

УДК 517.925.5

© А. А. Панеш

ОБЩИЕ СВОЙСТВА СИЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЧАСТОТНОЙ И НЕОРИЕНТИРОВАННОЙ ВРАЩАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В первой части работы изучены сильные показатели частотной и неориентированной вращаемости ненулевых решений линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами. На множестве ненулевых решений автономных систем установлено совпадение всех сильных показателей вращаемости. Полностью изучены спектры этих показателей и найдены их главные значения. Эти множества совпали с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы. Во второй части работы установлено отсутствие свойства остаточности у сильных показателей частотной и неориентированной вращаемости, рассматриваемых как функции на множестве решений линейных однородных четырехмерных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными на неотрицательной полуоси коэффициентами. Как следствие, получено некоторое решение такой системы, показатели вращаемости которой являются точными, но не абсолютными.

Ключевые слова: линейная система, дифференциальное уравнение, показатели колеблемости, показатели блуждаемости, показатели вращаемости, показатель Ляпунова.

DOI: [10.35634/vm260307](https://doi.org/10.35634/vm260307)

Введение

Тематика исследования данной работы находится на стыке двух направлений качественной теории дифференциальных уравнений — теории показателей Ляпунова и теории колеблемости. Изучаются ляпуновские показатели вращаемости решений линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными на неотрицательной полуоси коэффициентами, а именно, нижние и верхние сильные показатели частотной вращаемости; нижние и верхние сильные показатели неориентированной вращаемости. Перечисленные показатели решений были определены лишь в XXI веке [1, 2] и потому относительно мало изучены.

Основная цель работы заключается в полном описании сильных показателей вращаемости на множестве решений автономных дифференциальных систем и демонстрации отсутствия у этих показателей свойства остаточности на множестве нестационарных четырехмерных дифференциальных систем.

В данной работе были решены следующие задачи:

- установлены соотношения между показателями частотной и неориентированной вращаемости на множестве решений автономных дифференциальных систем;
- найдены спектры и главные значения показателей вращаемости автономных дифференциальных систем;
- построены два решения четырехмерных дифференциальных систем, совпадающие на некоторой полуоси, но имеющие разные показатели вращаемости.

Настоящая работа состоит из введения, пяти параграфов, заключения и списка литературы. Во введении описывается предмет исследования, формулируются цели и задачи. В первом параграфе даны предварительные понятия, во втором приводятся основные определения, в третьем параграфе — вспомогательные определения и утверждения. В четвертом параграфе полностью описаны сильные показатели вращаемости решений автономных

дифференциальных систем, а в пятом параграфе установлено отсутствие свойства остаточности у сильных показателей вращаемости на множестве решений четырехмерных дифференциальных систем. В заключении подведены итоги и указаны открытые задачи.

§ 1. Предварительные понятия

Для заданного натурального $n > 1$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей *непрерывной ограниченной* действительной матрицей $A(t)$. Подмножество множества $\mathcal{M}^n$, состоящее из *автономных* систем, обозначим через $\mathcal{C}^n$. Пространство решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}(A)$ и положим

$$\mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \mathcal{S}_*(A) \equiv \mathcal{S}(A) \setminus \{0\}, \quad \mathcal{S}^n = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

Определение 1.1 (см. [3]). Следом на единичной сфере вектор-функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$ за время от 0 до t назовём вектор-функцию

$$e(x, \tau) \equiv \frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}, \quad \tau \in [0, t],$$

а ее *вариацией* за время $t \in \mathbb{R}_+$ — величину

$$P(x, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(x, \tau) \right| d\tau.$$

Определение 1.2 (см. [1, 4]). Частотной вариацией вектор-функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ за время $t \in \mathbb{R}_+$ назовем величину

$$\Gamma(x, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(x, \tau) \right| d\tau + \pi \cdot \nu^*(x, t), \quad (1.1)$$

где через $\nu^*(x, t)$ обозначено число нулей функции x на промежутке $(0, t]$ в случае выполнения условия

$$|x(\tau)| + |\dot{x}(\tau)| > 0, \quad \tau \in [0, t], \quad (1.2)$$

а при нарушении условия (1.2) считаем $\nu^*(x, t) = +\infty$ и тем самым $\Gamma(x, t) = +\infty$.

