

УДК 517.935.4

© М. С. Кузнецов, Л. И. Родина, А. В. Черникова

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДОХОДА ОТ СБОРА ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВРЕМЕНИ

Рассматривается модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано логистическим дифференциальным уравнением на отрезке времени $[0, T]$. Предполагаем, что на данном отрезке происходит n извлечений ресурса, и в момент времени T извлекается весь оставшийся ресурс данной популяции. Приведено описание управляемой системы с импульсным воздействием, которая определяет поведение популяции с учетом эксплуатации. Исследуется задача оптимизации дохода от сбора возобновляемого ресурса. Получены оптимальные значения для моментов и долей извлечения ресурса, которые мы рассматриваем как управления для достижения наибольшего дохода. Показано, что оптимальный режим эксплуатации существенно зависит от начального количества ресурса X_0 и имеет более сложную структуру, чем в ситуации, когда промежутки времени между соседними извлечениями постоянные. В частности, когда X_0 достаточно мало, необходимо некоторое время для восстановления количества ресурса, на протяжении которого добычу целесообразно не производить.

Ключевые слова: модель эксплуатируемой популяции, оптимальная эксплуатация, доход от сбора возобновляемого ресурса.

DOI: [10.35634/vm260304](https://doi.org/10.35634/vm260304)**Введение**

Для моделирования режимов динамики популяций используются различные аналитические и численные методы. Методы качественного анализа моделей динамики распределенных возобновляемых ресурсов и оптимизации этой динамики представлены в работах [1, 2]. В [3, 4] приведено описание режимов взаимодействия популяций для гибридных систем, исследуемых методом Филиппова. Моделированию сценариев развития различных популяций при помощи численных методов посвящены работы [5–7]. Одним из актуальных вопросов здесь является влияние промыслового воздействия на динамику структурированных и взаимодействующих популяций. Основные направления и обзор современного состояния исследований в популяционной динамике приведены в [8].

Множество публикаций посвящено вопросам выбора стратегий эксплуатации возобновляемого ресурса при помощи постоянного или периодического импульсного отбора. Исследуются задачи максимизации различных характеристик сбора ресурса, среди которых эффективность сбора ресурса, средняя временная выгода и доход от сбора с учетом дисконтирования (см. [1, 2, 9–12]).

Отметим, что в работах [9, 12] промежутки времени между соседними моментами извлечения ресурса считались постоянными. Более аналитически сложной является задача определения не только долей извлеченного ресурса, но и моментов извлечения, с целью максимизации различных характеристик сбора. Первой публикацией в данном направлении является статья [13], в которой рассматриваются вопросы оптимальной эксплуатации ресурса для популяции, заданной логистическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = ax(1 - x), \quad \text{где } a > 0, \quad x \geq 0. \quad (0.1)$$

Исследуется задача нахождения моментов времени и построения управлений для достижения наибольшего дохода от сбора на заданном отрезке $[0, T]$, $T > 0$. Предполагается, что

количество ресурса, оставшегося в момент времени T , равно начальному количеству X_0 . Показано, что для достижения наибольшего дохода промежутки времени между соседними извлечениями и доли извлеченного ресурса должны быть одинаковыми. В [13] также рассматривается задача максимизации дохода от сбора при дополнительном условии, что добыча ресурса связана с расходами на обслуживание оборудования или оплату труда.

В настоящей работе рассматривается задача оптимальной эксплуатации популяции (0.1) в предположении, что в момент времени T извлекается весь оставшийся ресурс данной популяции. Показано, что оптимальный режим эксплуатации существенно зависит от начального количества ресурса и имеет более сложную структуру, чем в ситуации, описанной в [9, 12, 13], когда промежутки времени между соседними извлечениями постоянные. В частности, когда X_0 достаточно мало, необходимо некоторое время для восстановления количества ресурса, на протяжении которого добычу целесообразно не производить.

§ 1. Основные результаты

Рассмотрим модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано логистическим дифференциальным уравнением (0.1) на отрезке времени $[0, T]$. Предполагаем, что в моменты времени $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < T$ из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса $u_k \in [0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geq 1$, а в момент времени T извлекается весь ресурс популяции X_n , оставшийся к этому моменту (то есть $u_n = 1$). С учетом эксплуатации получаем управляемую систему с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax(1-x), \quad t \neq t_k, \\ x(t_k) &= (1-u_k) \cdot x(t_k-0), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x(t_k-0)$ и $x(t_k)$ — количество ресурса до и после сбора в момент t_k соответственно, $k = 1, \dots, n$. Предполагаем, что решения системы (1.1) непрерывны справа.

Пусть $X_k = x(t_k)$ — количество ресурса до сбора в момент t_k , $x(0) = X_0$ — начальное количество ресурса, $C_1 \geq 0$ — агрегированная стоимость условной единицы ресурса. Будем полагать, что $C_1 = 1$, тогда стоимость собранного ресурса в момент t_k равна $X_k u_k$, $k = 1, \dots, n$. Следовательно, общий доход от сбора ресурса на отрезке $[0, T]$ равен

$$D(U_n, X_0) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k u_k + X_n, \quad (1.2)$$

где $U_n = (t_1, \dots, t_{n-1}; u_0, \dots, u_{n-1})$. Исследуем задачу нахождения моментов времени $t_1, \dots, t_{n-1}$ и построения управлений $u_0, \dots, u_{n-1}$ для достижения наибольшего значения функции (1.2).

