)|g^{n-1}(z) dz + |v'_0(r_0)|g^{n-1}(r_0) \int_r^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \leq \\
 &\leq \max_{[r_0, +\infty)} |v_0(r)| \int_r^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t c(z)g^{n-1}(z) dz + \int_r^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^t |f_i(z)|g^{n-1}(z) dz + \\
 &\quad + |v'_0(r_0)|g^{n-1}(r_0) \int_r^\infty \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \leq Q_1 I(r) + h_i(r) + Q_2 I(r).
 \end{aligned}$$

Откуда следует оценка

$$|v_0(r)| \leq Q h_i(r),$$

где константа Q зависит от правой части уравнения и краевых условий.

Таким образом, для функции $u_{i2}(r)$ получаем аналогичную оценку

$$|u_{i2}(r)| \leq Q h_i(r)$$

для всех $r > r_0$, где $Q > 0$ — некоторая константа, не зависящая от (r, θ) .

Докажем теперь основное утверждение

$$|u_i(r, \theta) - \Phi(\theta)| = |u_{i1}(r, \theta) + u_{i2}(r) - \Phi(\theta)| \leq |u_{i1}(r, \theta) - \Phi(\theta)| + |u_{i2}(r)| \leq C h_i(r)$$

для всех (r, θ) при $r > r_0$, где $C > 0$ — некоторая константа, не зависящая от (r, θ) .

В заключение доказательства покажем единственность решения $u_i(r, \theta)$ (при $i = 1, 2$), удовлетворяющего условию леммы. Предположим противное. Пусть на D существует два различных решения уравнения (3) таких, что

$$u_i(r_0, \theta) = \Psi(\theta) \text{ и } |u_i(r, \theta) - \Phi(\theta)| \leq C \cdot h_i(r)$$

и

$$u_i^*(r_0, \theta) = \Psi(\theta) \text{ и } |u_i^*(r, \theta) - \Phi(\theta)| \leq C \cdot h_i(r)$$

для любых (r, θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r, θ) .

Рассмотрим разность $u(r, \theta) = u_i(r, \theta) - u_i^*(r, \theta) \not\equiv 0$. Легко показать, что функция $u(r, \theta)$ в силу сходимости интеграла $h_i(r_0) < \infty$ будет удовлетворять следующей краевой задаче

$$\begin{cases} Lu(r, \theta) = 0, \\ u(r_0, \theta) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|u(r, \theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0. \end{cases}$$

По теореме единственности для решений стационарного уравнения Шрёдингера в асимптотической постановке (см. [17]) получаем, что $u \equiv 0$ на D . Пришли к противоречию. Лемма доказана. $\square$

Далее рассмотрим на модельном конце D неоднородные уравнения (2)

$$Lu = f(r, \theta),$$

где $f_1(r) \leq f(r, \theta) \leq f_2(r)$, и докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть многообразие M_g и правая часть $f(r, \theta)$ уравнения (2) таковы, что $h(r_0) < \infty$. Тогда для любых функций $\Psi(\theta) \in C^{2m_1}(S)$, $\Phi(\theta) \in C^{2m_1}(S)$, где $m_1 = \left[\frac{3n}{4}\right] + 1$, на D существует единственное ограниченное решение $u(r, \theta)$ уравнения (2) такое, что

$$u(r_0, \theta) = \Psi(\theta) \text{ и } |u(r, \theta) - \Phi(\theta)| \leq C \cdot h(r)$$

для любых (r, θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r, θ) .

Доказательство. Как и в предыдущей лемме 1 рассмотрим решение неоднородной задачи

$$\begin{cases} Lu(r, \theta) = f(r, \theta), \\ u(r_0, \theta) = \Psi(\theta), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|u(r, \theta) - \Phi(\theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0, \end{cases}$$

Существование решения $u(r, \theta)$ на D показано в работе [21] в силу сходимости интеграла $h(r_0)$. Докажем справедливость оценки

$$|u(r, \theta)| \leq Ch(r),$$

для всех (r, θ) при $r > r_0$ с некоторой константой $C > 0$, которая не зависит от (r, θ) .

По лемме 1 на D существуют решения уравнений (3) $u_1(r, \theta)$ и $u_2(r, \theta)$, удовлетворяющие заданным краевым условиям, то есть

$$\begin{cases} Lu_1(r, \theta) = f_1(r), \\ u_1(r_0, \theta) = \Psi(\theta), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|u_1(r, \theta) - \Phi(\theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Lu_2(r, \theta) = f_2(r), \\ u_2(r_0, \theta) = \Psi(\theta), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|u_2(r, \theta) - \Phi(\theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0. \end{cases}$$

Кроме того, имеют место неравенства

$$|u_i(r, \theta) - \Phi(\theta)| \leq Ch_i(r) \leq Ch(r), \quad (15)$$

для любых (r, θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r, θ) .