Определение 1.3 (см. [2]). Определим *вариацию угла* вектор-функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ за время от 0 до t формулой:

$$\Omega(x, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(x, \tau) \right| d\tau, \quad (1.3)$$

где $\varphi(x, t)$ — угол между подвижной вектор-функцией $x(t)$ и начальным ее направлением $x(0)$ (с естественным начальным условием $\varphi(x, 0) = 0$), причем ситуацию, когда функция x имеет на отрезке $[0, t]$ хотя бы один нуль, считаем вырожденной и полагаем по определению $\Omega(x, t) = +\infty$.

Замечание 1.1 (см. [1]). Условие (1.2) гарантирует конечность $\nu^*(x, t)$ при любом $t > 0$, но не гарантирует конечности интегрального слагаемого в формуле (1.1).

Замечание 1.2 (см. [3]). Геометрический смысл вариации следа функции x — это полная длина пути на единичной сфере конца единичного вектора $e(x, \tau)$ при $\tau \in [0; t]$. Отсутствие у функции x нулей гарантирует, что вариация ее следа принимает только конечные значения, причем то же можно сказать и о функционале (1.3).

Замечание 1.3 (см. [1]). Частотная вариация следа представляет собой более тонкий функционал, чем обычная, так как позволяет функции x обнуляться в некоторых точках: в момент τ прохождения через свое нулевое значение (с ненулевой скоростью $\dot{x}(\tau)$) вектор $x(\tau)$ резко меняет направление на противоположное, что геометрически соответствует мгновенному совершению им полуоборота и потому вполне согласуется со скачкообразным увеличением частотной вариации именно на π .

Замечание 1.4. Для любой вектор-функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ выполнена оценка

$$\Gamma(x, t) \leq \Omega(x, t), \quad t > 0, \quad (1.4)$$

причем неравенство (1.4) становится строгим в момент обнуления функции $x(t)$ без обнуления ее производной $\dot{x}(t)$.

Определение 1.4. Для каждого функционала $H = \Gamma, \Omega$ при любых $0 \leq t_1 < t_2$ введем его значение на промежутке $(t_1, t_2]$

$$H(x, t_1, t_2) \equiv H(x, t_2) - H(x, t_1), \quad x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2).$$

§ 2. Основные определения

При $k = 1, 2, n$ обозначим через $\text{End}_k \mathbb{R}^n$ подмножество множества $\text{End } \mathbb{R}^n$, состоящее из линейных операторов ранга k , и заметим, в частности, что $\text{End}_n \mathbb{R}^n = \text{Aut } \mathbb{R}^n$.

Определение 2.1. Для каждой функции $x \in \mathcal{S}^n$ определим формулами соответственно нижние слабые и сильные показатели

1) (см. [4]) колеблемости гиперкорней

$$\check{\nu}_\circ^*(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{End}_1 \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t} \nu^*(Lx, t), \quad \check{\nu}_\bullet^*(x) \equiv \inf_{L \in \text{End}_1 \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^*(Lx, t);$$

2) (см. [3]) блуждаемости

$$\check{\rho}^\circ(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} P(Lx, t), \quad \check{\rho}^\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx, t);$$

3) (см. [1]) частотной вращаемости

$$\check{\gamma}^\circ(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \Gamma(Lx, t), \quad \check{\gamma}^\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Gamma(Lx, t);$$

4) (см. [5]) неориентированной вращаемости

$$\check{\omega}^\circ(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \Omega(Lx, t), \quad \check{\omega}^\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Omega(Lx, t).$$

Верхние слабый и сильный показатели колеблемости $\hat{\nu}_\circ^*(x)$, $\hat{\nu}_\bullet^*(x)$, блуждаемости $\hat{\rho}^\circ(x)$, $\hat{\rho}^\bullet(x)$, частотной вращаемости $\hat{\gamma}^\circ(x)$, $\hat{\gamma}^\bullet(x)$ и неориентированной вращаемости $\hat{\omega}^\circ(x)$, $\hat{\omega}^\bullet(x)$ зададим теми же формулами, но с заменой в них нижних пределов верхними.

Определение 2.2 (см. [6]). Для функции $x \in \mathcal{S}^n$ условимся о следующем:

- 1) если значение некоторого верхнего (с крышечкой) показателя совпадает со значением одноименного нижнего (с галочкой) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и без крышечки;
- 2) если значение некоторого слабого (с пустым кружочком) показателя совпадает со значением одноименного сильного (с полным кружочком) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без кружочков вообще.