Введем вспомогательные обозначения: $x_k = x(t_k)$ — количество ресурса после сбора в момент t_k ; $t_n = T$, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$x_k = (1-u_k)X_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \tau_1 + \dots + \tau_n = T.$$

Отметим, что $x_n = 0$, так как $u_n = 1$. Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$ и найдем

$$X_k = \varphi(\tau_k, x_{k-1}) = \frac{x_{k-1} e^{a\tau_k}}{1 + x_{k-1}(e^{a\tau_k} - 1)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Задачу максимизации дохода (1.2) сведем к задаче максимизации функции

$$S(V_n, X_0) = X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x_k}{(1-x_k)e^{-a\tau_{k+1}} + x_k} - x_k \right), \quad (1.3)$$

где $V_n = (\tau_1, \dots, \tau_n; x_0, \dots, x_{n-1})$, $\tau_1 + \dots + \tau_n = T$. Если извлечение ресурса в момент $t_0 = 0$ не производилось, то полагая $x_0 = X_0$ в (1.3), запишем функцию (V_n, X_0) в виде

$$S(v_n, X_0) \doteq \frac{X_0}{(1 - X_0)e^{-a\tau_1} + X_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{x_k}{(1 - x_k)e^{-a\tau_{k+1}} + x_k} - x_k \right), \quad (1.4)$$

где $v_n = (\tau_1, \dots, \tau_n; X_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, $\tau_1 + \dots + \tau_n = T$.

При помощи стандартных вычислений доказаны следующие утверждения.

Лемма 1.1. Пусть $n \geq 1$, $X_0 \geq (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$. Функция $S(V_n, X_0)$ имеет стационарную точку $V_n^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_n^*; x_0^*, \dots, x_{n-1}^*)$, где

$$\tau_1^* = \dots = \tau_n^* = \frac{T}{n}, \quad x_0^* = x_1^* = \dots = x_{n-1}^* = (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}. \quad (1.5)$$

Лемма 1.2. Пусть $n \geq 2$ и выполнено

$$(e^{aT} + 1)^{-1} < X_0 < (e^{-\frac{aT}{2(n-1)}} + 1)^{-1}. \quad (1.6)$$

Тогда функция $S(v_n, X_0)$ имеет стационарную точку $v_n^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_n^*; X_0, x_1^*, \dots, x_{n-1}^*)$ такую, что

$$\tau_1^* = \frac{T}{2n-1} + \frac{2n-2}{a(2n-1)} \ln \frac{1-X_0}{X_0}, \quad \tau_2^* = \dots = \tau_n^* = \tau^* = \frac{2}{2n-1} \left(T - \frac{1}{a} \ln \frac{1-X_0}{X_0} \right), \quad (1.7)$$

$$x_1^* = \dots = x_{n-1}^* = (e^{\frac{a\tau^*}{2}} + 1)^{-1}. \quad (1.8)$$

Замечание 1.1. Неравенство $X_0 \geq (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$ в лемме 1.1 обеспечивает условие $X_0 \geq x_0^*$. Если выполнено (1.6), то $\tau_1^* > 0$ и $\tau^* > 0$ в лемме 1.2.

Найдем значения функций $S(V_n, X_0)$ и $S(v_n, X_0)$ в данных стационарных точках:

$$S(V_n^*, X_0) = X_0 + \frac{n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)}{e^{\frac{aT}{2n}} + 1}, \quad n \geq 1, \quad (1.9)$$

$$S(v_n^*, X_0) = \frac{nA_n - n + 1}{A_n + 1}, \quad \text{где } A_n = \left(\frac{X_0 e^{aT}}{1 - X_0} \right)^{\frac{1}{2n-1}}, \quad n \geq 2. \quad (1.10)$$

Для фиксированного $n \geq 1$ определим множество

$$\Delta_n(T) \doteq \{V_n: V_n \in [0, T]^n \times [0, X_0] \times \dots \times [0, X_{n-1}], \tau_1 + \dots + \tau_n = T\}.$$

Предполагаем, что $X_0 \in [0, 1]$, тогда $x_k \in [0, X_k] \subseteq [0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, поэтому множество $\Delta_n(T)$ компактно и является подмножеством $[0, T]^n \times [0, 1]^n$.

Покажем, что существуют три различных способа оптимального извлечения ресурса, в зависимости от начального размера популяции $X_0 \in [0, 1]$.

Теорема 1.1. Пусть $n \geq 2$. Справедливы следующие утверждения.

- (1) Если $X_0 \geq (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$, то наибольшее значение функции $S(V_n, X_0)$ равно $S(V_n^*, X_0)$ и достигается в точке (V_n^*, X_0) , заданной (1.5).
- (2) Если $(e^{aT} + 1)^{-1} < X_0 < (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$, то наибольшее значение функции $S(V_n, X_0)$ равно $S(v_n^*, X_0)$ и достигается при $x_0^* = X_0$ в точке (v_n^*, X_0) , заданной (1.7), (1.8).
- (3) Если $X_0 \leq (e^{aT} + 1)^{-1}$, то наибольшее значение функции $S(V_n, X_0)$ равно $\varphi(T, X_0)$, оно достигается при $\tau_1^* = T$, $x_0^* = X_0$.

