

УДК 519.644.5

© Д. Ю. Иванов

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ВБЛИЗИ И НА ГРАНИЦЕ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Нормальная производная потенциала двойного слоя (НП ПДС) задается на границе области сильно сингулярными интегралами. Поэтому ни на самой границе, ни в непосредственной близости от нее НП ПДС не может быть вычислена с удовлетворительной точностью с использованием обычных квадратурных формул, которые дают надежные результаты только на достаточном расстоянии от границы. В настоящей работе в рамках метода граничных элементов получены полуаналитические аппроксимации НП ПДС для двумерного уравнения Гельмгольца, равномерно сходящиеся с почти кубической скоростью в замкнутой приграничной области, включающей саму границу. Такие аппроксимации осуществимы для любой аналитически заданной границы класса C^7 . Для этого используются точное интегрирование по гладкой компоненте функции расстояния вблизи точек наблюдения, аддитивно-мультипликативный способ выделения особенности, кусочно-квадратичная интерполяция медленно изменяющихся функций и симметризация промежутков интерполяции относительно проекций точек наблюдения на границу области. Теоретические выводы подтверждены результатами вычисления НП ПДС для уравнения Гельмгольца при различных значениях комплексного волнового числа внутри, вне и на границе единичного круга.

Ключевые слова: метод граничных элементов, сильно сингулярные интегралы, уравнение Гельмгольца, потенциал двойного слоя, полуаналитическая аппроксимация.

DOI: [10.35634/vm260303](https://doi.org/10.35634/vm260303)

Введение

В настоящей работе в рамках метода граничных элементов (МГЭ) [1, п. 2.5] получены полуаналитические аппроксимации нормальной производной (НП) потенциала двойного слоя (ПДС) для уравнения Гельмгольца вблизи и на самой границе $\partial\Omega$ двумерной области Ω . В соответствии с МГЭ кривая $\partial\Omega$ разбивается на дуги, так называемые граничные элементы (ГЭ), на каждой из которых осуществляется кусочно-полиномиальная интерполяция (КПИ) функции плотности, заданной дискретно в точках коллокации. Интегралы, возникающие после КПИ функции плотности, могут быть вычислены с удовлетворительной точностью с помощью квадратурных формул Гаусса (КФГ) [2, гл. 3, § 5, п. 3] только на достаточном удалении от границы $\partial\Omega$. Если же точка наблюдения x , в которой вычисляется потенциал, находится вблизи узлов КФГ, точность, как правило, становится неудовлетворительной. Это явление, называемое эффектом пограничного слоя, связано с сингулярностью ядра интегрального оператора при $x = x' \in \partial\Omega$, когда в узлах КФГ вычисление потенциала вообще невозможно. Поэтому интегралы на ГЭ называются сингулярными (СИ), если точка наблюдения x принадлежит ГЭ, и почти сингулярными (ПСИ), если точка x не принадлежит ГЭ, но находится близко от него и ее проекция на границу области принадлежит ГЭ. Для вычисления СИ и ПСИ были разработаны специальные методы, в том числе полуаналитические методы аппроксимации двумерных потенциалов и их производных [3–11].

Методы [3–5] основаны на переходе от интегрирования по длине дуги s к переменной $\rho = (r^2 - d^2)^{1/2}$, где r и d — расстояния от точки наблюдения x до точки интегрирования $x' \in \partial\Omega$ и до кривой $\partial\Omega$ соответственно. Интегралы по ρ после частичной аппроксимации

подынтегральной функции вычисляются аналитически. Для этого применяется мультипликативный способ выделения особенности: подынтегральная функция разбивается на два множителя, один из которых, включающий якобиан, является медленно изменяющейся функцией и поэтому аппроксимируется полиномом, а другой множитель, сингулярный или близкий к сингулярному, берется в качестве весовой функции.

При таком подходе требуется аналитическое задание кривой $\partial\Omega$ и достаточная ее гладкость. Возможность точного интегрирования определяется лишь весовой функцией, и для точного интегрирования по переменной ρ не требуется аппроксимация границы. Интегралы зависят от кривой $\partial\Omega$ только параметрически, координатные функции не могут повлиять на сложность интеграла. Кроме того, не существует принципиальных ограничений для повышения порядка аппроксимации. Действительно, порядок аппроксимации здесь зависит от степени полинома, находящегося в числителе подынтегральной функции, и рост степени полинома не приводит к существенному усложнению аналитического решения интегралов.

В полуаналитических методах [6–11], где точное интегрирование осуществляется по переменной s или по другим локальным координатам границы $\partial\Omega$, отличным от ρ , аппроксимация границы необходима и неограниченное увеличение порядка аппроксимации невозможно. А именно, для того чтобы точное интегрирование стало возможным, координатные функции границы $\partial\Omega$ на каждом ГЭ заменяются многочленами, образованными степенями s . Поскольку функция r^2 находится в знаменателе подынтегрального выражения или под знаком логарифма, аппроксимирующие ее многочлены обрезаются до многочленов второй степени (иначе получение аналитического выражения для первообразной в общем случае невозможно), и тогда использование многочленов более высоких степеней, чем вторая, не приводит к увеличению порядка аппроксимации. По той же причине ограничиваются линейной аппроксимацией координатных функций при вычислении трехмерных потенциалов [12–14]

В работах автора с помощью точного интегрирования по переменной ρ получены равномерно сходящиеся вблизи границы двумерной области аппроксимации потенциала двойного слоя (ПДС) для уравнения Гельмгольца [15], аппроксимации НП потенциала простого слоя (ППС) для уравнения Лапласа [16, 17], аппроксимации НП ПДС для уравнения Лапласа [18], аппроксимации НП ППС для уравнения Гельмгольца [19]. В настоящей работе аппроксимации НП ПДС для двумерного уравнения Гельмгольца получены по аналогии с работой [18]. Как и в работах [15–19], здесь используется аддитивно-мультипликативный способ выделения особенности: интегралы на близких к точке наблюдения x ГЭ представляются в виде суммы нескольких интегралов, каждый из которых аппроксимируется описанным выше мультипликативным способом. Такая аддитивно-мультипликативная аппроксимация обладает большей скоростью равномерной сходимости, чем простая мультипликативная аппроксимация, описанная в [3–5].

Если функция плотности достаточно гладкая, то НП ПДС можно доопределить на границе по непрерывности [20, § 2.5], [21, § 4.1]. Полученные таким образом значения НП ПДС также могут быть вычислены с помощью сильно сингулярных интегралов, существующих только в смысле конечного значения по Адамару, у которых подынтегральная функция имеет особенность r^{-2} [21, § 1.6]. Известные из литературы полуаналитические аппроксимации двумерных НП ПДС на границе $\partial\Omega$ имеют ошибки $O(h \ln h)$ [21, § 13.6] и $O(h^{1/2})$ [22, 23] (h — длина ГЭ). Полученные здесь аппроксимации НП ПДС сходятся равномерно со скоростью $O(h^3 \ln h)$ вблизи и на самой границе $\partial\Omega \in C^7$. При этом для аппроксимации медленно изменяющихся функций используется кусочно-квадратичная интерполяция (ККИ). Для достижения наибольшей скорости равномерной сходимости осуществляется симметризация промежутков интерполяции по переменной ρ относительно проекций опорных точек. Полученные результаты вычисления НП ПДС внутри, вне и на границе единичного круга

подтверждают равномерную почти кубическую скорость сходимости предлагаемых аппроксимаций.

§ 1. Постановка задачи

Пусть Ω_+ — двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$. В декартовых координатах (x_1, x_2) зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{x}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, и увеличивается, когда область Ω_+ при обходе границы $\partial\Omega$ остается слева. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$ ($s \in \mathbb{R}$), периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимно однозначное отображение множества $[-S, S)$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^n$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $I_S \equiv [-S, S]$ производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0, n}$, $i = 1, 2$), причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$. Будем считать, что $\partial\Omega \in C^2$, если иное не оговорено особо.

Через $C(\partial\Omega)$ обозначим банахово пространство периодических с периодом $2S$ и непрерывных на всей числовой оси $\mathbb{R}$ комплекснозначных функций $f(s)$, с нормой $\|f\|_{C(\partial\Omega)} \equiv \sup_{s \in I_S} |f(s)|$. Через $C^n(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы пространства функций $f \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве I_S производные $f^{(l)}(s)$ ($l = \overline{1, n}$), с нормой $\|f\|_{C^n(\partial\Omega)} \equiv \sum_{l=0}^n \|f^{(l)}\|_{C(\partial\Omega)}$ ($C^0(\partial\Omega) = C(\partial\Omega)$).

Обозначим через $\vec{e}(s)$ единичный вектор, направленный по касательной к кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$ в сторону увеличения параметра s , а через $\vec{n}(s)$ — единичную нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$, направленную внутрь области Ω_+ . Векторы $\vec{e}(s)$, $\vec{n}(s)$ образуют правую систему, и их координаты (x_1, x_2) вычисляются с помощью формул: $\vec{e}(s) = (\tilde{x}'_1(s), \tilde{x}'_2(s))$, $\vec{n}(s) = (-\tilde{x}'_2(s), \tilde{x}'_1(s))$.

Введем в рассмотрение местные системы декартовых координат (ξ_s, η_s) с началами в точках $\tilde{x}(s)$ и осями абсцисс и ординат, сонаправленными с векторами $\vec{e}(s)$ и $\vec{n}(s)$ соответственно. Точки $\tilde{x}_d(s)$ ($d \in \mathbb{R}$) с местными координатами $(\xi_s, \eta_s) = (0, d)$ при фиксированном s образуют нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящую через точку $\tilde{x}(s)$. Обозначим через $K(s)$ кривизну со знаком [24, п. 251] кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$. Известно [25, п. 102], что существуют числа $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, такие, что выполняются условия:

- 1) соответствие между точками $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}_d(s)$ ($s \in I_S$) при любом фиксированном $d \in I_D \equiv [D_1, D_2] \setminus \{0\}$ взаимно однозначное;
- 2) при $(s, d) \in T \equiv I_S \times I_D$ выполняются неравенства $1 - dK(s) > 0$.

Условимся, что мы можем иногда для краткости не писать аргументы функции, если они такие же, какие используются при определении функции. На множестве T зададим функции w , u :

$$\begin{aligned} w(\tilde{x}_d(s), \kappa) &\equiv \int_{I_S} p v(s + \sigma) d\sigma, \\ 2\pi p(s, \sigma, d, \kappa) &\equiv \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} K_0(\kappa r) = (2r)^{-1} \kappa K'_0(\kappa r) \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2; \\ u(s, d, \kappa) &\equiv \int_{I_S} g v(s + \sigma) d\sigma, \quad 2\pi g(s, \sigma, d, \kappa) \equiv \partial_{\vec{n}(s)} \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} K_0(\kappa r) = \\ &= \kappa K'_0(\kappa r) [(2r)^{-1} \partial_{\vec{n}(s)} \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2 - (4r^3)^{-1} \partial_{\vec{n}(s)} r^2 \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2] + \\ &\quad + (4r^2)^{-1} \kappa^2 K''_0(\kappa r) \partial_{\vec{n}(s)} r^2 \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $v(s) \in C(\partial\Omega)$; $\arg \kappa \in (-\pi/2, \pi/2]$, $\kappa \neq 0$; $r(s, \sigma, d) \equiv |\vec{r}|$, $\vec{r}(s, \sigma, d) \equiv \overrightarrow{\tilde{x}_d(s)\tilde{x}(s+\sigma)}$; $\partial_{\vec{n}(s)}$, $\partial_{\vec{n}(s+\sigma)}$ — производные по переменным $\tilde{x}_d(s)$, $\tilde{x}_e(s+\sigma)$ ($s \in I_S$, $d \in I_D$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$)

в направлениях $\vec{n}(s)$, $\vec{n}(s + \sigma)$ в точках $\tilde{x}_d(s)$, $\tilde{x}(s + \sigma)$ соответственно:

$$\begin{aligned}\partial_{\vec{n}(s)} \vec{r} &= \partial_d \overline{\tilde{x}_d(s) \tilde{x}(s + \sigma)} = \partial_d (\vec{r}_0 - d \vec{n}(s)) = -\vec{n}(s), \quad \vec{r}_0(s, \sigma) \equiv \overline{\tilde{x}(s) \tilde{x}(s + \sigma)}; \\ \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} \vec{r} &= \left[\partial_\varepsilon \overline{\tilde{x}_d(s) \tilde{x}_\varepsilon(s + \sigma)} \right]_{\varepsilon=0} = \left[\partial_\varepsilon (\vec{r} + \varepsilon \vec{n}(s + \sigma)) \right]_{\varepsilon=0} = \vec{n}(s + \sigma);\end{aligned}$$

$K_0(z)$ — функция Макдональда нулевого порядка [26, п. 3.71], допускающая при $z \neq 0$, $\arg z \in (-\pi/2, \pi/2]$ выражение в виде ряда:

$$K_0(z) = -[\ln(z/2) + \gamma] I_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-2} (z^2/4)^n \sum_{m=1}^n m^{-1} \quad (1.2)$$

[26, п. 3.71, формула (14)], где γ — постоянная Эйлера, $I_0(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-2} (z^2/4)^n$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. С учетом тождества $(2\pi)^{-1} K_0(\kappa r) \equiv i/4 H_0^{(1)}(i\kappa r)$ ($i^2 = -1$, $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка) функция w — ПДС с плотностью v , функция $u = \partial_{\vec{n}(s)} w$ — НП ПДС для двумерного уравнения Гельмгольца $\partial_{x_1 x_1}^2 w + \partial_{x_2 x_2}^2 w - \kappa^2 w = 0$ [20, § 3.10] в приграничной области, образованной точками $\tilde{x}_d(s)$ при $(s, d) \in \bar{T}$.