Определение 2.3. Спектром показателя $\varkappa: \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ называется множество $\varkappa(\mathcal{S}_*(A))$, а его главные (см. [7, 8]) значения зададим формулами

$$\varkappa_i(A) \equiv \inf_{L \in \mathcal{G}^i(A)} \sup_{x \in L_*} \varkappa(x), \quad \varkappa_{\bar{i}}(A) \equiv \sup_{L \in \mathcal{G}^{n-i+1}(A)} \inf_{x \in L_*} \varkappa(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $L_* = L \setminus \{0\}$, а через $\mathcal{G}^i(A)$ обозначено множество i -мерных подпространств пространства $\mathcal{S}(A)$.

Определение 2.4 (см. [9]). Назовем функционал $\varkappa: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ *остаточным*, если для любых функций $x, y \in \mathcal{S}^n$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0 \in \mathbb{R}_+$ условию $x(t) = y(t)$, $t \geq t_0$, имеет место равенство $\varkappa(x) = \varkappa(y)$.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Для доказательства основных результатов нам понадобятся следующие определения и факты.

Лемма 3.1 (см. [6]). Для любой функции $x \in \mathcal{S}^n$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \check{\nu}_\circ^*(x) &= \check{\gamma}^\circ(x) = \check{\omega}^\circ(x) = \check{\rho}^\circ(x), & \hat{\nu}_\circ^*(x) &= \hat{\gamma}^\circ(x) = \hat{\omega}^\circ(x) = \hat{\rho}^\circ(x); \\ \check{\nu}_\bullet^*(x) &\leq \check{\gamma}^\bullet(x) \leq \check{\omega}^\bullet(x) \leq \check{\rho}^\bullet(x), & \hat{\gamma}^\bullet(x) &\leq \hat{\omega}^\bullet(x). \end{aligned}$$

Лемма 3.2 (см. [6]). Пусть нестрого возрастающая функция $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и неограниченно возрастающая последовательность чисел $t_p \in \mathbb{R}_+$ ($p \in \mathbb{N}$) удовлетворяют условиям

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{t_{p+1}}{t_p} = 1, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\psi(t_{p+1}) - \psi(t_p)}{t_{p+1} - t_p} \geq d, \quad \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\psi(t_{p+1}) - \psi(t_p)}{t_{p+1} - t_p} \leq D,$$

где значения $d, D \geq 0$ конечны или бесконечны. Тогда справедливы неравенства

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \psi(t) \geq d, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \psi(t) \leq D.$$

Лемма 3.3. Для любого показателя

$$\varkappa = \check{\nu}_\circ^*, \check{\nu}_\bullet^*, \check{\gamma}^\circ, \check{\gamma}^\bullet, \check{\omega}^\circ, \check{\omega}^\bullet, \check{\rho}^\circ, \check{\rho}^\bullet, \hat{\nu}_\circ^*, \hat{\nu}_\bullet^*, \hat{\gamma}^\circ, \hat{\gamma}^\bullet, \hat{\omega}^\circ, \hat{\omega}^\bullet, \hat{\rho}^\circ, \hat{\rho}^\bullet$$

и любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ справедливы соотношения

$$0 \leq \varkappa_{\bar{1}}(A) \leq \dots \leq \varkappa_{\bar{n}}(A), \quad 0 \leq \varkappa_{\underline{1}}(A) \leq \dots \leq \varkappa_{\underline{n}}(A), \quad (3.1)$$

$$\varkappa_{\bar{i}}(A) \leq \varkappa_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$\varkappa_{\underline{1}}(A) = \varkappa_{\bar{1}}(A) = \inf_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \varkappa(x), \quad \varkappa_{\underline{n}}(A) = \varkappa_{\bar{n}}(A) = \sup_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \varkappa(x). \quad (3.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость этого утверждения непосредственно следует из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы VI [8]. $\square$

Определение 3.1 (см. [10]). Под вещественным аналогом жордановой матрицы будем понимать клеточно-диагональную матрицу с клетками вида

$$J_{\lambda,s} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^s, \quad J_{\alpha,\beta,p} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^p,$$

где $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $s, j \in \mathbb{N}$, $p = 2j$; при этом клетки первого вида будем называть *одиночными*, а второго — *парными*.