Замечание 1.2. Пусть $n = 1$. Тогда $\Delta_1(T) = \{V_1: V_1 = (T, x_0), x_0 \in [0, X_0]\}$,

$$S(V_1, X_0) = X_0 + \frac{x_0}{(1 - x_0)e^{-aT} + x_0} - x_0.$$

Рассматривая $S(V_1, X_0)$ как функцию переменной x_0 на отрезке $[0, X_0]$, получаем, что возможны следующие случаи.

1. Если $X_0 \geq (e^{\frac{aT}{2}} + 1)^{-1}$, то максимум данной функции равен $S(V_1^*, X_0^*) = X_0 + \frac{e^{\frac{aT}{2}} - 1}{e^{\frac{aT}{2}} + 1}$ и достигается при $V_1^* = (T, x_0^*)$, где $x_0^* = (e^{\frac{aT}{2}} + 1)^{-1}$.

2. Если $X_0 < (e^{\frac{aT}{2}} + 1)^{-1}$, то максимум $S(V_1, X_0)$ равен

$$S(V_1^*, X_0) = \frac{X_0}{(1 - X_0)e^{-aT} + X_0} = \varphi(T, X_0), \quad \text{где } V_1^* = (T, X_0).$$

Следствием теоремы 1.1 является утверждение о максимальном доходе $D(U_n, X_0)$ от сбора ресурса на отрезке $[0, T]$.

Теорема 1.2. Пусть $n \geq 2$. Справедливы следующие утверждения.

(1) Если $X_0 \geq (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$, то наибольший доход от сбора ресурса равен $S(V_n^*, X_0)$ и достигается при

$$t_k^* = \frac{kT}{n}, \quad u_0^* = 1 - \frac{x_0}{X_0}, \quad u_k^* = 1 - e^{-\frac{aT}{2n}}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

(2) Если $(e^{aT} + 1)^{-1} \leq X_0 < (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$, то наибольший доход от сбора ресурса равен $S(v_n^*, X_0)$ и достигается при $t_k^* = \tau_1^* + (k-1)\tau^*$, $k = 1, \dots, n$,

$$u_0^* = 0, \quad u_k^* = 1 - e^{-\frac{a\tau^*}{2}}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

(3) Если $X_0 < (e^{aT} + 1)^{-1}$, наибольший доход от сбора ресурса равен $\varphi(T, X_0)$, он достигается при

$$\tau_1^* = T, \quad \tau_2^* = \dots = \tau_n^* = 0, \quad u_0^* = \dots = u_{n-1}^* = 0.$$

Таким образом, оптимальный режим эксплуатации популяции зависит от начального количества ресурса. Если $X_0 \geq (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$, то для достижения наибольшего дохода $D(U_n, X_0)$ необходимо делить отрезок $[0, T]$ на одинаковые временные промежутки. Для значений X_0 из второго пункта теоремы длина первого промежутка отличается от остальных и извлечение ресурса в момент $t_0 = 0$ не производится. При $X_0 < (e^{aT} + 1)^{-1}$ извлечение ресурса происходит только на конце отрезка.

§ 2. Примеры построения различных режимов эксплуатации популяции

Рассмотрим задачу максимизации дохода от сбора возобновляемого ресурса на промежутке времени $[0, T]$, где $T = 5 \ln 2$. Предполагаем, что между моментами извлечения процесс восстановления популяции описывается логистическим уравнением (0.1) при $a = 4$, а количество моментов извлечения $n = 5$. Сравним различные режимы сбора в зависимости от начального размера популяции X_0 и вычислим наибольший доход для каждого случая.

Пример 2.1. Предположим, что для начального количества ресурса выполнено неравенство $X_0 \geq (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} = 0.2$. В силу теоремы 1.1 для достижения наибольшего дохода необходимо производить изъятие ресурса через равные интервалы времени длительностью $\tau_k \approx 0.6931$, $k = 1, \dots, 5$, между моментами сбора (рис. 1). Возьмем $X_0 = 0.5$. В нулевой момент времени извлекается доля ресурса $u_0^* = 0.6$, в результате чего численность популяции снижается до уровня $x_0^* = 0.2$. Затем происходит восстановление популяции до значения $X_1 = 0.8$, а в момент τ_1^* снова производится сбор части ресурса. Последующая эксплуатация осуществляется в периодическом режиме: на каждом промежутке $[t_k^*, t_{k+1}^*)$ численность популяции увеличивается от $x_k^* = 0.2$ до $X_{k+1} = 0.8$, $k = 1, \dots, 4$, после чего ресурс частично изымается. В момент $t_5^* = T$ ресурс извлекается полностью. Максимальный суммарный доход от сбора составляет $S(V_5^*, X_0) = 3.5$ и достигается при управлениях $u_0^* = 0.6$, $u_k^* = 0.75$, $k = 1, \dots, 4$, $u_5^* = 1$.