Далее рассмотрим на D разность $u_2(r, \theta) - u_1(r, \theta)$. Ясно, что

$$\begin{cases} L(u_2(r, \theta) - u_1(r, \theta)) = f_2(r) - f_1(r) \geq 0, \\ u_2(r_0, \theta) - u_1(r_0, \theta) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|u_2(r, \theta) - u_1(r, \theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0, \end{cases}$$

то есть разность $u_2(r, \theta) - u_1(r, \theta)$ является субрешением стационарного уравнения Шрёдингера $Lu = 0$. Следовательно, на модельном конце D выполнено $u_2(r, \theta) - u_1(r, \theta) \leq 0$. Аналогично можно показать на D справедливость неравенств $u_2(r, \theta) - u(r, \theta) \leq 0$, $u(r, \theta) - u_1(r, \theta) \leq 0$. Объединяя последние три неравенства, на модельном конце D имеем

$$u_2(r, \theta) \leq u(r, \theta) \leq u_1(r, \theta). \quad (16)$$

Учитывая неравенства (15) и (16), окончательно получаем

$$|u(r, \theta) - \Phi(\theta)| \leq Ch(r),$$

для любых (r, θ) при $r > r_0$, где константа $C > 0$ не зависит от (r, θ) . Доказательство единственности решения $u(r, \theta)$ аналогично доказательству данного факта в предыдущей лемме. Лемма доказана. $\square$

§ 3. Асимптотическое поведение решений задачи Дирихле на модельном многообразии

В данном параграфе будет показана возможность продолжения решения внешней краевой задачи для неоднородного уравнения Шрёдингера (2) с модельного конца D на все модельное многообразие с сохранением асимптотического неравенства. Таким образом, будет доказана **теорема 2**.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть u_0 — решение следующей внешней краевой задачи на D

$$\begin{cases} Lu(r, \theta) = f(r, \theta), \\ u(r_0, \theta) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|u(r, \theta) - \Phi(\theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0, \end{cases}$$

существование которого в условиях теоремы 2 показано в лемме 2. Более того, u_0 на D удовлетворяет асимптотическому неравенству

$$|u_0(r, \theta) - \Phi(\theta)| \leq C^* h(r)$$

для всех (r, θ) при $r > r_0$, где константа $C^* > 0$ не зависит от (r, θ) .

Обозначим через B'' окрестность компакта B , где $c(x) > 0$, и рассмотрим функцию $U \in C^{2,\alpha}(M_g)$ такую, что $U = u_0$ вне B'' , $U = 0$ на некотором подмножестве $B' \Subset B$. Ясно, что $\Delta U = f^*(x)$ на M_g , где $f^*(x) \in C^{0,\alpha}(M_g)$ удовлетворяет следующим условиям: $f^*(x) = 0$ на B' , $f^*(x) \equiv f(x)$ вне B'' , $f^*(x) \not\equiv f(x)$ на $B'' \setminus B'$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольное гладкое исчерпание многообразия M_g , то есть последовательность предкомпактных открытых непустых подмножеств $B_k \subset M_g$ таких, что $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$, $M_g = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$, ∂B_k — гладкие границы и $\overline{B} \subset B_k$ для всех k .

Построим последовательность функций ϕ_k — решение задачи

$$L\phi_k = f \text{ в } B_k, \quad \phi_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k},$$

и последовательность функций $\psi_k = \phi_k - U$. Для этих функций мы имеем:

$$L\psi_k = f - f^* \text{ в } B_k, \quad \psi_k|_{\partial B_k} = 0,$$

где функция $f(x) - f^*(x) \in C^\alpha(M_g)$ и удовлетворяет следующим условиям: $f(x) - f^*(x) = 0$ на компактном множестве B' , $f(x) - f^*(x) = 0$ вне окрестности компакта B'' . Таким образом, $\Omega := \text{supp}\{f(x) - f^*(x)\}$ — компакт и $\Omega \subset B''$. Далее воспользуемся оценкой решения эллиптического уравнения (см. также [21]). Для всех k для $x \in B_k$ имеем:

$$|\psi_k| \leq \sup_{B_k} |\psi_k| \leq \sup_{\partial B_k} |\psi_k| + \sup_{\Omega} \frac{|f(x) - f^*(x)|}{c(x)} = \sup_{\Omega} \frac{|f(x) - f^*(x)|}{c(x)}.$$