В силу известных теорем [20, теоремы 2.21, 2.23] функция u может быть доопределена по непрерывности при $d = 0$, $s \in I_S$. Условимся, что если какая-либо функция может быть доопределена по непрерывности при $d = 0$, то мы считаем ее доопределенной таким образом. В настоящей работе при $\arg \kappa \in (-\pi/2, \pi/2]$, $\kappa \neq 0$ получены аппроксимации $\check{u}(s, d, \kappa, h)$ функции u , равномерно сходящиеся на множестве $\bar{T}$ со скоростью $O(h^3 \ln h)$, а именно: для них при достаточно малых шагах дискретизации h кривой $\partial\Omega$ выполняются оценки

$$|\check{u} - u| \leq c(v, \kappa) h^3 \ln(S/h) \quad ((s, d) \in \bar{T}), \quad (1.3)$$

где $c(v, \kappa)$ — не зависящая от h , (s, d) положительная постоянная (число κ будем считать постоянной величиной, если иное не оговорено особо, но зависимость от κ при определении функций будет указываться). Заметим, что аналогичные аппроксимации были получены в работе [18] для НП ПДС уравнения Лапласа, то есть при $\kappa = 0$.

§ 2. Квадратичная интерполяция

Рассмотрим квадратичную интерполяцию, которая здесь используется. Пусть $h > 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$, $z_{\pm 1} \equiv z_0 \pm h$. Обозначим через $C^n([z_{-1}, z_1])$ ($n = 0, 1, \dots$) линейные пространства непрерывных на промежутке $[z_{-1}, z_1]$ комплексных функций $f(z)$, имеющих непрерывные на $[z_{-1}, z_1]$ производные $f^{(l)}(z)$ ($l = \overline{1, n}$). Пусть $f \in C^0([z_{-1}, z_1])$. На промежутке $[z_{-1}, z_1]$ зададим интерполяционный многочлен Лагранжа $\hat{f}(z)$ с равноотстоящими узлами z_{-1} , z_0 , z_1 [2, гл. 2, § 2, п. 1]:

$$\hat{f} = \sum_{m=-1}^1 f(z_m) \Lambda_m^{[z_{-1}, z_1]}(z), \quad \Lambda_m^{[z_{-1}, z_1]}(z) \equiv \prod_{j=-1, j \neq m}^1 \frac{z - z_j}{z_m - z_j} \quad (m = \overline{-1, 1}).$$

В силу [2, гл. 2, § 3, формула 2] для остаточного члена интерполяции имеем оценку

$$|\hat{f} - f| \leq c_\lambda \sup_{z' \in [z_{-1}, z_1]} |f^{(3)}(z')| h^3 \quad (f \in C^3([z_{-1}, z_1])), \quad c_\lambda \equiv \sqrt{6}/27. \quad (2.1)$$

С помощью неравенств $|\Lambda_m^{[z_{-1}, z_1]}(z)| \leq 1$ ($m = \overline{-1, 1}$) получаем оценку

$$|\hat{f}| \leq c_{\Lambda, 0} \max_{m=\overline{-1, 1}} |f(z_m)| \quad (f \in C^0([z_{-1}, z_1])), \quad c_{\Lambda, 0} \equiv 3. \quad (2.2)$$

Теорема 2.1 (см. [16, лемма 2]). Пусть функции $z_{-1}(\alpha)$, $z_1(\alpha)$ непрерывны и $z_{-1}(\alpha) \leq z_1(\alpha)$ на n -мерном прямоугольнике A , функция $f(z, \alpha)$ определена и непрерывна на множестве $\Theta \equiv \{(z, \alpha): z \in [z_{-1}(\alpha), z_1(\alpha)], \alpha \in A\}$. Пусть на подмножестве $\Delta\Theta$, выделенном из множества Θ с помощью условия $z_{-1}(\alpha) < z_1(\alpha)$, существуют непрерывные производные $\partial_z^j f$ ($j = 1, 2$), которые могут быть доопределены при $(z, \alpha) \in \Theta \setminus \Delta\Theta$ до непрерывных на Θ функций. Зададим функцию $z_0(\alpha) \equiv 2^{-1}[z_{-1}(\alpha) + z_1(\alpha)]$. Тогда функция $\hat{f}$, заданная при $(z, \alpha) \in \Delta\Theta$ равенствами

$$\hat{f}(z, \alpha) \equiv \sum_{m=-1}^1 f(z_m(\alpha), \alpha) \Lambda_m^{[z_{-1}(\alpha), z_1(\alpha)]}(z),$$

с помощью равенств $\hat{f} \equiv f$ может быть доопределена при $(z, \alpha) \in \Theta \setminus \Delta\Theta$ до непрерывной на Θ функции.

§3. Аддитивно-мультипликативное выделение особенности

Рассмотрим переход от переменной интегрирования σ к переменной интегрирования ρ в интегралах (1.1) и представим подынтегральную функцию в виде суммы, в каждом слагаемом которой выделим медленно изменяющийся множитель.

В силу формулы (1.2) функцию $K_0(\kappa r)$ при $r > 0$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} K_0(\kappa r) &= 2\pi [K_{0,1}(r^2, \kappa) \ln r + K_{0,2}(r^2, \kappa)], \\ 2\pi K_{0,1}(r, \kappa) &\equiv -I_0(\kappa\sqrt{r}) = -\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-2} (\kappa^2 r/4)^n \quad (r \geq 0), \\ 2\pi K_{0,2}(r, \kappa) &\equiv I_0(\kappa\sqrt{r}) \ln \sqrt{r} + K_0(\kappa\sqrt{r}) = \\ &= [\ln(2/\kappa) - \gamma] \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-2} (\kappa^2 r/4)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-2} (\kappa^2 r/4)^n \sum_{m=1}^n m^{-1} \quad (r > 0), \\ K_{0,2}(0, \kappa) &\equiv \lim_{r \rightarrow +0} K_{0,2}(r, \kappa) = (2\pi)^{-1} [\ln(2/\kappa) - \gamma]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В силу формул (1.1), (3.1) функцию g можно записать при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon \equiv I_S^2 \times \overline{I_D}$ (кроме $\sigma = d = 0$) в виде

$$\begin{aligned} g &= -2^{-1} r^{-4} K_{0,1,0} \partial_{\vec{n}(s)} r^2 \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2 + 2^{-1} r^{-2} K_{0,1,0} \partial_{\vec{n}(s)} \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2 + \\ &+ r^{-2} K_{0,1,1} \partial_{\vec{n}(s)} r^2 \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2 + \ln r K_{0,1,1} \partial_{\vec{n}(s)} \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2 + \ln r K_{0,1,2} \partial_{\vec{n}(s)} r^2 \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2 + \\ &+ K_{0,2,1} \partial_{\vec{n}(s)} \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2 + K_{0,2,2} \partial_{\vec{n}(s)} r^2 \partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$K_{0,i,j}(r, \kappa) \equiv \partial_{r'}^j K_{0,i}(r', \kappa) \Big|_{r'=r^2} \quad (i = 1, 2, \quad j = \overline{0, 2}). \quad (3.3)$$

Функции $K_{0,i,j}$ любое число раз непрерывно дифференцируемы по $r \geq 0$.

Пусть $r_0(s, \sigma) \equiv |\vec{r}_0|$. Зададим на множестве I_S^2 функции ψ_i, φ_i ($i = \overline{0, 4}$):

$$\begin{aligned} \psi_i(s, \sigma) &\equiv \varphi_i/\sigma^2 \quad (\sigma \neq 0, \quad i = \overline{0, 2}), \quad \psi_i(s, \sigma) \equiv \varphi_i/\sigma \quad (\sigma \neq 0, \quad i = 3, 4), \\ \varphi_0(s, \sigma) &\equiv r_0^2, \quad \varphi_1(s, \sigma) \equiv 2^{-1} [\partial_{\vec{n}(s+\sigma)} r^2]_{d=0} = (\vec{n}(s+\sigma), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, \\ \varphi_2(s, \sigma) &\equiv 2^{-1} [\partial_{\vec{n}(s)} r^2]_{d=0} = -(\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, \quad \varphi_3(s, \sigma) \equiv 2^{-1} \partial_{\sigma} \varphi_0 = (\vec{e}(s+\sigma), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, \\ \varphi_4(s, \sigma) &\equiv \partial_{\sigma} \varphi_2 = -(\vec{n}(s), \vec{e}(s+\sigma))_{\mathbb{R}^2}, \quad \psi_0(s, 0) = \psi_3(s, 0) \equiv 1, \\ \psi_1(s, 0) &= \psi_2(s, 0) = 2^{-1} \psi_4(s, 0) \equiv 2^{-1} (\tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1''(s) - \tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2''(s)) = -2^{-1} K(s). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^2}^2$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$. По аналогии с [15, теорема 2.1] можно показать, что при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве I_S^2 производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \psi_i$ ($k = \overline{0, n-l}, l = \overline{0, n}, i = \overline{0, 4}$).

На множестве Υ зададим функцию φ' :

$$\varphi'(s, \sigma, d) \equiv r^2 - d^2 = |\vec{r}_0 - d\vec{n}(s)|^2 - d^2 = r_0^2 - 2d(\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2} = \varphi_0 + 2d\varphi_2.$$

Так как кривая $\partial\Omega$ и окружность радиуса $d \in I_D$ с центром $\tilde{x}_d(s)$ имеют только одну общую точку $\tilde{x}(s)$, то $2d(\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2} < r_0^2$, если $r_0 \neq 0$. Следовательно, $\varphi' \geq 0$ при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon$ ($\varphi' > 0$ при $\sigma \neq 0$, $\varphi' = 0$ при $\sigma = 0$), и на множестве Υ может быть задана функция $\rho'(s, \sigma, d)$: $\rho' \equiv (\varphi')^{1/2}$, если $\sigma \geq 0$; $\rho' \equiv -(\varphi')^{1/2}$, если $\sigma < 0$.