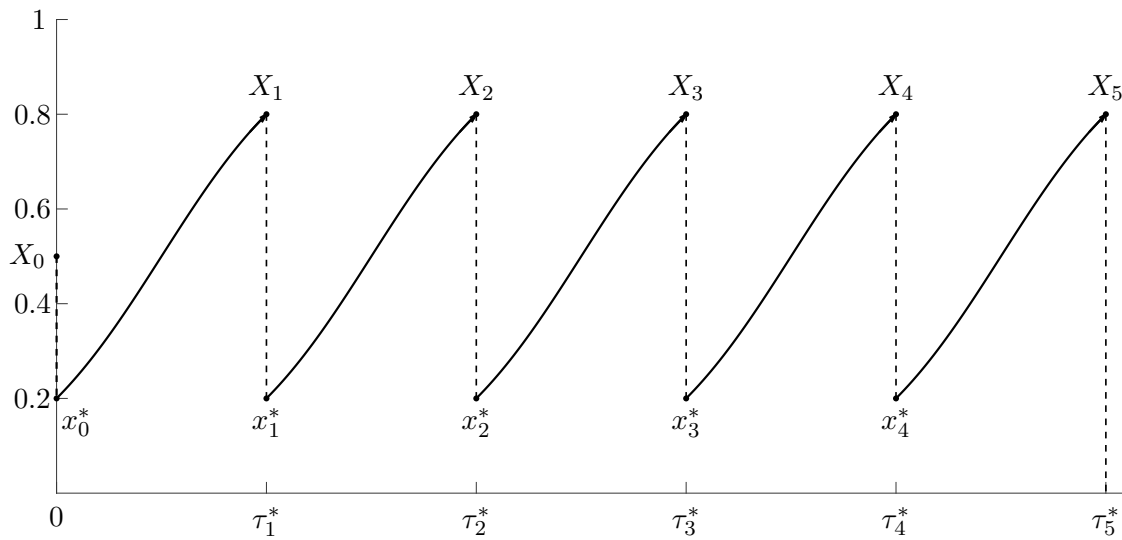


Рис. 1. Динамика численности популяции при начальном количестве $X_0 = 0.5$ и режиме сбора ресурса, описанном в примере 2.1

Пример 2.2. Пусть $X_0 = 0.05$ (такое начальное количество ресурса удовлетворяет второму условию теоремы 1.1). Здесь оптимальным режимом сбора ресурса является режим, при котором длительность интервалов изъятия зависит от начального размера популяции X_0 . В данном случае в нулевой момент времени изъятие ресурса не производится (рис. 2, а). Поскольку мгновенное изъятие отсутствует, популяция растет до уровня $X_1 \approx 0.7709$, который достигается к моменту $\tau_1^* \approx 1.0394$, определяемому соотношением (1.7). В момент τ_1^* производится изъятие части ресурса до значения $x_1^* \approx 0.2291$, необходимого для дальнейшего восстановления. Последующая эксплуатация осуществляется в периодическом режиме с равными и более короткими, чем первый, временными интервалами длительностью $\tau^* \approx 0.6066$ между моментами сбора: на каждом промежутке $[t_k^*, t_{k+1}^*)$ численность популяции увеличивается от $x_k^* \approx 0.2291$ до $X_{k+1} \approx 0.7709$, $k = 1, \dots, 4$, после чего ресурс частично изымается. В последний момент $t_5^* = T$ ресурс извлекается полностью. Суммарный доход при описанном режиме сбора составляет $S(v_5^*, X_0) \approx 2.9377$ и достигается при управлениях $u_0^* = 0$, $u_k^* \approx 0.7027$, $k = 1, \dots, 4$, $u_5^* = 1$.

Если $X_0 = 0.15$, то первый сбор производится в момент $\tau_1^* \approx 0.7705$, остальные — с шагом $\tau^* \approx 0.6738$. В этом случае суммарный доход составляет $S(v_5^*, X_0) \approx 3.1436$ и достигается при управлениях $u_0^* = 0$, $u_k^* \approx 0.7401$, $k = 1, \dots, 4$, $u_5^* = 1$.