Отсюда следует, что семейство функций $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ равномерно ограничено на M_g . Последнее условие дает компактность семейства функций $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ в классе $C^2(G)$ для произвольного предкомпактного подмножества $G \subset M_g$, что, в свою очередь, влечет существование предельной функции $\psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k$, которая является решением уравнения $L\psi = f(x) - f^*(x)$ на M_g . Покажем, что ψ удовлетворяет асимптотическому неравенству

$$|\psi(r, \theta)| \leq C_3 h(r)$$

для всех (r, θ) при $r > r_0$, где константа $C_3 > 0$ не зависит от (r, θ) .

В силу непрерывности функции $\psi(x)$ существует

$$U = \max_{\partial B} |\psi(x)|.$$

Очевидно, выполнены неравенства

$$-(U + 1) \leq \psi|_{\partial B} \leq U + 1 \quad \text{и} \quad -(U + 1) \leq \psi_k|_{\partial B} \leq U + 1$$

для любого достаточно большого k .

По лемме 2 на D существуют решения $\underline{u}(r, \theta)$ и $\overline{u}(r, \theta)$ уравнения (2), удовлетворяющие следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} L\underline{u}(r, \theta) = f(r, \theta), \\ \underline{u}(r_0, \theta) = -(U + 1), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|\underline{u}(r, \theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L\overline{u}(r, \theta) = f(r, \theta), \\ \overline{u}(r_0, \theta) = U + 1, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|\overline{u}(r, \theta)\|_{C(D \setminus B(r))} = 0. \end{cases}$$

Кроме того, имеют место неравенства

$$|\underline{u}(r, \theta)| \leq C_1 h(r) \quad \text{и} \quad |\overline{u}(r, \theta)| \leq C_2 h(r)$$

для любых (r, θ) при $r > r_0$, где константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ не зависят от (r, θ) .

Учитывая принцип сравнения для решений линейных эллиптических уравнений, получаем на D справедливость следующих условий

$$(U + 1) \leq \underline{u} \leq 0 \leq \overline{u} \leq (U + 1), \quad \underline{u} \leq \psi_k \leq \overline{u}$$

на $B_k \setminus B$ для любого k . Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим $\underline{u} \leq \psi \leq \overline{u}$. Учитывая выполнение асимптотических неравенств для функций $\underline{u}$ и $\overline{u}$, получаем $|\psi| \leq C_3 h(r)$.

Из существования функции $\psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k$ следует существование предельной функции

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\psi_k + U) = \psi + U.$$

Причем $Lu = L\psi + LU = f - f^* + f^* = f$ на M_g и на D выполнено асимптотическое неравенство

$$\begin{aligned} |u(r, \theta) - \Phi(\theta)| &= |\psi + U - \Phi| = |\psi + u_0 - \Phi| \leq |\psi| + |u_0 - \Phi| \leq \\ &\leq C_3 h(r) + C^* h(r) = Ch(r) \end{aligned}$$

для всех (r, θ) при $r > r_0$, где $C > 0$ — некоторая константа, не зависящая от (r, θ) . Доказательство единственности построенного решения проводится аналогично предыдущим леммам. Теорема доказана. $\square$