На множествах I_S^2 , Υ зададим функции φ_5, ψ' :

$$\varphi_5(s, \sigma) \equiv -(\vec{n}(s), \vec{n}(s + \sigma))_{\mathbb{R}^2}, \quad \psi'(s, \sigma, d) \equiv \psi_0 + 2d\psi_2. \quad (3.5)$$

С учетом равенства (3.2) и равенств

$$\begin{aligned} 2^{-1}\partial_{\vec{n}(s)}r^2 &= -(\vec{n}(s), \vec{r})_{\mathbb{R}^2} = -(\vec{n}(s), \vec{r}_0 - d\vec{n}(s))_{\mathbb{R}^2} = \varphi_2 + d, \\ 2^{-1}\partial_{\vec{n}(s+\sigma)}r^2 &= (\vec{n}(s + \sigma), \vec{r})_{\mathbb{R}^2} = (\vec{n}(s + \sigma), \vec{r}_0 - d\vec{n}(s))_{\mathbb{R}^2} = \varphi_1 + d\varphi_5, \\ 2^{-1}\partial_{\vec{n}(s)}\partial_{\vec{n}(s+\sigma)}r^2 &= \partial_{\vec{n}(s)}(\vec{n}(s + \sigma), \vec{r})_{\mathbb{R}^2} = -(\vec{n}(s + \sigma), \vec{n}(s))_{\mathbb{R}^2} = \varphi_5 \end{aligned}$$

можно записать функцию g при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon$ (кроме $\sigma = d = 0$) в следующем виде:

$$g = \sum_{i=1}^{10} a_i|_{\rho=\rho'} \delta_i + \delta_{11}, \quad (3.6)$$

где функции $a_i(\rho, d)$ ($i = \overline{1, 10}$), $\delta_i(s, \sigma, d, \kappa)$ ($i = \overline{1, 11}$) заданы равенствами

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv (d^2 - \rho^2)A^{-2}, \quad a_2 \equiv 2d\rho^2A^{-2}, \quad a_3 \equiv \rho^4A^{-2}, \\ a_4 &\equiv \ln A, \quad a_5 \equiv \rho^4A^{-1}, \quad a_6 \equiv d\rho^2A^{-1}, \quad a_7 \equiv d^2A^{-1}, \\ a_8 &\equiv \rho^4 \ln A, \quad a_9 \equiv d\rho^2 \ln A, \quad a_{10} \equiv d^2 \ln A, \quad A(\rho, d) \equiv \rho^2 + d^2; \\ \delta_1 &\equiv -K_{0,1,0} \varphi_5, \quad \delta_2 \equiv -K_{0,1,0} (\psi_1 + \psi_2 \varphi_5)/\psi', \quad \delta_3 \equiv -2K_{0,1,0} \psi_1 \psi_2 / (\psi')^2, \\ \delta_4 &\equiv K_{0,1,1} \varphi_5, \quad \delta_5 \equiv 4K_{0,1,1} \psi_1 \psi_2 / (\psi')^2, \quad \delta_6 \equiv 4K_{0,1,1} (\psi_1 + \psi_2 \varphi_5)/\psi', \\ \delta_7 &\equiv 4K_{0,1,1} \varphi_5, \quad \delta_8 \equiv 2K_{0,1,2} \psi_1 \psi_2 / (\psi')^2, \quad \delta_9 \equiv 2K_{0,1,2} (\psi_1 + \psi_2 \varphi_5)/\psi', \\ \delta_{10} &\equiv 2K_{0,1,2} \varphi_5, \quad \delta_{11} \equiv 2K_{0,2,1} \varphi_5 + 4K_{0,2,2} [\varphi_1 \varphi_2 + d(\varphi_1 + \varphi_2 \varphi_5) + d^2 \varphi_5]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как $\psi_0(s, 0) = 1$, $\psi_2(s, 0) = -2^{-1}K(s)$, то $\psi'(s, 0, d) = 1 - dK(s) > 0$ при $(s, d) \in \overline{T}$. Кроме того, $\psi' = \varphi'/\sigma^2 > 0$ при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon$, $\sigma \neq 0$. Поэтому $\psi' > 0$ при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon$, и при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \delta_i$ ($k = \overline{0, n-l}, l = \overline{0, n}, i = \overline{1, 11}$).

Так как $\psi' > 0$ при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon$ и $\partial_\sigma \rho' = (\psi')^{-1/2}(\psi_3 + d\psi_4)$, то производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \rho'$ ($l = \overline{0, n-k+1}, k = \overline{0, n}$) непрерывны на Υ при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Кроме того, $\psi_3(s, 0) = 1$, $\psi_4(s, 0) = -K(s)$ при $s \in I_S$, следовательно, $(\partial_\sigma \rho')^{-1} = [1 - dK(s)]^{-1/2} > 0$ при $\sigma = 0$, $(s, d) \in \overline{T}$, и имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда существует число $\Sigma > 0$ такое, что на множестве $\Upsilon' \equiv \{(s, \sigma, d): s \in I_S, \sigma \in [-\Sigma, \Sigma], d \in \overline{I_D}\}$ существует положительная функция δ_0 :

$$\delta_0(s, \sigma, d) \equiv (\partial_\sigma \rho')^{-1} = (\psi')^{1/2}(\psi_3 + d\psi_4)^{-1}, \quad (3.9)$$

и непрерывные производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \delta_0$ ($k = \overline{0, n-l}, l = \overline{0, n}$).

Следствие 3.1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функции $\tilde{\rho}_{s,d}(\sigma) \equiv \rho'$ при любых фиксированных $(s, d) \in \overline{T}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображают множество $[-\Sigma, \Sigma]$ на множества $[\tilde{\rho}_{s,d}(-\Sigma), \tilde{\rho}_{s,d}(\Sigma)]$. Функция $\sigma'(s, \rho, d) \equiv \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)$ ($\tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)$ — функция, обратная к $\tilde{\rho}_{s,d}(\sigma)$) имеет непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}' \equiv \{(s, \rho, d): \rho \in [\tilde{\rho}_{s,d}(-\Sigma), \tilde{\rho}_{s,d}(\Sigma)], s \in I_S, d \in \overline{I_D}\}$ производные $\partial_s^k \partial_\rho^l \sigma'$ ($l = \overline{0, n-k+1}, k = \overline{0, n}$). Функции $\delta'_0(s, \rho, d), \delta'_i(s, \rho, d, \kappa)$ ($i = \overline{1, 10}$):

$$\delta'_0 \equiv \delta_0(s, \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho), d), \quad \delta'_i \equiv \delta_i(s, \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho), d, \kappa) \delta'_0 \quad (i = \overline{1, 10}), \quad (3.10)$$

имеют непрерывные на $\tilde{\Upsilon}'$ производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \delta'_i$ ($k = \overline{0, n-l}, l = \overline{0, n}$).

В силу следствия 3.1 существуют непрерывные на множестве $\overline{T}$ функции $P(s, d) \equiv \min\{-\tilde{\rho}_{s,d}(-\Sigma), \tilde{\rho}_{s,d}(\Sigma)\} > 0$, $\Sigma_-(s, d) \equiv \tilde{\sigma}_{s,d}(-P) < 0$, $\Sigma_+(s, d) \equiv \tilde{\sigma}_{s,d}(P) > 0$. Пусть $\Xi_{s,d} \equiv [\Sigma_-, \Sigma_+]$, $\tilde{\Xi}_{s,d} \equiv [-P, P]$. В силу равенств (3.6) функция u представима на множестве T в виде суммы $u = \sum_{i=1}^{12} u_i$, где функции $u_i(s, d, \kappa)$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_i &\equiv \int_{\tilde{\Xi}_{s,d}} a_i w'_i d\rho, \quad w'_i(s, \rho, d, \kappa) \equiv \delta'_i v(s + \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)) \quad (i = \overline{1, 10}); \\ u_{11} &\equiv \int_{\Xi_{s,d}} w_{11} d\sigma, \quad w_{11}(s, \sigma, d, \kappa) \equiv \delta_{11} v(s + \sigma); \\ u_{12} &\equiv \int_{I_S \setminus \Xi_{s,d}} w_{12} d\sigma, \quad w_{12}(s, \sigma, d, \kappa) \equiv g v(s + \sigma). \end{aligned}$$

Здесь подынтегральные функции a_i ($i = \overline{1, 10}$) имеют особенности при $\rho = d = 0$. При условиях $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $v \in C^n(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на $\tilde{\Upsilon}'$ производные $\partial_s^k \partial_\rho^l w'_i$ ($i = \overline{1, 10}$), непрерывные на Υ производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l w_{11}$ и непрерывные на $\Upsilon_0 \equiv \{(s, \sigma, d): (s, d) \in \overline{T}, \sigma \in I_S \setminus \{0\}\}$ производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l w_{12}$ ($k = \overline{0, n-l}, l = \overline{0, n}$).

§ 4. Описание полуаналитических аппроксимаций НП ПДС вблизи и на границе области

Опишем построение аппроксимаций $\tilde{u}$ функции u , для которых справедливы оценки (1.3).

Пусть $L \in \mathbb{N}$, $h(L) \equiv S/(2L+1)$, $s_l \equiv lh$ ($l \in \mathbb{Z}$). Заметим, что $s_l \in I_S$ при $l = -2L-1, 2L+1$, и что $\tilde{x}(s_{l+4L+2}) = \tilde{x}(s_l)$ при всех $l \in \mathbb{Z}$, в частности, $\tilde{x}(s_{-2L-1}) = \tilde{x}(s_{2L+1})$. Введем в рассмотрение множества I_L , состоящие из точек s_{2l} при $l = \overline{-L, L}$, и множества $T_L \equiv I_L \times I_D$. Пусть $(s, d) \in \overline{T}_L$ и $L \geq L_{\min}$, где $L_{\min} \in \mathbb{N}$ таково, что $h(L_{\min}) \leq \inf_{(s,d) \in \overline{T}_L} \min\{-\Sigma_-, \Sigma_+\}$.

Пусть $\alpha_{s,d,2l+1}(L) \equiv \min\{s_{2l+1}, \Sigma_+\}$, $\alpha_{s,d,-2l-1}(L) \equiv \max\{s_{-2l-1}, \Sigma_-\}$, $\alpha_{s,d,\pm 2l}(L) \equiv 2^{-1}(\alpha_{s,d,\pm 2l-1} + \alpha_{s,d,\pm 2l+1})$, $h'_{s,d,\pm l}(L) \equiv 2^{-1}(\alpha_{s,d,\pm 2l+1} - \alpha_{s,d,\pm 2l-1})$ ($l = \overline{0, L}$). По определению $\bigcup_{l=-2L-1}^{2L} [\alpha_{s,d,l}, \alpha_{s,d,l+1}] = \Xi_{s,d}$.

Пусть $\beta_{s,d,l}(L) \equiv \max\{s_l, \Sigma_+\}$, если $l = \overline{1, 2L+1}$, и $\beta_{s,d,l}(L) \equiv \min\{s_l, \Sigma_-\}$, если $l = \overline{-2L-1, 0}$; $\beta_{s,d,l}(L) \equiv 2^{-1}(\beta_{s,d,l} + \beta_{s,d,l+1})$, $h''_{s,d,l}(L) \equiv 2^{-1}(\beta_{s,d,l+1} - \beta_{s,d,l})$ ($l = \overline{-2L-1, -1, 1, 2L}$). Так как $L \geq L_{\min}$, то $\bigcup_{l=-2L-1, -1, 1, 2L} [\beta_{s,d,l}, \beta_{s,d,l+1}] = \overline{I_S} \setminus \Xi_{s,d}$.

Зададим множества точек $\{\rho_{s,d,2l+1}(L)\}_{l=-2L-2}^{2L+1}$, которые состоят из точек $\tilde{\rho}_{s,d}(\alpha_{s,d,2l+1})$ ($l = \overline{-L-1, L}$) и их зеркальных отображений относительно точки $\rho = 0$:

$$\{\rho_{s,d,2l+1}\}_{l=-2L-2}^{2L+1} \equiv \{\pm \tilde{\rho}_{s,d}(\alpha_{s,d,2l+1})\}_{l=-L-1}^L,$$

и упорядочены по возрастанию: $\rho_{s,d,2l-1} \leq \rho_{s,d,2l+1}$ при $l = \overline{-2L-1, 2L+1}$. Также зададим точки $\rho_{s,d,2l}(L) \equiv 2^{-1}(\rho_{s,d,2l-1} + \rho_{s,d,2l+1})$. По определению промежутки $[\rho_{s,d,-2l-1}, \rho_{s,d,-2l+1}]$ и $[\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}]$ симметричны относительно точки $\rho_{s,d,0} = 0$: $\rho_{s,d,-(2l+1)} = -\rho_{s,d,2l+1}$ ($l = \overline{0, 2L+1}$); $\bigcup_{l=-2L-1}^{2L+1} [\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}] = \tilde{\Xi}_{s,d}$.