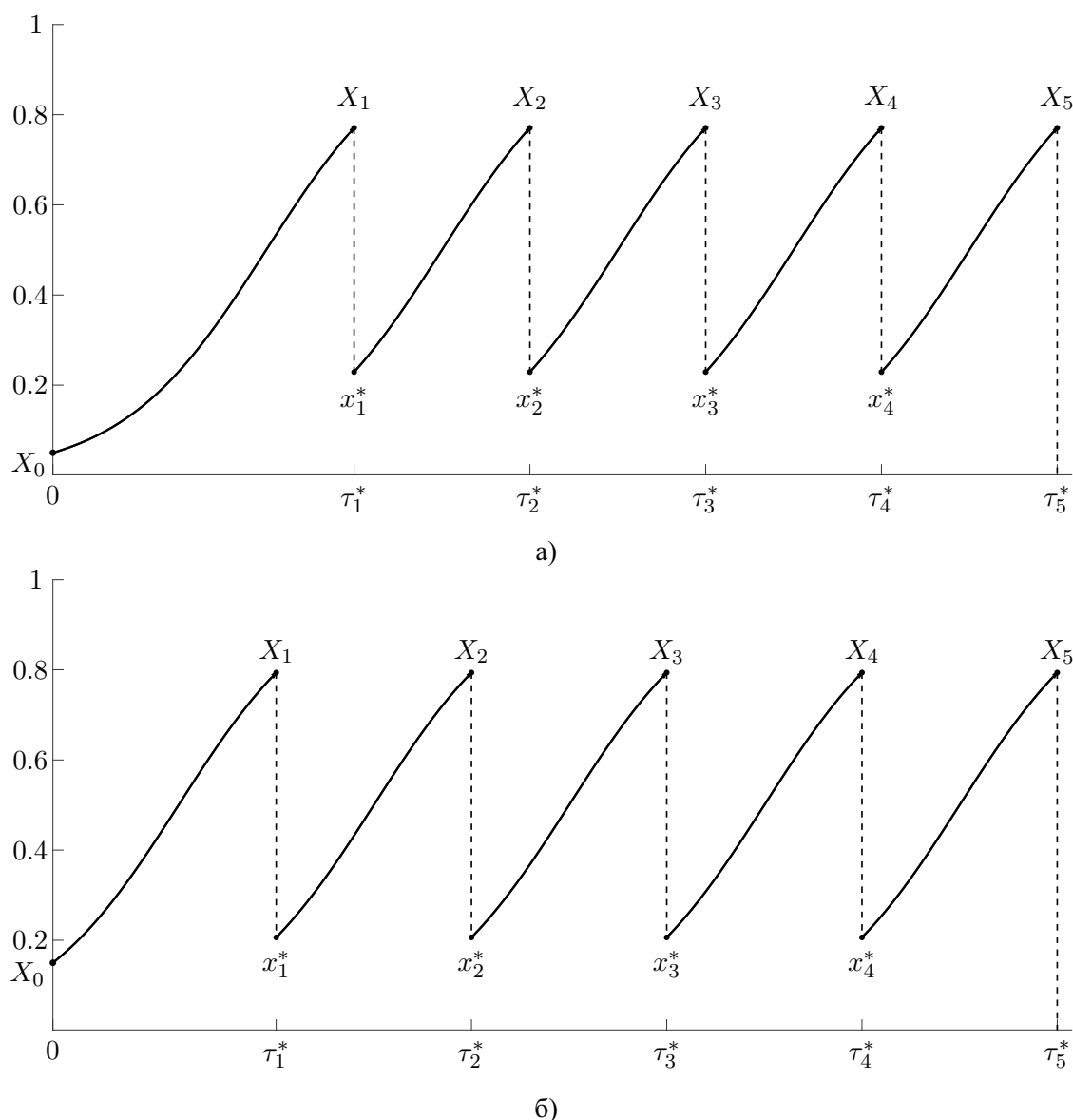


Рис. 2. Динамика численности популяции при различных начальных объемах популяции X_0 и режиме эксплуатации, описанном в примере 2.2: а) при $X_0 = 0.05$ первый сбор производится в момент $\tau_1^* \approx 1.0394$, остальные — с шагом $\tau^* \approx 0.6066$; б) при $X_0 = 0.15$ первый сбор производится в момент $\tau_1^* \approx 0.7705$, остальные — с шагом $\tau^* \approx 0.6738$

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Для доказательства теоремы 1.1 понадобятся вспомогательные утверждения.

Рассмотрим последовательности $\{S(V_n^*, X_0)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S(v_n^*, X_0)\}_{n=2}^{\infty}$, заданные (1.9) и (1.10) соответственно.

Лемма 3.1. Пусть $X_0 \geq (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$. Последовательность $\{S(V_n^*, X_0)\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(V_n^*, X_0) = X_0 + \frac{aT}{4}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1 работы [13].

Лемма 3.2. Пусть $(e^{aT} + 1)^{-1} < X_0 \leq (e^{-\frac{aT}{2(n-1)}} + 1)^{-1}$. Последовательность $\{S(v_n^*, X_0)\}_{n=2}^\infty$ возрастающая и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(v_n^*, X_0) = \frac{1}{4} \left(2 + aT - \ln \frac{1 - X_0}{X_0} \right). \quad (3.1)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$S(x) \doteq \frac{x(A(x) - 1) + 1}{A(x) + 1}, \quad \text{где } A(x) = \left(\frac{X_0 e^{aT}}{1 - X_0} \right)^{\frac{1}{2x-1}}, \quad x > 1.$$

Найдем

$$S'(x) = \left(A^2(x) - 1 - \frac{2A(x)}{2x-1} \left(aT + \ln \frac{X_0}{1 - X_0} \right) \right) (A(x) + 1)^{-2}.$$

После некоторых вычислений получаем, что неравенство $S'(x) > 0$ при $X_0 > (e^{aT} + 1)^{-1}$ равносильно

$$\operatorname{sh} y > y, \quad \text{где } y = \frac{1}{2x-1} \left(aT + \ln \frac{X_0}{1 - X_0} \right) > 0.$$

Таким образом, функция $S(x)$ возрастает в интервале $(1, +\infty)$, поэтому последовательность $\{S(v_n^*, X_0)\}_{n=2}^\infty$ возрастающая.

Отметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(A_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\frac{1}{2n-1} \left(aT + \ln \frac{X_0}{1 - X_0} \right)} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(aT + \ln \frac{X_0}{1 - X_0} \right).$$

Отсюда, учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$, получаем (3.1). $\square$

Лемма 3.3. Пусть $n \geq 2$, $(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} \leq X_0 \leq (e^{-\frac{aT}{2(n-1)}} + 1)^{-1}$. Тогда

$$S(V_n^*, X_0) \geq S(v_n^*, X_0), \quad n \geq 2. \quad (3.2)$$

Доказательство. Обозначим $q_n = A_n e^{-\frac{aT}{2n}}$, тогда $X_0 = \frac{q_n^{2n-1}}{\alpha_n + q_n^{2n-1}}$. При значениях X_0 , указанных в условии леммы, выполнено $1 \leq q_n \leq e^{\frac{aT}{2n(n-1)}}$. Перепишем (3.2) в виде

$$\frac{q_n^{2n-1}}{e^{\frac{aT}{2n}} + q_n^{2n-1}} + \frac{n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)}{e^{\frac{aT}{2n}} + 1} \geq \frac{ne^{\frac{aT}{2n}} q_n - n + 1}{e^{\frac{aT}{2n}} q_n + 1}.$$

После упрощения получаем

$$(e^{\frac{aT}{2n}} - 2n + 1)q_n^{2n} + 2nq_n^{2n-1} - 2ne^{\frac{aT}{2n}} q_n + 2ne^{\frac{aT}{2n}} - e^{\frac{aT}{2n}} - 1 \geq 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим функцию

$$L(q) = (e^{\frac{aT}{2n}} - 2n + 1)q^{2n} + 2nq^{2n-1} - 2ne^{\frac{aT}{2n}} q + 2ne^{\frac{aT}{2n}} - e^{\frac{aT}{2n}} - 1, \quad q \geq 0.$$

Отметим, что $L(1) = L'(1) = 0$. Предположим, что при заданном $n \in \mathbb{N}$ выполнено $2 \leq n < \frac{1}{2}(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)$; тогда

$$L''(q) = 2n(2n-1)(e^{\frac{aT}{2n}} - 2n + 1)q^{2n-2} + 2n(2n-1)(2n-2)q^{2n-3} > 0$$

для всех $q > 0$ и $L'(q)$ является возрастающей функцией. Следовательно, $L'(q) < 0$ при $q < 1$ и $L'(q) > 0$ при $q > 1$. Получаем, что $L(q)$ убывает в $(0, 1)$, $L(1) = 0$ и $L(q)$ возрастает в $(1, +\infty)$. Таким образом, $L(q) \geq 0$ при всех $q \geq 1$. Это и означает, что выполнено (3.3).

Если $n = \frac{1}{2}(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)$, то поведение функции $L(q)$ исследуется таким же образом.

Предположим, что $n > \frac{1}{2}(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)$. Здесь $L''(q) > 0$ при $q < \frac{2n-2}{2n-e^{\frac{aT}{2n}}-1} \doteq q_0$, где $q_0 > 1$. Следовательно, в окрестности точки $q = 1$ функция $L(q)$ ведет себя так же, как в предыдущем случае. Но $L(q) \rightarrow -\infty$ при $q \rightarrow +\infty$, поэтому уравнение $L(q) = 0$ имеет корень $q^* > 1$, причем этот корень единственный на $(1, +\infty)$, поскольку у функции $L(q)$ только одна точка перегиба. После некоторых вычислений получаем, что $L\left(e^{\frac{aT}{2n(n-1)}}\right) > 0$, поэтому $L(q) > 0$ при всех $1 \leq q < e^{\frac{aT}{2n(n-1)}}$. Таким образом, (3.2) справедливо при всех X_0 , указанных в условии леммы. $\square$

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 3.3.

Лемма 3.4. Пусть $n \geq 2$, $(e^{\frac{aT}{2(k-1)}} + 1)^{-1} \leq X_0 \leq (e^{\frac{aT}{2k}} + 1)^{-1}$, $k = 2, \dots, n$. Тогда

$$S(v_k^*, X_0) > S(V_{k-1}^*, X_0), \quad k = 2, \dots, n.$$

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $X_0 \geq (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$. Покажем, что точка (V_n^*, X_0) является точкой максимума функции $S(V_n, X_0)$ на множестве $\Delta_n(T)$. Отметим, что (V_n^*, X_0) — внутренняя стационарная точка ограниченного множества $\Delta_n(T)$ (это следует из неравенства $x^* < \varphi(\tau^*, x^*)$). Покажем, что значение функции в этой точке больше максимального значения на границе $\Delta_n(T)$.