Финансирование. Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проекта FZUU-2026-0005 «Разработка методов моделирования сложных систем на основе интеграции прямых вычислительных экспериментов и интеллектуального анализа данных».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ahlfors L. V. Sur le type d'une surface de Riemann // *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. 1935. Vol. 201. Issue 2. P. 30–32.
2. Cheng S. Y., Yau S. T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1975. Vol. 28. Issue 3. P. 333–354.
<https://doi.org/10.1002/cpa.3160280303>
3. Grigor'yan A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1999. Vol. 36. No. 2. P. 135–249. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-99-00776-4>
4. Grigor'yan A. Heat kernel and analysis on manifolds. American Mathematical Society, 2009.
<https://doi.org/10.1090/amsip/047>
5. Bianchini B., Mari L., Pucci P., Rigoli M. Geometric analysis of quasilinear inequalities on complete manifolds. Maximum and compact support principles and detours on manifolds. Cham: Birkhäuser, 2021. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-62704-1>
6. Григорьян А. А., Надирашвили Н. С. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1987. № 5. С. 25–33.
<https://www.mathnet.ru/rus/ivm7741>
7. Лосев А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1991. № 12. С. 15–24.
<https://www.mathnet.ru/rus/ivm5227>
8. Li P., Schoen R. L^p and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds // *Acta Mathematica*. 1984. Vol. 153. P. 279–301. <https://doi.org/10.1007/BF02392380>
9. Murata M. Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds // *Potential Theory: Proceedings of the International Conference on Potential Theory, Nagoya (Japan), August 30–September 4, 1990*. Berlin–New York: De Gruyter, 1992. P. 251–259.
<https://doi.org/10.1515/9783110859065.251>
10. Losev A. G., Filatov V. V. Liouville type theorems for solutions of semilinear equations on non-compact Riemannian manifolds // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 629–639. <https://doi.org/10.35634/vm210407>
11. Лосев А. Г., Мазепа Е. А. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1999. № 6. С. 41–49. <https://www.mathnet.ru/rus/ivm622>
12. Korolkov S. A., Losev A. G. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // *Mathematische Zeitschrift*. 2012. Vol. 272. Nos. 1–2. P. 459–472.
<https://doi.org/10.1007/s00209-011-0943-2>
13. Sung Chiung-Jue, Tam Luen-Fai, Wang Jiaping. Spaces of harmonic functions // *Journal of the London Mathematical Society*. 2000. Vol. 61. Issue 3. P. 789–806. <https://doi.org/10.1112/S0024610700008759>
14. Anderson M. T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature // *Journal of Differential Geometry*. 1983. Vol. 18. No. 4. P. 701–721. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214438178>
15. Sullivan D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold // *Journal of Differential Geometry*. 1983. Vol. 18. No. 4. P. 723–732. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214438179>
16. Лосев А. Г. Об одном критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида // *Математические заметки*. 1996. Т. 59. Вып. 4. С. 558–564.
<https://doi.org/10.4213/mzm1750>
17. Мазепа Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях // *Сибирский математический журнал*. 2002. Т. 43. № 3. С. 591–599.
<https://www.mathnet.ru/rus/smj1314>
18. Munteanu O., Sesum N. The Poisson equation on complete manifolds with positive spectrum and applications // *Advances in Mathematics*. 2010. Vol. 223. Issue 1. P. 198–219.
<https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.08.003>

19. Mastrolia P., Monticelli D.D., Punzo F. Elliptic and parabolic equations with Dirichlet conditions at infinity on Riemannian manifolds // *Advances in Differential Equations*. 2018. Vol. 23. No. 1/2. P. 89–108. <https://doi.org/10.57262/ade/1508983361>
20. Лосев А. Г. О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях // *Дифференциальные уравнения*. 2017. Т. 53. № 12. С. 1643–1652. <https://doi.org/10.1134/S037406411712007X>
21. Losev A., Mazepa E. On the solvability of boundary value problems for the inhomogeneous Schrödinger equation on model Riemannian manifolds // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022. Vol. 43. Issue 3. P. 642–652. <https://doi.org/10.1134/S1995080222060208>
22. Мазепа Е. А., Рябошлыкova Д. К. Краевые задачи для неоднородного уравнения Шрёдингера с вариациями его потенциала на квазимодельных римановых многообразиях // *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2025. Т. 28. № 2. С. 5–14. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.2.1>
23. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. <https://zbmath.org/0226.35001>
24. Гущин А. К. Некоторое усиление свойства внутренней непрерывности по Гёльдеру решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // *Теоретическая и математическая физика*. 2008. Т. 157. № 3. С. 345–363. <https://doi.org/10.4213/tmf6284>
25. Losev A. G., Mazepa E. A. Asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson equation on model Riemannian manifolds // *Сибирские электронные математические известия*. 2022. Т. 19. Вып. 1. С. 66–80. <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.006>
26. Зубанкова К. А., Мазепа Е. А., Полубоярова Н. М. Об асимптотическом поведении решений стационарного уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях // *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2023. Т. 26. № 4. С. 18–30. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.2>
27. Grieser D. Uniform bounds for eigenfunctions of the Laplacian on manifolds with boundary // *Communications in Partial Differential Equations*. 2002. Vol. 27. Issues 7–8. P. 1283–1299. <https://doi.org/10.1081/PDE-120005839>

Поступила в редакцию 12.02.2026

Принята к публикации 17.07.2026

Зубанкова Кристина Алексеевна, ORCID, Волгоградский государственный университет, 400062, Россия, г. Волгоград, пр. Университетский, 100.