Зададим ККИ $\tilde{v}$ функции плотности $v \in C(\partial\Omega)$ по переменной s :

$$\tilde{v}(s, L) \equiv \sum_{m=-1}^1 v(s_{2l+m}) \Lambda_m^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) \quad (s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], \quad l = \overline{-L, L}). \quad (4.1)$$

Зададим функции $\tilde{w}'_i$ ($i = \overline{1, 10}$) и $\tilde{w}_i$ ($i = 11, 12$):

$$\begin{aligned} \tilde{w}'_i(s, \rho, d, \kappa, L) &\equiv \delta'_i \tilde{v}(s + \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho), L) \quad ((s, \rho, d) \in \tilde{\Upsilon}', \quad i = \overline{1, 10}), \\ \tilde{w}_{11}(s, \sigma, d, \kappa, L) &\equiv \delta_{11} \tilde{v}(s + \sigma, L) \quad ((s, \sigma, d) \in \Upsilon), \\ \tilde{w}_{12}(s, \sigma, d, \kappa, L) &\equiv g \tilde{v}(s + \sigma, L) \quad ((s, \sigma, d) \in \Upsilon_0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Обозначим через $\hat{w}'_i$ ($i = \overline{1, 10}$) ККИ функций $\tilde{w}'_i$ по переменной ρ :

$$\begin{aligned} \hat{w}'_i(s, \rho, d, \kappa, L) &\equiv \hat{w}'_{i,l} \quad (\rho \in [\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}], \quad l = \overline{-2L-1, 2L+1}, \quad (s, d) \in \overline{T_L}), \\ \hat{w}'_{i,l}(s, \rho, d, \kappa, L) &\equiv \begin{cases} \sum_{m=-1}^1 \tilde{w}'_i|_{\rho=\rho_{s,d,2l+m}} \Lambda_m^{[\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}]}(\rho) & (\rho_{s,d,2l-1} < \rho_{s,d,2l+1}), \\ \tilde{w}'_i|_{\rho=\rho_{s,d,2l}} & (\rho_{s,d,2l-1} = \rho_{s,d,2l+1}). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Обозначим через $\hat{w}_{11,l}$, $\hat{w}_{12,l}$ аппроксимации интегралов $\int_{\alpha_{s,d,2l-1}}^{\alpha_{s,d,2l+1}} \tilde{w}_{11} d\sigma$, $\int_{\beta_{s,d,l}}^{\beta_{s,d,l+1}} \tilde{w}_{12} d\sigma$ на основе КФГ с $\gamma \geq 2$ узлами:

$$\begin{aligned} \hat{w}_{11,l}(s, d, \kappa, L) &\equiv h'_{s,d,l} \sum_{j=1}^{\gamma} \eta_j \tilde{w}_{11}|_{\sigma=\alpha_{s,d,l,j}} \quad (l = \overline{-L, L}, \quad (s, d) \in \overline{T_L}), \\ \hat{w}_{12,l}(s, d, \kappa, L) &\equiv h''_{s,d,l} \sum_{j=1}^{\gamma} \eta_j \tilde{w}_{12}|_{\sigma=\beta_{s,d,l,j}} \quad (l = \overline{-2L-1, -1, 1, 2L}, \quad (s, d) \in \overline{T_L}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $\alpha_{s,d,l,j} \equiv \alpha_{s,d,2l} + h'_{s,d,l} z_j$ ($l = \overline{-L, L}$), $\beta_{s,d,l,j} \equiv \bar{\beta}_{s,d,l} + h''_{s,d,l} z_j$ ($l = \overline{-2L-1, -1, 1, 2L}$); z_j — корни многочлена $d^\gamma/dz^\gamma(z^2-1)^\gamma$ на интервале $(-1, 1)$; для весовых коэффициентов η_j выполняются условия $\sum_{j=1}^{\gamma} \eta_j = 2$, $\eta_j > 0$ [2, гл. 3, § 5, п. 1].

На множествах $\overline{T_L}$ зададим полуаналитические аппроксимации $\hat{u}$ НП ПДС u :

$$\begin{aligned} \hat{u}(s, d, \kappa, L) &\equiv \sum_{i=1}^{12} \hat{u}_i \quad ((s, d) \in \overline{T_L}), \quad \hat{u}_i(s, d, \kappa, L) \equiv \int_{\tilde{\Xi}_{s,d}} a_i \hat{w}_i d\rho \quad (i = \overline{1, 10}), \\ \hat{u}_{11}(s, d, \kappa, L) &\equiv \sum_{l=\overline{-L, L}} \hat{w}_{11,l}, \quad \hat{u}_{12}(s, d, \kappa, L) \equiv \sum_{l=\overline{-2L-1, -1, 1, 2L}} \hat{w}_{12,l}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Введем в рассмотрение ККИ $\tilde{v}'$ функции плотности $v \in C(\partial\Omega)$ по переменной s :

$$\tilde{v}'(s, L) \equiv \sum_{m=-1}^1 v(s_{2l+1+m}) \Lambda_m^{[s_{2l}, s_{2l+2}]}(s) \quad (s \in [s_{2l}, s_{2l+2}], \quad l = \overline{-L, L}).$$

Введем в рассмотрение множества I'_L , состоящие из точек s_{2l+1} при $l = \overline{-L, L}$, и множества $T'_L \equiv I'_L \times I_D$. Зададим на множествах $\overline{T'_L}$ с помощью функций $\tilde{v}'$ аппроксимации $\hat{u}'(s, d, \kappa, L)$ функции u по аналогии с тем, как на множествах $\overline{T_L}$ были заданы аппроксимации $\hat{u}$ с помощью функций $\tilde{v}$.

Полуаналитические аппроксимации $\check{u}$, которые можно вычислить при любых $(s, d) \in \overline{T}$ и условии $v \in C(\partial\Omega)$, зададим формулой:

$$\check{u}(s, d, \kappa, L) \equiv \sum_{m=-1,1} \hat{u}'|_{s=s_{2l+m}} \Lambda_m^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) + \hat{u}|_{s=s_{2l}} \Lambda_0^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s), \quad (4.6)$$

где $d \in \overline{I_D}$, $s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}]$, $l = \overline{-L, L}$.

Итак, вычисление аппроксимаций $\check{u}$ при каждом фиксированном $d \in \overline{I_D}$ можно разбить на три этапа. На первом этапе с помощью формул (4.5) вычисляются аппроксимации $\hat{u}$ при всех $s \in I_L$. Функции a_i в формулах (4.5) вычисляются с помощью формул (3.7), функции $\hat{w}'_i$ — с помощью (4.3), $\hat{w}_{11,l}$ и $\hat{w}_{12,l}$ — с помощью (4.4). Функции $\tilde{w}'_i$, $\tilde{w}_{11}$, $\tilde{w}_{12}$ в формулах (4.3)–(4.4) задаются равенствами (4.2), где функция $\tilde{v}$ определяется формулой (4.1), функции δ'_i ($i = \overline{1, 10}$), δ_{11} — формулами (3.8)–(3.10). В свою очередь, функции ψ' , ψ_i ($i = \overline{0, 4}$), φ_1 , φ_2 , φ_5 в формулах (3.8), (3.9) задаются равенствами (3.4), (3.5), а функции $K_{0,1,0}$, $K_{0,1,1}$, $K_{0,2,1}$ — равенствами (3.1), (3.3).

На втором этапе по аналогии с первым этапом вычисляются аппроксимации $\hat{u}'$ при всех $s \in I'_L$. На третьем этапе с помощью формул (4.6) вычисляются аппроксимации $\check{u}$ при любых $s \in I_S$.

Интегралы $\hat{u}_i$ ($i = \overline{1, 10}$) вычисляются аналитически:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= \sum_{l=-2L-1}^{2L+1} \sum_{j=0}^2 \hat{u}_{i,l,j}; \quad \hat{u}_{i,l,j}(s, d, \kappa) \equiv 0 \quad (\rho_{s,d,2l-1} = \rho_{s,d,2l+1}); \\ \hat{u}_{i,l,j}(s, d, \kappa) &\equiv \tilde{A}_{i,l,j} \gamma_{i,l,j}, \quad \tilde{A}_{i,l,j}(d, L) \equiv \int_{\rho_{s,d,2l-1}}^{\rho_{s,d,2l+1}} a_i \rho^j d\rho \quad (\rho_{s,d,2l-1} < \rho_{s,d,2l+1}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\gamma_{i,l,j}(s, d, \kappa, L)$ — коэффициенты полиномов Лагранжа $\hat{w}'_{i,l}$: $\hat{w}'_{i,l} = \gamma_{i,l,0} + \gamma_{i,l,1}\rho + \gamma_{i,l,2}\rho^2$.

Интегралы $\tilde{A}_{i,l,j}$ при $d \in I_D$ вычисляются с помощью формул Ньютона–Лейбница:

$$\tilde{A}_{i,l,j} = A_{i,j}|_{\rho=\rho_{s,d,2l+1}} - A_{i,j}|_{\rho=\rho_{s,d,2l-1}} \quad (j = \overline{0, 2}, \quad l = \overline{-2L-1, 2L+1}, \quad d \in I_D). \quad (4.8)$$

Здесь $A_{i,j}(\rho, d)$ — первообразные функций $a_i \rho^j$ по переменной ρ . Например,

$$\begin{aligned} A_{1,0} &\equiv \frac{\rho}{A}, \quad A_{1,1} \equiv -\frac{d^2}{A} - 2^{-1} \ln A, \quad A_{1,2} \equiv -\rho - \frac{d^2 \rho}{A} + 2d \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{d}\right), \\ A_{2,0} &\equiv -\frac{d\rho}{A} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{d}\right), \quad A_{2,1} \equiv \frac{d^3}{A} + d \ln A, \quad A_{2,2} \equiv 2d\rho + \frac{d^3 \rho}{A} - 3d^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{d}\right). \end{aligned}$$

Так как $\rho_{s,d,2l\pm 1} \neq 0$, то все интегралы $\tilde{A}_{i,l,j}|_{d=0}$, кроме $\tilde{A}_{2,0,0}|_{d=0}$, могут быть вычислены с помощью продолжения равенств (4.8) по непрерывности:

$$\tilde{A}_{i,l,j}|_{d=0} = \lim_{d \rightarrow 0} \left(A_{i,j}|_{\rho=\rho_{s,d,2l+1}} - A_{i,j}|_{\rho=\rho_{s,d,2l-1}} \right).$$

В частности, $\tilde{A}_{2,l,0}|_{d=0} = 0$ при $l \neq 0$. Функция $\tilde{A}_{2,0,0}$ терпит при $d = 0$ конечный разрыв: $\tilde{A}_{2,0,0}|_{d=\pm 0} = \pm\pi$, $\tilde{A}_{2,0,0}|_{d=0} = 0$.

Заметим, что интеграл $\tilde{A}_{1,0,0}|_{d=0}$ существует в смысле конечного значения по Адамару [21, формула (1.6.6)], интеграл $\tilde{A}_{1,0,1}|_{d=0}$ — в смысле главного значения по Коши; остальные интегралы $\tilde{A}_{i,0,j}|_{d=0}$ — сходящиеся несобственные; при $l \neq 0$ интегралы $\tilde{A}_{i,l,j}|_{d=0}$ существуют в собственном смысле.

Функции $\hat{u}_i$ ($i = \overline{1, 12}$) можно представить в матричной форме $\sum_{l=-2L-1}^{2L} U_l v(s_l)$, где $U_l(s, d, \kappa, L)$ — некоторые функции (см. [17, формулы (3.11), (3.12)]). Это позволяет применить функции $\hat{u}$ для вычисления аппроксимаций НП решений задач Дирихле для уравнения Гельмгольца с помощью сеточных решений $v(s_l)$ соответствующих граничных интегральных уравнений второго рода [15].

§ 5. Непрерывность полуаналитических аппроксимаций НП ПДС на границе области

Теорема 5.1. Пусть $\partial\Omega \in C^4$, $v \in C(\partial\Omega)$, $L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_{\min}$, L фиксировано. Тогда функция $\hat{u}$ непрерывна на множестве $\overline{T}_L$.

Доказательство. В силу следствия 3.1 функции Σ_- , Σ_+ непрерывны на множестве $\overline{T}$, следовательно, точки $\alpha_{s,d,2l+1}$, $\beta_{s,d,l}$ непрерывно зависят от $(s, d) \in \overline{T}_L$, при этом $\alpha_{s,d,2l-1} \leq \alpha_{s,d,2l+1}$, $\beta_{s,d,l} \leq \beta_{s,d,l+1}$. Поэтому узлы КФГ $\alpha_{s,d,l,j}$, $\beta_{s,d,l,j}$ непрерывно зависят от $(s, d) \in \overline{T}_L$. Заметим также, что $\tilde{v} \in C(\partial\Omega)$, так как границы интервалов $[s_{2l-1}, s_{2l+1}]$ являются узлами ККИ. Функции δ_{11} , g непрерывны на множествах Υ , Υ_0 соответственно и $\Sigma_- < 0$, $\Sigma_+ > 0$ на $\overline{T}$. Следовательно, функции $\hat{u}_{11}$, $\hat{u}_{12}$ непрерывны на $\overline{T}_L$. Так как $s_{2l-1} < s_{2l+1}$, то на каждом множестве $\Upsilon_l \equiv \{(s, \sigma, d): \sigma \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], (s, d) \in \overline{T}_L\}$ ($l = \overline{-L, L}$) существуют непрерывные производные $\tilde{v}_{l,j}(s, \sigma, d) \equiv \partial_\sigma^j \tilde{v}(s + \sigma)$ ($j = \overline{0, 2}$). Имеем вложения $\Delta\Upsilon_{\Sigma,l} \subseteq \Upsilon_l$, где $\Delta\Upsilon_{\Sigma,l}$ — подмножества соответствующих множеств $\Upsilon_{\Sigma,l} \equiv \{(s, \sigma, d): \sigma \in [\alpha_{s,d,2l-1}, \alpha_{s,d,2l+1}], (s, d) \in \overline{T}_L\}$, выделенные с помощью неравенств $\alpha_{s,d,2l-1} < \alpha_{s,d,2l+1}$. Функции $\tilde{v}_{\Sigma,l,j}(s, \sigma, d)$, заданные на множествах $\Delta\Upsilon_{\Sigma,l} \neq \emptyset$ с помощью равенств $\tilde{v}_{\Sigma,l,j} \equiv \tilde{v}_{l,j}$, доопределим по непрерывности на соответствующих множествах $\Upsilon_{\Sigma,l} \setminus \Delta\Upsilon_{\Sigma,l}$ с помощью предельных равенств $\tilde{v}_{\Sigma,l,j} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \tilde{v}_{l,j}|_{\sigma=s_{2l-1}+\varepsilon}$, если $\alpha_{s,d,2l-1} = \alpha_{s,d,2l+1} = \Sigma_+$, и $\tilde{v}_{\Sigma,l,j} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \tilde{v}_{l,j}|_{\sigma=s_{2l+1}-\varepsilon}$, если $\alpha_{s,d,2l-1} = \alpha_{s,d,2l+1} = \Sigma_-$. Если $\Delta\Upsilon_{\Sigma,l} = \emptyset$, то $\tilde{v}_{\Sigma,l,j} \equiv 0$ при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon_{\Sigma,l}$.