Рассмотрим части границы $\Delta_n(T)$, заданные равенствами $\tau_k = 0$, $k = 1, \dots, n$. Здесь количество извлечений ресурса равно $n-1$, поэтому данные множества имеют стационарную точку (V_{n-1}^*, X_0) , для которой в силу леммы 3.1 выполнено $S(V_n^*, X_0) > S(V_{n-1}^*, X_0)$. Теперь рассмотрим части границы $\Delta_n(T)$, заданные равенствами $\tau_k = T$, $k = 1, \dots, n$. На этих множествах извлечение ресурса производилось только при $t = 0$ и $t = T$, наибольший доход здесь равен $S(V_1^*, X_0) < S(V_n^*, X_0)$.

Далее исследуем части границы $\Delta_n(T)$, для которых $x_k = 0$ при некотором $k = 0, 1, \dots, \dots, n-1$. Здесь получаем $X_{k+1} = \dots = X_n = 0$, то есть извлечение ресурса происходит только на отрезке $[0, T_k]$, где $T_k = \tau_1 + \dots + \tau_k \leq T$. Значение дохода в стационарных точках данных множеств равно

$$X_0 + \frac{k(e^{\frac{aT_k}{2k}} - 1)}{e^{\frac{aT_k}{2k}} + 1} \leq S(V_k^*, X_0) < S(V_n^*, X_0).$$

На следующей части границы выполнено $x_0 = X_0$, то есть извлечение ресурса в момент $t_0 = 0$ не производилось. Доход в этом случае определяется функцией $S(v_n, X_0)$, заданной (1.4). В силу леммы 3.3 для $(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} \leq X_0 \leq (e^{-\frac{aT}{2(n-1)}} + 1)^{-1}$ выполнено (3.2). Если $X_0 > (e^{-\frac{aT}{2(n-1)}} + 1)^{-1}$, то функция $S(v_n, X_0)$ не имеет стационарной точки на данной части границы. Аналогично показываем, что на других частях границы $\Delta_n(T)$ в силу лемм 3.1 и 3.2 значения функции $S(V_n, X_0)$ меньше $S(V_n^*, X_0)$.

Пусть $(e^{aT} + 1)^{-1} \leq X_0 < (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$. Тогда (V_n^*, X_0) не содержится в множестве $\Delta_n(T)$, поэтому наибольшее значение дохода будет достигаться на границе $\Delta_n(T)$, заданной равенством $x_0 = X_0$, это значение равно $S(v_n^*, X_0)$. При помощи леммы 3.4 показываем, что $S(v_n^*, X_0)$ больше, чем значения функции $S(V_n, X_0)$ на других частях границы $\Delta_n(T)$.

Если $X_0 < (e^{aT} + 1)^{-1}$, то функции $S(V_k, X_0)$, $S(v_k, X_0)$, $k = 1, \dots, n$, не имеют стационарных точек в множестве $\Delta_n(T)$, поэтому наибольший доход получается при однократном извлечении ресурса при $t = T$ и равен $\varphi(T, X_0)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляков А. О., Давыдов А. А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 38–46. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-38-46>
2. Винников Е. В., Давыдов А. А., Туницкий Д. В. Существование максимального среднего временного сбора в КПП-модели на сфере при постоянном и импульсном отборах // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 514. № 1. С. 59–64. <https://doi.org/10.31857/S2686954323600453>
3. Deng Jiawei, Tang Sanyi, Lai Choi-Hong. Non-smooth ecological systems with a switching threshold depending on the pest density and its rate of change // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2021. Vol. 42. 101094. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101094>
4. Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Гибридная модель динамики популяций с режимом убежища: регуляризация и самоорганизация // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 467–482. <https://doi.org/10.35634/vm230306>
5. Неверова Г. П., Абакумов А. И., Фрисман Е. Я. Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования // Математическая биология и биоинформатика. 2016. Т. 11. Вып. 1. С. 1–13. <https://doi.org/10.17537/2016.11.1>
6. Ревуцкая О. Л., Кулаков М. П., Фрисман Е. Я. Влияние изъятия на динамику численности сообщества «хищник–жертва» с учетом возрастной структуры жертвы // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13. № 4. С. 823–844. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2021-13-4-823-844>
7. Будянский А. В. Численное исследование влияния направленной миграции неаборигенных видов на инвазивные сценарии // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 4. С. 551–562. <https://doi.org/10.35634/vm230401>
8. Фрисман Е. Я., Кулаков М. П., Ревуцкая О. Л., Жданова О. Л., Неверова Г. П. Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11. № 1. С. 119–151. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151>
9. Родина Л. И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48–58. <https://doi.org/10.20537/vm180105>
10. Rodina L. I., Hammadi A. H. Optimization problems for models of harvesting a renewable resource // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 250. Issue 1. P. 113–122. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-05003-9>
11. Егорова А. В. Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 15–25. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-133-15-25>
12. Волдеаб М. С., Родина Л. И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Известия высших учебных заведений. Математика. 2022. Вып. 1. С. 12–24. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-1-12-24>
13. Родина Л. И., Кузнецов М. С. Задачи максимизации дохода и средней временной выгоды от сбора ресурса с учетом расходов на обслуживание // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. С. 61–72. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=89188156>

Поступила в редакцию 08.06.2026

Принята к публикации 10.08.2026

Кузнецов Максим Сергеевич, старший преподаватель, кафедра материаловедения и энергетического машиностроения, Владимирский государственный университет, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8970-0825>

E-mail: maks.kuznetsoff@gmail.com

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87; профессор, кафедра математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», 119049, Россия, г. Москва, Ленинский пр-т, 4.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

E-mail: LRodina67@mail.ru

Черникова Анастасия Владимировна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», 119049, Россия, г. Москва, Ленинский пр-т, 4;

старший преподаватель, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3930-0743>

E-mail: nastik.e@bk.ru

Цитирование: М. С. Кузнецов, Л. И. Родина, А. В. Черникова. Задача оптимизации дохода от сбора возобновляемого ресурса на конечном отрезке времени // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 3. С. 407–418.