§ 4. Сильные показатели частотной и неориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем

На множестве решений автономных дифференциальных систем полностью описаны все показатели колеблемости [3, 11–13], блуждаемости [3], ориентированной вращаемости [14] и скорости блуждания [3, 15, 16]. Из леммы 3.1 вытекает, что спектры и главные значения слабых показателей частотной и неориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем совпадают с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы. Спектры сильных показателей частотной и неориентированной вращаемости автономных дифференциальных систем изучены лишь частично: они содержат множество модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы [2, 5, 6]. В этом параграфе дается их полное описание на множестве решений автономных дифференциальных систем.

Теорема 4.1. Для любой системы $A \in \mathbb{C}^n$ справедливы равенства

$$\gamma^\bullet(x) = \omega^\bullet(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A) \quad (4.1)$$

$$\gamma^\bullet(\mathcal{S}_*(A)) = \{|\operatorname{Im} \lambda_1(A)|, \dots, |\operatorname{Im} \lambda_n(A)|\}, \quad (4.2)$$

$$\gamma_i^\bullet(A) = \gamma_i^\bullet(A) = |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

где $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$, — корни характеристического многочлена системы A , упорядоченные по неубыванию модулей их мнимых частей.

Доказательство. Показатели вращаемости инвариантны относительно выбора базиса в $\mathbb{R}^n$. Известно [10], что матрица $A \in \mathbb{C}^n$ подобна некоторому вещественному аналогу жордановой матрицы. Поэтому матрицу A изначально будем считать вещественным аналогом жордановой матрицы.

1. Сначала рассмотрим случай $n = 2$. Если $\lambda_1(A), \lambda_2(A) \in \mathbb{R}$, то для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и любого преобразования $L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^2$, выполнена оценка $\Omega(Lx, t) \leq \pi$, откуда $\dot{\omega}^\bullet(x) = 0$, а значит, в силу леммы 3.1 получим $\gamma^\bullet(x) = \omega^\bullet(x) = 0$ и $\omega_1^\bullet(A) = \omega_2^\bullet(A) = 0$.

В случае $\lambda_1(A), \lambda_2(A) \notin \mathbb{R}$ любое нетривиальное решение представимо в виде

$$x(t) = e^{\alpha t}(e_1 \cos \beta t + e_2 \sin \beta t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.4)$$

где векторы $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы. Заметим, что функция (4.4) удовлетворяет условиям

$$\angle(x(t_p), x(t_{p+1})) = \pi, \quad t_p = p\pi/\beta, \quad p \in \mathbb{N},$$

поэтому имеем

$$\frac{\Omega(x, t_p, t_{p+1})}{t_{p+1} - t_p} = \frac{\pi}{\pi/\beta} = \beta, \quad p \in \mathbb{N},$$

причем последнее свойство кривой x не нарушится под действием любого преобразования $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$. Следовательно, с учетом равенств (см. теорему 7 [3] и теорему 1 [17]) $\nu^*(x) = \rho(x) = \beta$, на основании леммы 3.1 имеем $\gamma^\bullet(x) = \omega^\bullet(x) = \beta$ и $\omega_1^\bullet(A) = \omega_2^\bullet(A) = \beta$.

В случае $n = 2$ справедливость равенств (4.1)–(4.3) установлена.

2. Пусть теперь $n > 2$. Построим фундаментальную матрицу $X(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, нормированную при $t = 0$, то есть $X(0) = E$, где E — единичная матрица. Для этого упорядочим корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического многочлена $|A - \lambda E| = 0$ матрицы системы $A \in \mathbb{C}^n$ по нестроному возрастанию модулей их мнимых частей, а в каждой группе собственных значений с равными модулями мнимых частей — еще и по нестроному возрастанию их действительных частей. Теперь построим действительную фундаментальную систему решений

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x^n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

системы $A \in \mathbb{C}^n$ по нескольким подсистемам, каждая из которых соответствует своей клетке матрицы A :

- а) каждой одиночной клетке J_{λ_k, s_k} порядка s_k , отвечающей собственному значению $\lambda_k \in \mathbb{R}$, поставим в соответствие подсистему из s_k решений

$$x^{l_k}(t) = e^{\lambda_k t} h_{l_k}, \dots, x^{l_k+s_k-1}(t) = \frac{t^{s_k-1}}{(s_k-1)!} e^{\lambda_k t} h_{l_k} + \dots + t e^{\lambda_k t} h_{l_k+s_k-2} + e^{\lambda_k t} h_{l_k+s_k-1},$$

где j -я компонента каждого вектора h_j из этой подсистемы равна единице, а все остальные равны нулю, $l_k = s_1 + s_2 + \dots + s_{k-1} + 1$, $s_0 = 0$;