С помощью равенств

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{P,l,0}(s, \rho, d) &\equiv \tilde{v}_{\Sigma,l,0}|_{\sigma=\tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)}, & \tilde{v}_{P,l,1}(s, \rho, d) &\equiv \tilde{v}_{\Sigma,l,1}|_{\sigma=\tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)}(d\tilde{\sigma}_{s,d}/d\rho), \\ \tilde{v}_{P,l,2}(s, \rho, d) &\equiv \tilde{v}_{\Sigma,l,2}|_{\sigma=\tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)}(d\tilde{\sigma}_{s,d}/d\rho)^2 + \tilde{v}_{P,l,1}(d^2\tilde{\sigma}_{s,d}/d\rho^2) \end{aligned}$$

зададим на множествах $\tilde{\Upsilon}_{P,l} \equiv \{(s, \rho, d): \rho \in [\tilde{\rho}_{s,d}(\alpha_{s,d,2l-1}), \tilde{\rho}_{s,d}(\alpha_{s,d,2l+1})], (s, d) \in \overline{T}_L\}$ непрерывные функции $\tilde{v}_{P,l,j}$ ($j = \overline{0, 2}$). С помощью равенств

$$\tilde{w}'_{i,l,j}(s, \rho, d, \kappa) \equiv \sum_{k=0}^j C_j^k \tilde{v}_{P,l,k} \partial_\rho^{j-k} \delta'_i, \quad C_j^k \equiv j! / [(j-k)!k!]$$

зададим на множествах $\tilde{\Upsilon}_{P,l}$ непрерывные функции $\tilde{w}'_{i,l,j}$ ($i = \overline{1, 10}$, $j = \overline{0, 2}$). В силу следствия 3.1 $\Delta\tilde{\Upsilon}_{P,l} = \tilde{\rho}_{s,d}(\Delta\Upsilon_{\Sigma,l})$, где $\Delta\tilde{\Upsilon}_{P,l}$ — подмножества соответствующих множеств $\tilde{\Upsilon}_{P,l}$, выделенные с помощью неравенств $\tilde{\rho}_{s,d}(\alpha_{s,d,2l-1}) < \tilde{\rho}_{s,d}(\alpha_{s,d,2l+1})$ ($l = \overline{-L, L}$). На множествах $\Delta\tilde{\Upsilon}_{P,l}$ справедливы формулы $\tilde{w}'_{i,l,j} = \partial_\rho^j \tilde{w}'_{i,l,0} = \partial_\rho^j \tilde{w}'_i$.

Зададим множества $\tilde{\Upsilon}'_{P,l} \equiv \{(s, \rho, d) : \rho \in [\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}], (s, d) \in \overline{T}_L\}$ и с помощью неравенств $\rho_{s,d,2l-1} < \rho_{s,d,2l+1}$ выделим из них подмножества $\Delta \tilde{\Upsilon}'_{P,l}$ ($l = -2L-1, 2L+1$). Для любого l найдется l' такое, что $\tilde{\Upsilon}'_{P,l} \subseteq \tilde{\Upsilon}'_{P,l'}$. На множествах $\tilde{\Upsilon}'_{P,l}$ зададим функции $\hat{w}''_{i,l}$ ($i = \overline{1, 10}, j = \overline{0, 2}$):

$$\hat{w}''_{i,l}(s, \rho, d, \kappa) \equiv \begin{cases} \sum_{m=-1}^1 \tilde{w}'_{i,l',0}|_{\rho=\rho_{s,d,2l+m}} \Lambda_m^{[\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}]}(\rho) & ((s, \rho, d) \in \Delta \tilde{\Upsilon}'_{P,l}), \\ \tilde{w}'_{i,l',0}|_{\rho=\rho_{s,d,2l}} & ((s, \rho, d) \in \tilde{\Upsilon}'_{P,l} \setminus \Delta \tilde{\Upsilon}'_{P,l}). \end{cases}$$

По доказанному функции $\tilde{w}'_{i,l',j}$ ($j = \overline{0, 2}$) непрерывны на $\tilde{\Upsilon}'_{P,l}$ и $\tilde{w}'_{i,l',j} = \partial_\rho^j \tilde{w}'_{i,l',0}$ на $\Delta \tilde{\Upsilon}'_{P,l}$ ($j = 1, 2$). В силу следствия 3.1 значения $\rho_{s,d,2l\pm 1}$ непрерывно зависят от $(s, d) \in \overline{T}_L$. Следовательно, в силу теоремы 2.1 функции $\hat{w}''_{i,l}$ непрерывны на множествах $\tilde{\Upsilon}'_{P,l}$.

Так как $L \geq L_{\min}$, то $\alpha_{s,d,\pm 1} = s_{\pm 1}$, и в силу следствия 3.1 $\rho_{s,d,-1} < 0$, $\rho_{s,d,1} > 0$. Поэтому согласно формулам (4.5) и (4.7) функции u_i ($i = \overline{1, 10}$) при $(s, d) \in \overline{T}_L$ можно представить в виде:

$$\hat{u}_i = \sum_{j=0}^2 A_{i,0,j} \gamma_{i,0,j} + \sum_{l=\overline{-2L-1, -1}, \overline{1, 2L+1}} \hat{u}_{i,l}, \quad \hat{u}_{i,l}(s, d, \kappa) \equiv \int_{\rho_{s,d,2l-1}}^{\rho_{s,d,2l+1}} a_i \tilde{w}'_{i,l} d\rho. \quad (5.1)$$

Так как $\rho_{s,d,\pm 1}$ непрерывно зависят от $(s, d) \in \overline{T}_L$ и $\rho_{s,d,-1} < \rho_{s,d,1}$, то функции $\gamma_{i,0,j} = \partial_\rho^j \tilde{w}'_{i,0}|_{\rho=0}$ ($j = \overline{0, 2}$) непрерывны на множестве $\overline{T}_L$. Так как при $l = -2L-1, -1, 1, 2L+1$ произведение $\rho_{s,d,2l-1} \rho_{s,d,2l+1}$ при любых $(s, d) \in \overline{T}_L$ строго положительно, точки $\rho_{s,d,2l\pm 1}$ непрерывно зависят от $(s, d) \in \overline{T}_L$, функции $\hat{w}''_{i,l}$ непрерывны на множествах $\tilde{\Upsilon}'_{P,l}$ и $\hat{w}'_{i,l} = \hat{w}''_{i,l}$ на $\Delta \tilde{\Upsilon}'_{P,l}$, то функции $\hat{u}_{i,l}$ непрерывны на $\overline{T}_L$. Так как $\rho_{s,d,\pm 1} \neq 0$, то все функции $\tilde{A}_{i,0,j}$, кроме $\tilde{A}_{2,0,0}$, непрерывны на множестве $\overline{T}_D$. Функция $\tilde{A}_{2,0,0}$ терпит при $d = 0$ конечный разрыв: $\tilde{A}_{2,0,0}|_{d=\pm 0} = \pm \pi$, $\tilde{A}_{2,0,0}|_{d=0} = 0$. В то же время, учитывая, что $\rho_{s,d,0} = 0$, $\tilde{\sigma}_{s,d}(0) = 0$ ($(s, d) \in \overline{T}_L$) и $[\psi_1 + \psi_2 \varphi_5]_{\sigma=0} = 0$ ($s \in I_S$), имеем равенства $\gamma_{2,0,0} = \tilde{w}'_{2,0}|_{\rho=0} = \delta_2|_{\sigma=0} \tilde{v} = 0$ ($(s, d) \in \overline{T}_L$). Поэтому $\tilde{A}_{2,0,0} \gamma_{2,0,0} = 0$ при $(s, d) \in \overline{T}_L$. В итоге в силу формулы (5.1) все функции $\hat{u}_i$ ($i = \overline{1, 10}$) непрерывны на множестве $\overline{T}_L$. Так как $\hat{u} \equiv \sum_{i=1}^{12} \hat{u}_i$, теорема 5.1 доказана. $\square$

Следствие 5.1. Пусть $\partial\Omega \in C^4$, $v \in C(\partial\Omega)$, $L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_{\min}$, L фиксировано. Тогда функция $\hat{u}$ непрерывна на множестве $\overline{T}$.

§ 6. Касательная интерполяция НП ПДС вблизи и на границе области

Докажем равномерную кубическую сходимость квадратичных интерполянтов НП ПДС по переменной s в замкнутой области $\overline{T}$. По аналогии с [18, теорема 6.1] доказывается следующая теорема.

Теорема 6.1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+4}$, $v \in C^{n+2}(\partial\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция u непрерывна на множестве $\overline{T}$ и может быть доопределена при $d = 0$ до непрерывной на множестве $\overline{T}$. На множестве $\overline{T}$ существуют производные $\partial_s^l u$ ($l = \overline{1, n}$) доопределенной по непрерывности функции u , причем $\partial_s^l u$ непрерывны на множествах $\overline{T}$ и $\overline{T} \setminus \overline{T}$. Существуют равномерно по $s \in I_S$ сходящиеся пределы

$$\lim_{d \rightarrow \pm 0} \partial_s^l u = \pm \pi [\partial_s^l w_2']_{\rho=d=0} + [\partial_s^l u]_{d=0} \quad (l = \overline{1, n}),$$

с помощью которых производные $\partial_s^l u$ ($l = \overline{1, n}$) могут быть доопределены до функций, непрерывных или на множестве $I_S \times [D_1, 0]$, или на множестве $I_S \times [0, D_2]$.

Заметим, что утверждение о возможности доопределения НП ПДС на границе области по непрерывности получено в известных теоремах [20, теоремы 2.21, 2.23].

Пусть $\partial\Omega \in C^4$, $v \in C^2(\partial\Omega)$. На множестве $\overline{T}$ зададим ККИ $\ddot{u}$ функции u по переменной s :

$$\ddot{u}(s, d, \kappa, L) \equiv \sum_{m=-1}^1 u|_{s=s_{2l+m}} \Lambda_m^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) \quad (d \in \overline{I_D}, s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], l = \overline{-L, L}). \quad (6.1)$$

В силу оценки (2.1) и теоремы 6.1 справедливо следующее утверждение.

Следствие 6.1. Пусть $L \in \mathbb{N}$. При $\partial\Omega \in C^4$, $v \in C^2(\partial\Omega)$ функции $\ddot{u}$ непрерывны на множестве $\overline{T}$. При $\partial\Omega \in C^7$, $v \in C^5(\partial\Omega)$ справедливы оценки

$$|\ddot{u} - u| \leq c_\lambda C_0 h^3 \quad ((s, d) \in \overline{T}), \quad C_0(v, \kappa) \equiv \sup_{(s, d) \in \overline{T}} |\partial_s^3 u|. \quad (6.2)$$

§ 7. Равномерная сходимость полуаналитических аппроксимаций НП ПДС вблизи и на границе области

На множествах T_L ($L \in \mathbb{N}$) зададим аппроксимации $\tilde{u}$ функции u :

$$\tilde{u}(s, d, \kappa, L) \equiv \int_{I_S} g \tilde{v}(s + \sigma, L) d\sigma \quad ((s, d) \in T_L).$$

По аналогии с [18, теоремы 7.2, 7.3] доказываются следующие теоремы.

Теорема 7.1. Пусть $L \in \mathbb{N}$, $\partial\Omega \in C^3$, $v \in C^4(\partial\Omega)$. Тогда справедливы оценки

$$|\tilde{u} - u| \leq C_1 \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L + 1) \quad ((s, d) \in T_L),$$

$$C_1(\kappa) \equiv C'_1 \left(\sum_{i=1}^{11} \sup_{(s, \sigma, d) \in \Upsilon} |\delta_i| + \sup_{(s, \sigma, d) \in \Upsilon} |\partial_\sigma \delta_1| \right), \quad (7.1)$$

C'_1 — положительная постоянная, не зависящая от L , (s, d) , v , κ .