M. S. Kuznetsov, L. I. Rodina, A. V. Chernikova

The problem of optimizing the income from collecting a renewable resource over a finite period of time

Keywords: model of a population subject to harvesting, optimal exploitation, income from harvesting of a renewable resource.

MSC2020: 34A37, 49J15, 49K15, 93C15

DOI: [10.35634/vm260304](https://doi.org/10.35634/vm260304)

We consider a model of population dynamics whose development in the absence of exploitation is given by a logistic differential equation on the time interval $[0, T]$. We assume that n resource extractions occur over this interval, and at time T the entire remaining resource of this population is extracted. A description of a controlled system with impulse action is given, which determines the population behavior taking into account exploitation. The problem of optimizing the income from the collection of a renewable resource is investigated. Optimal values have been obtained for the moments and shares of resource extraction, which we consider as controls for achieving the highest income. It is shown that the optimal exploitation mode depends significantly on the initial amount of the resource X_0 and has a more complex structure than in the situation when the time intervals between neighboring extractions are constant. In particular, when X_0 is sufficiently small, some time is required to restore the amount of the resource, during which it is advisable not to extract.

REFERENCES

1. Belyakov A. O., Davydov A. A. Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 14–21. <https://doi.org/10.1134/S0081543817090036>
2. Vinnikov E. V., Davydov A. A., Tunitsky D. V. Existence of a maximum of time-averaged harvesting in the KPP model on sphere with permanent and impulse harvesting, *Doklady Mathematics*, 2023, vol. 108, issue 3, pp. 472–476. <https://doi.org/10.1134/S1064562423701387>
3. Deng Jiawei, Tang Sanyi, Lai Choi-Hong. Non-smooth ecological systems with a switching threshold depending on the pest density and its rate of change, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2021, vol. 42, 101094. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101094>
4. Kirillov A. N., Sazonov A. M. A hybrid model of population dynamics with refuge-regime: regularization and self-organization, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 467–482 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/vm230306>
5. Neverova G. P., Abakumov A. I., Frisman E. Ya. Dynamic modes of exploited limited population: results of modeling and numerical study, *Matematicheskaya Biologiya i Bioinformatika*, 2016, vol. 11, issue 1, pp. 1–13 (in Russian). <https://doi.org/10.17537/2016.11.1>
6. Revutskaya O. L., Kulakov M. P., Frisman E. Ya. Influence of harvesting on the dynamics of predator–prey community with age-structure for prey, *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 823–844 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2021-13-4-823-844>
7. Budyanski A. V. Numerical study of the impact of directed migration of non-indigenous species on invasion scenarios, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 4, pp. 551–562 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/vm230401>
8. Frisman E. Ya., Kulakov M. P., Revutskaya O. L., Zhdanova O. L., Neverova G. P. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations, *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 119–151 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151>
9. Rodina L. I. Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 48–58 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm180105>

10. Rodina L. I., Hammadi A. H. Optimization problems for models of harvesting a renewable resource, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 250, issue 1, pp. 113–122.
<https://doi.org/10.1007/s10958-020-05003-9>
11. Egorova A. V. Optimization of discounted income for a structured population exposed to harvesting, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 15–25 (in Russian).
<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-133-15-25>
12. Woldeab M. S., Rodina L. I. About the methods of extracting a biological resource that provide the maximum average time benefit, *Russian Mathematics*, 2022, vol. 66, issue 1, pp. 8–18.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X22010078>
13. Rodina L. I., Kuznetsov M. S. Problems of maximizing income and average time profit from resource harvesting, taking into account maintenance costs, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2026, vol. 31, no. 153, pp. 61–72 (in Russian). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=89188156>

Received 08.06.2026

Accepted 10.08.2026

Maksim Sergeevich Kuznetsov, Senior Lecturer, Department of the Materials Science and Power Engineering, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8970-0825>

E-mail: maks.kuznetsoff@gmail.com

Lyudmila Ivanovna Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Functional Analysis and its Applications, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia; Professor, Department of Mathematics, National University of Science and Technology "MISIS", Leninskii pr., 4, Moscow, 119049, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

E-mail: LRodina67@mail.ru

Anastasia Vladimirovna Chernikova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics, National University of Science and Technology "MISIS", Leninskii pr., 4, Moscow, 119049, Russia;

Senior Lecturer, Department of Functional Analysis and its Applications, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3930-0743>

E-mail: nastik.e@bk.ru

Citation: M. S. Kuznetsov, L. I. Rodina, A. V. Chernikova. The problem of optimizing the income from collecting a renewable resource over a finite period of time, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 3, pp. 407–418.