E-mail: bliznjukka@volsu.ru

Лосев Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа и теории функций, директор Института математики и информационных технологий, Волгоградский государственный университет, 400062, Россия, г. Волгоград, пр. Университетский, 100.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1072-8375>

E-mail: alexander.losev@volsu.ru

Мазепа Елена Алексеевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа и теории функций, Волгоградский государственный университет, 400062, Россия, г. Волгоград, пр. Университетский, 100.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7603-4133>

E-mail: elena.mazepa@volsu.ru

Цитирование: К. А. Зубанкова, А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа. О скорости сходимости решений краевых задач для неоднородного уравнения Шрёдингера на модельных римановых многообразиях // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2026. Т. 36. Вып. 3. С. 351–369.

K. A. Zubankova, A. G. Losev, E. A. Mazepa

On the rate of convergence of solutions to boundary value problems for the inhomogeneous Schrödinger equation on model Riemannian manifolds

Keywords: Dirichlet problem, the inhomogeneous Schrödinger equation, model Riemannian manifold, asymptotic behavior.

MSC2020: 31C12

DOI: [10.35634/vm260301](https://doi.org/10.35634/vm260301)

The paper studies the asymptotic behavior of solutions to the Dirichlet problem for the inhomogeneous Schrödinger equation with boundary data at infinity on model Riemannian manifolds. Model manifolds are complete non-compact Riemannian manifolds that can be represented as $M_g = B \cup D$, where B is some connected precompact set with nonempty interior (∂B is a smooth boundary), and D is a manifold with a spherically symmetric metric (the model end). In the first part of the paper, we study the properties of solutions to the external Dirichlet boundary value problem at the model end D . In particular, fairly accurate estimates for the rate of asymptotic approximation of the solution to the boundary data at infinity in the uniform norm are found. The second part shows the possibility of continuing the solution of the external boundary value problem for the inhomogeneous Schrödinger equation from the model endpoint D to the entire model manifold while preserving the asymptotic inequality. Quantitative characteristics that estimate the speed of the approximation are found in terms of the metric of the manifold and the coefficients of the inhomogeneous Schrödinger equation.

Funding. The study of the second author was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FZUU-2026-0005).

REFERENCES

1. Ahlfors L. V. Sur le type d'une surface de Riemann, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 1935, vol. 201, issue 2, pp. 30–32.
2. Cheng S. Y., Yau S. T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1975, vol. 28, issue 3, pp. 333–354. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160280303>
3. Grigor'yan A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1999, vol. 36, no. 2, pp. 135–249. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-99-00776-4>
4. Grigor'yan A. *Heat kernel and analysis on manifolds*, American Mathematical Society, 2009. <https://doi.org/10.1090/amsip/047>
5. Bianchini B., Mari L., Pucci P., Rigoli M. *Geometric analysis of quasilinear inequalities on complete manifolds: Maximum and compact support principles and detours on manifolds*, Cham: Birkhäuser, 2021. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-62704-1>
6. Grigor'yan A. A., Nadirashvili N. S. Liouville theorems and exterior boundary value problems, *Soviet Mathematics*, 1987, vol. 31, no. 5, pp. 31–42. <https://zbmath.org/0665.58040>
7. Losev A. G. Certain Liouville theorems for Riemannian manifolds of a special form, *Soviet Mathematics*, 1991, vol. 35, no. 12, pp. 15–23. <https://zbmath.org/0764.58035>
8. Li P., Schoen R. L^p and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds, *Acta Mathematica*, 1984, vol. 153, pp. 279–301. <https://doi.org/10.1007/BF02392380>
9. Murata M. Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds, *Potential Theory: Proceedings of the International Conference on Potential Theory, Nagoya (Japan), August 30–September 4, 1990*, Berlin–New York: De Gruyter, 1992, pp. 251–259. <https://doi.org/10.1515/9783110859065.251>