Теорема 7.2. Пусть γ , $L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_{\min}$, $h \leq 1$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+2}$, $v \in C^3(\partial\Omega)$. Тогда справедливы оценки

$$|\hat{u} - \tilde{u}| \leq C_2 \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L + 1) \quad ((s, d) \in T_L),$$

$$C_2(\kappa) \equiv C'_2 \left(\sum_{i=2}^{10} \sum_{j=1}^3 \sup_{(s, \rho, d) \in \tilde{\Upsilon}'} |\partial_\rho^j \delta'_i| + \sum_{j=1}^4 \sup_{(s, \rho, d) \in \tilde{\Upsilon}'} |\partial_\rho^j \delta'_1| + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^2 \sup_{(s, \sigma, d) \in \Upsilon} |\partial_\sigma^{2\gamma-j} \delta_{11}| + \sum_{j=0}^2 \sup_{\sigma \in I_S \setminus \Xi_{s,d}, (s,d) \in \overline{T}} |\partial_\sigma^{2\gamma-j} g| \right), \quad (7.2)$$

C'_2 — положительная постоянная, не зависящая от L , (s, d) , v , κ .

На основании неравенств (7.1), (7.2) при условиях γ , $L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_{\min}$, $h \leq 1$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+2}$, $v \in C^4(\partial\Omega)$ получаем оценки

$$|\hat{u} - u| \leq C \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L + 1) \quad ((s, d) \in T_L), \quad (7.3)$$

где $C(\kappa) \equiv C_1 + C_2$. Аналогично при тех же условиях выполняются оценки

$$|\hat{u}' - u| \leq C \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L+1) \quad ((s, d) \in T'_L). \quad (7.4)$$

Согласно формулам (4.6), (6.1) функция $\check{y} - \ddot{y}$ вычисляется при $(s, d) \in \bar{T}$ с помощью формулы

$$\check{y} - \ddot{y} = \sum_{m=-1,1} [\hat{u}' - u]_{s=s_{2l+m}} \Lambda_m^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) + [\hat{u} - u]_{s=s_{2l}} \Lambda_0^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s),$$

то есть функция $\check{y} - \ddot{y}$ на промежутках $[s_{2l-1}, s_{2l+1}]$ описывается квадратичными полиномами Лагранжа, заданными значениями функций $\hat{u} - u$, $\hat{u}' - u$ в узлах s_l . Поэтому в силу неравенств (2.2), (7.3), (7.4) и следствий 5.1, 6.1 при условиях γ , $L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_{\min}$, $h \leq 1$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+2}$, $v \in C^4(\partial\Omega)$ имеем оценки

$$|\check{y} - \ddot{y}| \leq c_{\Lambda,0} C \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} h^3 \ln(2L+1) \quad ((s, d) \in \bar{T}). \quad (7.5)$$

На основании оценок (6.2), (7.5) получаем следующее утверждение.

Следствие 7.1. Пусть γ , $L \in \mathbb{N}$, $L \geq L_{\min}$, $h \leq 1$, $\gamma \geq 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+3}$, $v \in C^5(\partial\Omega)$. Тогда справедливы оценки (1.3), где $c(v, \kappa) \equiv c_{\Lambda,0} C(\kappa) \|v\|_{C^4(\partial\Omega)} + c_{\Lambda} C_0(v, \kappa)$.

§ 8. Случай больших по модулю значений комплексного волнового числа

Здесь мы коснемся вопроса, как влияет на погрешность аппроксимаций НП ПДС увеличение модуля числа κ .

В силу разложений [26, п. 7.23, формулы (1), (2)] для функций $I_0(\kappa r)$, $K_0(\kappa r)$ имеем при $|\kappa| \rightarrow \infty$ и фиксированных $\arg \kappa \in (-\pi/2, \pi/2]$, $r > 0$ асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \partial_r^n I_0^{(m)}(\kappa r) &= (2\pi r)^{-1/2} \kappa^{n-1/2} \left[e^{\kappa r} \left(1 + O(|\kappa|^{-1}) \right) + e^{-\kappa r + \pi i/2} \left((-1)^{n+m} + O(|\kappa|^{-1}) \right) \right], \\ \partial_r^n K_0^{(m)}(\kappa r) &= \pi^{1/2} (2r)^{-1/2} \kappa^{n-1/2} e^{-\kappa r} \left((-1)^{n+m} + O(|\kappa|^{-1}) \right) \quad (m, n \in \mathbb{Z}_+). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Здесь $O(|f_1(z)|)$ при $|z| \rightarrow \infty$ — это общее обозначение для некоторых функций $f_2(z)$, для которых существуют числа $M > 0$, $C > 0$ такие, что при $|z| \geq M$ выполняются неравенства $|f_2(z)| \leq C |f_1(z)|$.

Пусть $\arg \kappa \in (-\pi/2, \pi/2]$, $r > 0$, $\ln r \neq 0$. С помощью формул (8.1) получаем при $|\kappa| \rightarrow \infty$ и фиксированных $\arg \kappa$, r равенства

$$\begin{aligned} 2\pi \partial_r^n K_{0,1,0}(r, \kappa) &= -\partial_r^n I_0(\kappa r) = \\ &= -(2\pi r)^{-1/2} \kappa^{n-1/2} \left[e^{\kappa r} \left(1 + O(|\kappa|^{-1}) \right) + e^{-\kappa r + \pi i/2} \left((-1)^n + O(|\kappa|^{-1}) \right) \right], \\ 2\pi \partial_r^n K_{0,1,1}(r, \kappa) &= -\partial_r^n \left[(2r)^{-1} \kappa I_0'(\kappa r) \right] = \\ &= -(8\pi r^3)^{-1/2} \kappa^{n+1/2} \left[e^{\kappa r} \left(1 + O(|\kappa|^{-1}) \right) + e^{-\kappa r + \pi i/2} \left((-1)^{n+1} + O(|\kappa|^{-1}) \right) \right], \\ 2\pi \partial_r^n K_{0,1,2}(r, \kappa) &= -\partial_r^n \left[(2r)^{-1} \partial_r (2r)^{-1} \kappa I_0'(\kappa r) + (2r)^{-2} \kappa^2 I_0''(\kappa r) \right] = \\ &= -(32\pi r^5)^{-1/2} \kappa^{n+3/2} \left[e^{\kappa r} \left(1 + O(|\kappa|^{-1}) \right) + e^{-\kappa r + \pi i/2} \left((-1)^{n+2} + O(|\kappa|^{-1}) \right) \right], \\ 2\pi \partial_r^n K_{0,2,0}(r, \kappa) &= \partial_r^n \left[K_0(\kappa r) + \ln r I_0(\kappa r) \right] = \\ &= (2\pi r)^{-1/2} \kappa^{n-1/2} \left\{ \pi e^{-\kappa r} \left((-1)^n + O(|\kappa|^{-1}) \right) + \ln r \left[e^{\kappa r} \left(1 + O(|\kappa|^{-1}) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\kappa r + \pi i/2} \left((-1)^n + O(|\kappa|^{-1}) \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\pi\partial_r^n K_{0,2,1}(r, \kappa) &= \partial_r^n \left[(2r)^{-1} \kappa K'_0(\kappa r) + \ln r (2r)^{-1} \kappa I'_0(\kappa r) + (2r^2)^{-1} I_0(\kappa r) \right] = \\
&= (8\pi r^3)^{-1/2} \kappa^{n+1/2} \left\{ \pi e^{-\kappa r} \left((-1)^{n+1} + O(|\kappa|^{-1}) \right) + \ln r \left[e^{\kappa r} \left(1 + O(|\kappa|^{-1}) \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{-\kappa r + \pi i/2} \left((-1)^{n+1} + O(|\kappa|^{-1}) \right) \right] \right\}, \\
2\pi\partial_r^n K_{0,2,2}(r, \kappa) &= \partial_r^n \left[(2r)^{-1} \partial_r (2r)^{-1} \kappa K'_0(\kappa r) + (2r)^{-2} \kappa^2 K''_0(\kappa r) + \right. \\
&\quad \left. + (2r)^{-1} \partial_r (\ln r (2r)^{-1}) \kappa I'_0(\kappa r) + \ln r (2r)^{-2} \kappa^2 I''_0(\kappa r) + \right. \\
&\quad \left. + \partial_r (2r^2)^{-1} I_0(\kappa r) + (4r^3)^{-1} \kappa I'_0(\kappa r) \right] = \\
&= (32\pi r^5)^{-1/2} \kappa^{n+3/2} \left\{ \pi e^{-\kappa r} \left((-1)^{n+2} + O(|\kappa|^{-1}) \right) + \ln r \left[e^{\kappa r} \left(1 + O(|\kappa|^{-1}) \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{-\kappa r + \pi i/2} \left((-1)^{n+2} + O(|\kappa|^{-1}) \right) \right] \right\} \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{8.2}
\end{aligned}$$

В силу асимптотических равенств (8.1), (8.2) коэффициент $c(\kappa)$ в правой части оценки (1.3) экспоненциально увеличивается при фиксированном $\arg \kappa \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $|\kappa| \rightarrow \infty$, а при $\arg \kappa = \pi/2$, $|\kappa| \rightarrow \infty$ возможен только степенной рост этого коэффициента. Действительно, с учетом определений функций δ_i , g (3.8), (1.1) в оценке (7.1) константа $C_1 = O(|\kappa|^{3/2} e^{\alpha \operatorname{Re} \kappa})$, в оценке (7.2) константа $C_2 = O(|\kappa|^{2\gamma+3/2} e^{\alpha \operatorname{Re} \kappa})$ при $\gamma \geq 2$, в оценке (6.2) константа $C_0 = O(|\kappa|^{9/2})$. Здесь $\alpha \equiv \sup_{(s, \sigma, d) \in \Upsilon} r$. Следовательно,

$$c = O(|\kappa|^{2\gamma+3/2} e^{\alpha \operatorname{Re} \kappa}) \quad (\gamma \geq 2). \tag{8.3}$$

§ 9. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим вычисление НП ПДС с плотностью $v(\varphi) = \cos \varphi$, заданной на единичной окружности. Здесь $R = 1 - d \geq 0$ и $\varphi = s$ — соответственно полярные радиус и угол с полюсом в центре единичного круга. Точные значения НП ПДС $u(R, \varphi, \kappa)$ внутри круга вычисляются по формуле $u = \kappa^2 I'_1(\kappa R) K'_1(\kappa) \cos \varphi$, во внешности круга $u = \kappa^2 I'_1(\kappa) K'_1(\kappa R) \cos \varphi$, значения НП ПДС на границе круга $u|_{R=1} = \kappa^2 I'_1(\kappa) K'_1(\kappa) \cos \varphi$.

Для данной геометрии при $d \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, $s \in I_S$ соответствие между точками $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}_d(s)$ взаимно однозначное и $1 - dK(s) = 1 - d > 0$, поэтому для задания множества I_D теоретически можно взять любые числа $D_1 < 0$, $D_2 \in (0, 1)$. Заметим также, что $\partial_\sigma \rho' = \sqrt{1-d} \cos(\sigma/2)$. Поэтому при $d \rightarrow 1$, когда точки $\tilde{x}_d(s)$ приближаются к центру круга и якобиан $(\partial_\sigma \rho')^{-1}$ неограниченно возрастает, использование аппроксимаций $\tilde{y}$ становится невозможным. Кроме того, $\partial_\sigma \rho' > 0$ при $\sigma \in (0, \pi)$, поэтому теоретически можно использовать любое $\Sigma \in (0, \pi)$. Но при этом надо учитывать, что при $\Sigma \rightarrow \pi$, $|\sigma| \rightarrow \Sigma$ якобиан $(\partial_\sigma \rho')^{-1}$ неограниченно возрастает, а при $\Sigma \rightarrow 0$, $d \rightarrow 0$ узлы КФГ неограниченно приближаются к опорным точкам $\tilde{x}_d(s_l)$. Заметим также, что для данной геометрии $-\Sigma_- = \Sigma_+ = \Sigma$ при любых $(s, d) \in \overline{T}$.

При фиксированных d вычисляются максимумы абсолютных погрешностей приближенных функций $\tilde{y}$: $\Delta \tilde{y}(d, \kappa, L) \equiv \max_{s \in I_{8L}} |\tilde{y} - u|$, где множества I_{8L} образованы значениями $s = s_{l/4} \equiv lh/4$ ($l = -8L - 4, 8L + 3$). В таблице 1 в каждой основной ячейке в соответствующем порядке сверху вниз представлены три значения $\Delta \tilde{y}$: при $\kappa = 2^{1/2} \pi i$, $\kappa = \pi(1+i)$ и $\kappa = 2^{1/2} \pi$, полученные при $\gamma = 2$, $\Sigma = \pi/15$ и различных значениях d .

Вычисляя степени скорости сходимости $\check{r}_n \equiv \ln \left(\frac{\Delta \tilde{y}|_{h=h_n}}{\Delta \tilde{y}|_{h=h_{n+1}}} \right) \ln^{-1} \left(\frac{h_n}{h_{n+1}} \right)$ аппроксимаций $\tilde{y}_\pm$ при переходе от шага дискретизации h_n к h_{n+1} , можно заметить, что в широком

диапазоне возможных значений d полуаналитические аппроксимации $\tilde{y}$ сходятся равномерно по d с почти кубической скоростью ($\tilde{r}_n \approx 3$), что хорошо согласуется со следствием 7.1. При $d \rightarrow 1$, когда точки $\tilde{x}_d(s)$ приближаются к центру круга, якобиан $(\partial_\sigma \rho')^{-1}$ неограниченно возрастает и ошибки аппроксимаций $\tilde{y}$ также неограниченно возрастают. В соответствии с оценкой (8.3) при $d \rightarrow -\infty$ ошибки аппроксимаций $\tilde{y}$ неограниченно возрастают, если $\operatorname{Re} \kappa > 0$, и не возрастают, если $\operatorname{Re} \kappa = 0$.

В таблице 2 в каждой основной ячейке в соответствующем порядке сверху вниз представлены три значения $\Delta \tilde{y}$: при $\kappa = 2^{1/2}\pi k i$, $\kappa = \pi k(1 + i)$ и $\kappa = 2^{1/2}\pi k$, полученные при $\gamma = 2$, $\Sigma = \pi/15$, $d = 0$ и различных значениях k . Заметим, что в согласии с оценкой (8.3) при увеличении $|\kappa|$ погрешность аппроксимаций возрастает, причем при $\arg \kappa \in (-\pi/2, \pi/2)$ значительно быстрее, чем при $\arg \kappa = \pi/2$, но почти кубическая скорость сходимости сохраняется в обоих случаях.

Таблица 1. Максимумы абсолютных погрешностей при $\kappa = 2^{1/2}\pi i$, $\kappa = \pi(1 + i)$, $\kappa = 2^{1/2}\pi$ и фиксированных d ($\gamma = 2$, $\Sigma = \pi/15$)

d	$h_1 = \pi/15$	$h_2 = \pi/45$	$h_3 = \pi/135$	$h_4 = \pi/405$	$h_5 = \pi/1215$
0.999	$3.60 \cdot 10^{-3}$ $2.56 \cdot 10^{-4}$ $8.17 \cdot 10^{-4}$	$1.33 \cdot 10^{-4}$ $8.24 \cdot 10^{-6}$ $9.42 \cdot 10^{-6}$	$4.92 \cdot 10^{-6}$ $2.81 \cdot 10^{-7}$ $1.78 \cdot 10^{-7}$	$5.79 \cdot 10^{-5}$ $6.71 \cdot 10^{-4}$ $2.52 \cdot 10^{-3}$	$9.45 \cdot 10^{-4}$ $9.88 \cdot 10^{-3}$ $3.54 \cdot 10^{-2}$
0.9	$3.35 \cdot 10^{-3}$ $2.56 \cdot 10^{-4}$ $7.66 \cdot 10^{-5}$	$1.23 \cdot 10^{-4}$ $8.06 \cdot 10^{-6}$ $2.74 \cdot 10^{-6}$	$4.56 \cdot 10^{-6}$ $2.93 \cdot 10^{-7}$ $1.01 \cdot 10^{-7}$	$1.69 \cdot 10^{-7}$ $1.08 \cdot 10^{-8}$ $4.80 \cdot 10^{-9}$	$6.25 \cdot 10^{-9}$ $3.51 \cdot 10^{-9}$ $1.51 \cdot 10^{-8}$
0.5	$1.10 \cdot 10^{-3}$ $6.36 \cdot 10^{-4}$ $2.78 \cdot 10^{-4}$	$4.00 \cdot 10^{-5}$ $1.29 \cdot 10^{-5}$ $9.32 \cdot 10^{-6}$	$1.48 \cdot 10^{-6}$ $4.37 \cdot 10^{-7}$ $3.37 \cdot 10^{-7}$	$5.48 \cdot 10^{-8}$ $1.60 \cdot 10^{-8}$ $1.24 \cdot 10^{-8}$	$2.02 \cdot 10^{-9}$ $5.92 \cdot 10^{-10}$ $4.62 \cdot 10^{-10}$
10^{-4}	$2.37 \cdot 10^{-2}$ $2.25 \cdot 10^{-2}$ $1.81 \cdot 10^{-3}$	$1.07 \cdot 10^{-4}$ $2.17 \cdot 10^{-4}$ $9.20 \cdot 10^{-5}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$ $3.82 \cdot 10^{-6}$ $3.58 \cdot 10^{-6}$	$5.28 \cdot 10^{-7}$ $2.71 \cdot 10^{-7}$ $1.43 \cdot 10^{-7}$	$2.70 \cdot 10^{-8}$ $1.49 \cdot 10^{-8}$ $6.11 \cdot 10^{-9}$
0	$2.36 \cdot 10^{-2}$ $2.26 \cdot 10^{-2}$ $1.81 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-4}$ $2.21 \cdot 10^{-4}$ $9.11 \cdot 10^{-5}$	$8.23 \cdot 10^{-6}$ $3.53 \cdot 10^{-6}$ $3.48 \cdot 10^{-6}$	$4.43 \cdot 10^{-7}$ $2.23 \cdot 10^{-7}$ $1.31 \cdot 10^{-7}$	$1.81 \cdot 10^{-8}$ $9.88 \cdot 10^{-9}$ $4.83 \cdot 10^{-9}$
-10^{-4}	$2.37 \cdot 10^{-2}$ $2.25 \cdot 10^{-2}$ $1.81 \cdot 10^{-3}$	$1.07 \cdot 10^{-4}$ $2.17 \cdot 10^{-4}$ $9.20 \cdot 10^{-5}$	$9.00 \cdot 10^{-6}$ $3.82 \cdot 10^{-6}$ $3.58 \cdot 10^{-6}$	$5.28 \cdot 10^{-7}$ $2.71 \cdot 10^{-7}$ $1.43 \cdot 10^{-7}$	$2.70 \cdot 10^{-8}$ $1.49 \cdot 10^{-8}$ $6.11 \cdot 10^{-9}$
-1	$1.91 \cdot 10^{-3}$ $6.47 \cdot 10^{-3}$ $4.21 \cdot 10^{-3}$	$6.69 \cdot 10^{-5}$ $6.71 \cdot 10^{-5}$ $4.34 \cdot 10^{-5}$	$2.48 \cdot 10^{-6}$ $8.39 \cdot 10^{-7}$ $5.19 \cdot 10^{-7}$	$9.17 \cdot 10^{-8}$ $1.05 \cdot 10^{-8}$ $6.42 \cdot 10^{-9}$	$3.40 \cdot 10^{-9}$ $1.71 \cdot 10^{-10}$ $2.78 \cdot 10^{-11}$
-5	$1.15 \cdot 10^{-3}$ $1.26 \cdot 10^3$ $2.94 \cdot 10^5$	$3.00 \cdot 10^{-5}$ $1.48 \cdot 10^1$ $3.40 \cdot 10^3$	$1.09 \cdot 10^{-6}$ $1.86 \cdot 10^{-1}$ $4.16 \cdot 10^1$	$4.03 \cdot 10^{-8}$ $2.30 \cdot 10^{-3}$ $5.14 \cdot 10^{-1}$	$1.49 \cdot 10^{-9}$ $1.85 \cdot 10^{-5}$ $1.97 \cdot 10^{-2}$
-50	$4.03 \cdot 10^{-4}$ $1.92 \cdot 10^{64}$ $1.29 \cdot 10^{92}$	$1.30 \cdot 10^{-5}$ $2.26 \cdot 10^{62}$ $1.54 \cdot 10^{90}$	$4.82 \cdot 10^{-7}$ $2.77 \cdot 10^{60}$ $1.89 \cdot 10^{88}$	$1.79 \cdot 10^{-8}$ $3.43 \cdot 10^{58}$ $2.27 \cdot 10^{86}$	$6.62 \cdot 10^{-10}$ $3.99 \cdot 10^{56}$ $1.79 \cdot 10^{85}$

Таблица 2. Максимумы абсолютных погрешностей при $\kappa = 2^{1/2}\pi k i$, $\kappa = \pi k(1 + i)$, $\kappa = 2^{1/2}\pi k$ ($\gamma = 2$, $\Sigma = \pi/15$, $d = 0$)

k	$h_1 = \pi/15$	$h_2 = \pi/45$	$h_3 = \pi/135$	$h_4 = \pi/405$	$h_5 = \pi/1215$
2	$3.49 \cdot 10^{-1}$	$3.07 \cdot 10^{-3}$	$5.97 \cdot 10^{-5}$	$4.38 \cdot 10^{-6}$	$1.89 \cdot 10^{-7}$
	$3.01 \cdot 10^{-1}$	$2.24 \cdot 10^{-3}$	$5.51 \cdot 10^{-5}$	$3.75 \cdot 10^{-6}$	$1.60 \cdot 10^{-7}$
	$1.86 \cdot 10^{-1}$	$2.95 \cdot 10^{-4}$	$6.41 \cdot 10^{-5}$	$3.33 \cdot 10^{-6}$	$1.35 \cdot 10^{-7}$
4	$6.63 \cdot 10^0$	$8.13 \cdot 10^{-2}$	$3.35 \cdot 10^{-4}$	$5.60 \cdot 10^{-5}$	$2.60 \cdot 10^{-6}$
	$6.77 \cdot 10^0$	$7.65 \cdot 10^{-2}$	$6.37 \cdot 10^{-4}$	$5.54 \cdot 10^{-5}$	$2.51 \cdot 10^{-6}$
	$4.67 \cdot 10^{-1}$	$1.16 \cdot 10^{-1}$	$2.60 \cdot 10^{-3}$	$7.86 \cdot 10^{-5}$	$2.72 \cdot 10^{-6}$
6	$3.82 \cdot 10^1$	$5.59 \cdot 10^{-1}$	$1.22 \cdot 10^{-3}$	$2.43 \cdot 10^{-4}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$
	$6.64 \cdot 10^1$	$8.72 \cdot 10^{-1}$	$2.77 \cdot 10^{-3}$	$2.59 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-5}$
	$8.10 \cdot 10^1$	$3.84 \cdot 10^0$	$5.62 \cdot 10^{-2}$	$9.37 \cdot 10^{-4}$	$2.09 \cdot 10^{-5}$
8	$1.10 \cdot 10^2$	$2.92 \cdot 10^0$	$1.91 \cdot 10^{-2}$	$5.76 \cdot 10^{-4}$	$3.67 \cdot 10^{-5}$
	$3.73 \cdot 10^2$	$9.84 \cdot 10^0$	$1.11 \cdot 10^{-1}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$5.81 \cdot 10^{-5}$
	$1.16 \cdot 10^3$	$6.63 \cdot 10^1$	$1.04 \cdot 10^0$	$1.40 \cdot 10^{-2}$	$2.11 \cdot 10^{-4}$
10	$2.00 \cdot 10^2$	$1.31 \cdot 10^1$	$9.10 \cdot 10^{-2}$	$8.47 \cdot 10^{-4}$	$8.28 \cdot 10^{-5}$
	$1.31 \cdot 10^3$	$1.00 \cdot 10^2$	$1.35 \cdot 10^0$	$1.80 \cdot 10^{-2}$	$2.95 \cdot 10^{-4}$
	$1.10 \cdot 10^4$	$8.43 \cdot 10^2$	$1.60 \cdot 10^1$	$2.11 \cdot 10^{-1}$	$2.89 \cdot 10^{-3}$

Заключение

В рамках метода граничных элементов получены полуаналитические аппроксимации НП ПДС для двумерного уравнения Гельмгольца, равномерно сходящиеся в замкнутой приграничной области, включающей границу, с порядком аппроксимации $O(h^3 \ln h)$ при условиях $\partial\Omega \in C^7$, $v \in C^5(\partial\Omega)$. При этом для аппроксимации медленно изменяющихся функций используются полиномы второй степени и КФГ с порядком аппроксимации не ниже пятого. Аналогичным образом при любом $n \in \mathbb{N}$ можно получить равномерно сходящиеся аппроксимации порядка $O(h^{2n+1} \ln h)$, если использовать полиномы степени $2n$ и КФГ с порядком аппроксимации не ниже $O(h^{2n+3})$.

Такие аппроксимации могут быть построены для любой достаточно гладкой аналитически заданной границы. С одной стороны, поскольку на практике обычно известны координаты лишь конечного числа граничных точек, последнее обстоятельство можно отнести к недостаткам метода. С другой стороны, если вопрос об аппроксимации границы с помощью достаточно гладкой аналитически заданной кривой удовлетворительно решен, то точное интегрирование в рамках предлагаемого метода всегда может быть осуществлено независимо от сложности задания кривой. Такой двухступенчатый подход позволяет предотвратить эффект «ложной границы» [27].