10. Losev A.G., Filatov V.V. Liouville type theorems for solutions of semilinear equations on non-compact Riemannian manifolds, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 4, pp. 629–639. <https://doi.org/10.35634/vm210407>
11. Losev A.G., Mazepa E.A. On the asymptotic behavior of solutions of certain elliptic type equations on noncompact Riemannian manifolds, *Russian Mathematics*, 1999, vol. 43, no. 6, pp. 39–47. <https://zbmath.org/0988.58008>
12. Korolkov S.A., Losev A.G. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends, *Mathematische Zeitschrift*, 2012, vol. 272, nos. 1–2, pp. 459–472. <https://doi.org/10.1007/s00209-011-0943-2>
13. Sung Chiung-Jue, Tam Luen-Fai, Wang Jiaping. Spaces of harmonic functions, *Journal of the London Mathematical Society*, 2000, vol. 61, issue 3, pp. 789–806. <https://doi.org/10.1112/S0024610700008759>
14. Anderson M.T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature, *Journal of Differential Geometry*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 701–721. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214438178>
15. Sullivan D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold, *Journal of Differential Geometry*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 723–732. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214438179>
16. Losev A.G. On the hyperbolicity criterion for noncompact Riemannian manifolds of special type, *Mathematical Notes*, 1996, vol. 59, issue 4, pp. 400–404. <https://doi.org/10.1007/BF02308689>
17. Mazepa E.A. Boundary value problems for the stationary Schrödinger equation on Riemannian manifolds, *Siberian Mathematical Journal*, 2002, vol. 43, issue 3, pp. 473–479. <https://doi.org/10.1023/A:1015411502059>
18. Munteanu O., Sesum N. The Poisson equation on complete manifolds with positive spectrum and applications, *Advances in Mathematics*, 2010, vol. 223, issue 1, pp. 198–219. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.08.003>
19. Mastrolia P., Monticelli D.D., Punzo F. Elliptic and parabolic equations with Dirichlet conditions at infinity on Riemannian manifolds, *Advances in Differential Equations*, 2018, vol. 23, no. 1/2, pp. 89–108. <https://doi.org/10.57262/ade/1508983361>
20. Losev A.G. Solvability of the Dirichlet problem for the Poisson equation on some noncompact Riemannian manifolds, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 12, pp. 1595–1604. <https://doi.org/10.1134/S0012266117120072>
21. Losev A.G., Mazepa E.A. On the solvability of boundary value problems for the inhomogeneous Schrödinger equation on model Riemannian manifolds, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, issue 3, pp. 642–652. <https://doi.org/10.1134/S1995080222060208>
22. Mazepa E.A., Ryaboshlykova D.K. Boundary value problems for the inhomogeneous Schrödinger equation with variations of its potential on quasi-model Riemannian manifolds, *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2025, vol. 28, no. 2, pp. 5–14 (in Russian). <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.2.1>
23. Landis E.M. *Second order equations of elliptic and parabolic type*, Providence: American Mathematical Society, 1997. <https://doi.org/10.1090/mmono/171>
Original Russian text published in Landis E.M. *Uravneniya vtorogo poriyadka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov*, Moscow: Nauka, 1971. <https://zbmath.org/0226.35001>
24. Gushchin A.K. A strengthening of the interior Hölder continuity property for solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2008, vol. 157, issue 3, pp. 1655–1670. <https://doi.org/10.1007/s11232-008-0138-0>
25. Losev A.G., Mazepa E.A. Asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson equation on model Riemannian manifolds, *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2022, vol. 19, issue 1, pp. 66–80. <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.006>
26. Zubankova K.A., Mazepa E.A., Poluboyarova N.M. On the asymptotic behavior of solutions of the stationary Schrödinger equation on non-compact Riemannian manifolds, *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2023, vol. 26, no. 4, pp. 18–30 (in Russian). <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.2>

27. Grieser D. Uniform bounds for eigenfunctions of the Laplacian on manifolds with boundary, *Communications in Partial Differential Equations*, 2002, vol. 27, issues 7–8, pp. 1283–1299.
<https://doi.org/10.1081/PDE-120005839>

Received 12.02.2026

Accepted 17.07.2026

Kristina Alexeevna Zubankova, Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis and Function Theory, Volgograd State University, pr. Universitetskii, 100, Volgograd, 400062, Russia.

E-mail: bliznjukka@volsu.ru

Alexander Georgievich Losev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis and Function Theory, Director, Institute of Mathematics and Information Technologies, Volgograd State University, pr. Universitetskii, 100, Volgograd, 400062, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1072-8375>

E-mail: alexander.losev@volsu.ru

Elena Alexeevna Mazepa, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Function Theory, Volgograd State University, pr. Universitetskii, 100, Volgograd, 400062, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7603-4133>

E-mail: elena.mazepa@volsu.ru

Citation: K. A. Zubankova, A. G. Losev, E. A. Mazepa. On the rate of convergence of solutions to boundary value problems for the inhomogeneous Schrödinger equation on model Riemannian manifolds, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 3, pp. 351–369.