Отметим, что для построения аппроксимаций требуется лишь конечное число значений функции плотности, заданных в узловых граничных точках.

При увеличении $|\kappa|$ погрешность аппроксимаций возрастает, причем более значительно при $\operatorname{Re} \kappa \gg 1$, то есть в случае сильной диссипации. Последнее обстоятельство связано с тем, что производные подынтегральных функций, заменяемых приближенными в рамках аддитивно-мультипликативной аппроксимации, экспоненциально увеличиваются по модулю при $\operatorname{Re} \kappa \rightarrow +\infty$. В то же время кубическая скорость сходимости при увеличении $|\kappa|$ сохраняется, поэтому при не слишком больших значениях $|\kappa|$ аппроксимации могут быть использованы на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
3. Gao X. W., Yang Kai, Wang J. An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2008. Vol. 32. Issue 8. P. 692–696. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.12.004>
4. Zhang Yao-Ming, Gu Yan, Chen Jeng-Tzong. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities // *Computational Mechanics*. 2011. Vol. 47. Issue 5. P. 493–504. <https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0>
5. Gu Yan, Chen Wen, Zhang Bo, Qu Wenzhen. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method // *Computational Mechanics*. 2014. Vol. 53. Issue 6. P. 1223–1234. <https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1>
6. Niu Zhongrong, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin, Hu Zongjun. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2007. Vol. 31. Issue 12. P. 949–964. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001>
7. Niu Zhongrong, Hu Zongjun, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2015. Vol. 61. P. 42–51. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007>
8. Hu Zongjun, Niu Zhongrong, Cheng Changzheng. A new semi-analytic algorithm of nearly singular integrals on higher order element in 3D potential BEM // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016. Vol. 63. P. 30–39. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.11.001>
9. Cheng Changzheng, Pan Dong, Han Zhilin, Wu Meng, Niu Zhongrong. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2018. Vol. 31. No. 4. P. 433–444. <https://doi.org/10.1007/s10338-018-0040-8>
10. Han Zhilin, Cheng Changzheng, Hu Zongjun, Niu Zhongrong. The semi-analytical evaluation for nearly singular integrals in isogeometric elasticity boundary element method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2018. Vol. 95. P. 286–296. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.07.016>
11. Han Zhilin, Huang Yifan, Cheng Changzheng, Liang Yongcheng, Hu Zongjun, Niu Zhongrong. The semianalytical analysis of nearly singular integrals in 2D potential problem by isogeometric boundary element method // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2020. Vol. 121. Issue 16. P. 3560–3583. <https://doi.org/10.1002/nme.6370>
12. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью // *Дифференциальные уравнения*. 2022. Т. 58. № 8. С. 1121–1131. <https://doi.org/10.31857/S037406412208012X>
13. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя в случае уравнения Гельмгольца // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2022. Т. 62. № 3. С. 421–436. <https://doi.org/10.31857/S0044466922030097>
14. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Улучшенная квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2024. Т. 64. № 2. С. 200–219. <https://doi.org/10.31857/S0044466924020021>
15. Иванов Д. Ю. О равномерной сходимости полуаналитического решения задачи Дирихле для диссипативного уравнения Гельмгольца вблизи границы двумерной области // *Уфимский математический журнал*. 2023. Т. 15. Вып. 4. С. 75–98. <https://www.mathnet.ru/rus/ufa677>
16. Иванов Д. Ю. Об одной полуаналитической аппроксимации нормальной производной потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 434–451. <https://doi.org/10.35634/vm230304>
17. Иванов Д. Ю. О равномерной сходимости аппроксимаций касательной и нормальной производных потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2024. Т. 64. № 7. С. 1233–1252. <https://doi.org/10.31857/S0044466924070094>

18. Иванов Д. Ю. Полуаналитическая аппроксимация нормальной производной потенциала двойного слоя вблизи и на границе двумерной области // Уфимский математический журнал. 2025. Т. 17. Вып. 3. С. 19–48. <https://www.mathnet.ru/rus/ufa738>
19. Иванов Д. Ю. Полуаналитическая аппроксимация нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца вблизи и на границе двумерной области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 4. С. 537–557. <https://doi.org/10.35634/vm250403>
20. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. <https://zbmath.org/0621.35002>
21. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн. М.: ТОО «Янус», 1995. <https://zbmath.org/0904.73001>
22. Бахшалыева М. Н., Халилов Э. Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61. № 6. С. 936–950. <https://doi.org/10.31857/S0044466921030030>
23. Халилов Э. Г. Квадратурная формула для нормальной производной потенциала двойного слоя // Уфимский математический журнал. 2023. Т. 15. Вып. 4. С. 99–109. <https://www.mathnet.ru/rus/ufa678>
24. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Физматлит, 2003. <https://elibrary.ru/item.asp?id=19442791>
25. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 4. Часть 2. М.: Наука, 1981.
26. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть 1. М.: ИЛ, 1949.
27. Gong Yanpeng, Dong Chunying, Bai Yang. Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2017. Vol. 75. P. 21–35. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.11.005>

Поступила в редакцию 22.05.2026

Принята к публикации 13.08.2026

Иванов Дмитрий Юрьевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра «Высшая математика», Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), 127994, Россия, г. Москва, ГСП-4, ул. Образцова, 9.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4551-469X>

E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Цитирование: Д. Ю. Иванов. Полуаналитическая аппроксимация нормальной производной потенциала двойного слоя для уравнения Гельмгольца вблизи и на границе двумерной области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 3. С. 386–406.

D. Yu. Ivanov

Semi-analytical approximation of the normal derivative of the double-layer potential for the Helmholtz equation near and at the boundary of a two-dimensional domain

Keywords: boundary element method, strongly singular integrals, Helmholtz equation, double-layer potential, semi-analytical approximation.

MSC2020: 31-08, 31A10

DOI: [10.35634/vm260303](https://doi.org/10.35634/vm260303)

The normal derivative of the double-layer potential is expressed on the domain boundary in terms of strongly singular integrals. Therefore, neither at the boundary itself nor in its immediate vicinity can this derivative be calculated with satisfactory accuracy using conventional quadrature formulas, which yield reliable results only at a sufficient distance from the boundary. In this paper, within the boundary element method (BEM) framework, semi-analytical approximations for the normal derivative of the double-layer potential associated with the two-dimensional Helmholtz equation are derived. These approximations converge uniformly with a nearly cubic rate in a closed near-boundary region that encompasses the boundary itself. Such approximations are feasible for any analytically defined boundary of class C^7 . The proposed approach combines exact integration over the smooth component of the distance function near the observation points, an additive-multiplicative method for extracting singularities, piecewise-quadratic interpolation of slowly varying functions, and symmetrization of interpolation intervals with respect to the projections of the observation points onto the domain boundary. The theoretical findings are validated by numerical computations of the normal derivative for the Helmholtz equation at various complex wavenumbers, performed inside, outside, and on the boundary of a unit disk.

REFERENCES

1. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques: Theory and applications in engineering*, Berlin: Springer, 1984. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3>
2. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Metody vychislenii. Tom 1* (Methods of computation. Vol. 1), Moscow: Fizmatgiz, 1962.
3. Gao X. W., Yang Kai, Wang J. An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, vol. 32, issue 8, pp. 692–696. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.12.004>
4. Zhang Yao-Ming, Gu Yan, Chen Jeng-Tzong. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities, *Computational Mechanics*, 2011, vol. 47, issue 5, pp. 493–504. <https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0>
5. Gu Yan, Chen Wen, Zhang Bo, Qu Wenzhen. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method, *Computational Mechanics*, 2014, vol. 53, issue 6, pp. 1223–1234. <https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1>
6. Niu Zhongrong, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin, Hu Zongjun. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, vol. 31, issue 12, pp. 949–964. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001>
7. Niu Zhongrong, Hu Zongjun, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, vol. 61, pp. 42–51. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007>
8. Hu Zongjun, Niu Zhongrong, Cheng Changzheng. A new semi-analytic algorithm of nearly singular integrals on higher order element in 3D potential BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2016, vol. 63, pp. 30–39. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.11.001>

9. Cheng Changzheng, Pan Dong, Han Zhilin, Wu Meng, Niu Zhongrong. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2018, vol. 31, no. 4, pp. 433–444. <https://doi.org/10.1007/s10338-018-0040-8>
10. Han Zhilin, Cheng Changzheng, Hu Zongjun, Niu Zhongrong. The semi-analytical evaluation for nearly singular integrals in isogeometric elasticity boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2018, vol. 95, pp. 286–296. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.07.016>
11. Han Zhilin, Huang Yifan, Cheng Changzheng, Liang Yongcheng, Hu Zongjun, Niu Zhongrong. The semianalytical analysis of nearly singular integrals in 2D potential problem by isogeometric boundary element method, *International Journal for Numerical Methods Engineering*, 2020, vol. 121, issue 16, pp. 3560–3583. <https://doi.org/10.1002/nme.6370>
12. Krutitskii P. A., Reznichenko I. O. Quadrature formula for the double layer potential with differentiable density, *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 8, pp. 1114–1125. <https://doi.org/10.1134/s0012266122080122>
13. Krutitskii P. A., Reznichenko I. O. Quadrature formula for a double layer potential in the case of the Helmholtz equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, no. 3, pp. 411–426. <https://doi.org/10.1134/S0965542522030095>
14. Krutitskii P. A., Reznichenko I. O. Improved quadrature formulas for the direct value of the normal derivative of a single-layer potential, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2024, vol. 64, no. 2, pp. 188–205. <https://doi.org/10.1134/S0965542524020076>
15. Ivanov D. Yu. On the uniform convergence of a semi-analytical solution of the Dirichlet problem for the dissipative Helmholtz equation near the boundary of a two-dimensional domain, *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, issue 4, pp. 76–99. <https://doi.org/10.13108/2023-15-4-76>
16. Ivanov D. Yu. On one semi-analytical approximation of the normal derivative of the simple layer potential near the boundary of a two-dimensional domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'uternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 434–451 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/vm230304>
17. Ivanov D. Yu. On the uniform convergence of approximations to the tangential and normal derivatives of the single-layer potential near the boundary of a two-dimensional domain, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2024, vol. 64, no. 7, pp. 1504–1522. <https://doi.org/10.1134/S0965542524700623>
18. Ivanov D. Yu. Semianalytic approximation of normal derivative of double layer potential near and at boundary of two-dimensional domain, *Ufa Mathematical Journal*, 2025, vol. 17, no. 3, pp. 17–45. <https://doi.org/10.13108/2025-17-3-17>
19. Ivanov D. Yu. Semi-analytical approximation of the normal derivative of the simple layer potential for the Helmholtz equation near and on the boundary of a two-dimensional domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'uternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 4, pp. 537–557 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/vm250403>
20. Colton D., Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*, New York: John Wiley and Sons, 1983. <https://zbmath.org/0522.35001>
21. Lifanov I. K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii i chislennyyi eksperiment v matematicheskoi fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln* (The method of singular integral equations and a numerical experiment in mathematical physics, aerodynamics and the theory of elasticity and wave diffraction), Moscow: TOO Yanus, 1995. <https://zbmath.org/0904.73001>
22. Bakhshaliyeva M. N., Khalilov E. H. Justification of the collocation method for an integral equation of the exterior Dirichlet problem for the Laplace equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2021, vol. 61, no. 6, pp. 923–937. <https://doi.org/10.1134/S0965542521030039>
23. Khalilov E. G. Quadrature formula for normal derivative of double layer potential, *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, no. 4, pp. 100–111. <https://doi.org/10.13108/2023-15-4-100>
24. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 1* (Course of differential and integral calculus. Vol. 1), Moscow: Fizmatlit, 2003. <https://elibrary.ru/item.asp?id=19442791>
25. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki. Tom 4. Chast' 2* (A course of higher mathematics. Vol. 4. Part 2), Moscow: Nauka, 1981.

26. Watson G.N. *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge: Cambridge University Press, 1944. <https://zbmath.org/0063.08184>
27. Gong Yanpeng, Dong Chunying, Bai Yang. Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017, vol. 75, pp. 21–35. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.11.005>

Received 22.05.2026

Accepted 13.08.2026

Dmitrii Yurievich Ivanov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Russian University of Transport (MIIT), ul. Obraztsova, 9, GSP-4, Moscow, 127994, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4551-469X>

E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Citation: D. Yu. Ivanov. Semi-analytical approximation of the normal derivative of the double-layer potential for the Helmholtz equation near and at the boundary of a two-dimensional domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 3, pp. 386–406.