- б) каждой парной клетке $J_{\alpha, \beta, p}$ порядка $p = 2s$, отвечающей собственным значениям $\alpha \pm i\beta$, соответствует подсистема решений $x^l, x^{l+1}, \dots, x^{l+2s-1}$ (l — на единицу больше суммы порядков всех предыдущих клеток)

$$\begin{pmatrix} x_{1,l} \\ \vdots \\ x_{l-1,l} \\ x_{l,l} \\ x_{l+1,l} \\ x_{l+2,l} \\ \vdots \\ x_{n,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\alpha t} \cos \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{1,l+1} \\ \vdots \\ x_{l-1,l+1} \\ x_{l,l+1} \\ x_{l+1,l+1} \\ x_{l+2,l+1} \\ \vdots \\ x_{n,l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \cos \beta t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,l+2} \\ \vdots \\ x_{l,l+2} \\ x_{l+1,l+2} \\ x_{l+2,l+2} \\ x_{l+3,l+2} \\ \vdots \\ x_{n,l+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ te^{\alpha t} \cos \beta t \\ -te^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \cos \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{1,l+3} \\ \vdots \\ x_{l,l+3} \\ x_{l+1,l+3} \\ x_{l+2,l+3} \\ x_{l+3,l+3} \\ \vdots \\ x_{n,l+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ te^{\alpha t} \sin \beta t \\ te^{\alpha t} \cos \beta t \\ e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \cos \beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,l+2s-2} \\ \vdots \\ x_{l,l+2s-2} \\ x_{l+1,l+2s-2} \\ \vdots \\ x_{l+2s-4,l+2s-2} \\ x_{l+2s-3,l+2s-2} \\ x_{l+2s-2,l+2s-2} \\ x_{l+2s-1,l+2s-2} \\ \vdots \\ x_{n,l+2s-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{\alpha t} \cos \beta t \\ -\frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{\alpha t} \sin \beta t \\ \vdots \\ te^{\alpha t} \cos \beta t \\ -te^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \cos \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{1,l+2s-1} \\ \vdots \\ x_{l,l+2s-1} \\ x_{l+1,l+2s-1} \\ \vdots \\ x_{l+2s-4,l+2s-1} \\ x_{l+2s-3,l+2s-1} \\ x_{l+2s-2,l+2s-1} \\ x_{l+2s-1,l+2s-1} \\ \vdots \\ x_{n,l+2s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{\alpha t} \sin \beta t \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{\alpha t} \cos \beta t \\ \vdots \\ te^{\alpha t} \sin \beta t \\ te^{\alpha t} \cos \beta t \\ e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \cos \beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

в) собрав решения всех таких подсистем, получим общую упорядоченную фундаментальную систему решений (4.5) и соответственно общее решение системы A

$$x = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \dots + c_n x^n(t), \quad (4.6)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

3. Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$0 = |\operatorname{Im} \lambda_1| = |\operatorname{Im} \lambda_2| = \dots = |\operatorname{Im} \lambda_{s'}| < |\operatorname{Im} \lambda_{s'+1}| \leq \dots \leq |\operatorname{Im} \lambda_n|, \quad 0 \leq s' \leq n$$

(если $s' = 0$, то отсутствуют действительные собственные значения, а если $s' = n$, то все собственные значения действительны).

- а) Для каждого решения x^i , $i = \overline{1, s'}$, и любого преобразования $L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$ имеем $\Omega(Lx^i, t) \leq \pi$, $t > 0$, а значит, будут справедливы равенства $\gamma^\bullet(x^i) = \omega^\bullet(x^i) = 0$.
- б) Для каждого решения x^i , $i \in \{s' + 1, s' + 2, \dots, n\}$, найдется такое преобразование $L^i \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$, что имеет место представление

$$L^i x^i(t) = e^{\operatorname{Re} \lambda_i t} (u_1^i \cos(|\operatorname{Im} \lambda_i| t) + u_2^i \sin(|\operatorname{Im} \lambda_i| t)), \quad u_1^i, u_2^i \in \mathbb{R}_*^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

поэтому на основании леммы 3.2 для последовательности

$$t_p^i = \frac{(p-1)\pi}{|\operatorname{Im} \lambda_i|}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad i = s' + 1, s' + 2, \dots, n,$$

будем иметь

$$\omega^\bullet(x^i) \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_p^i} \Omega(L^i x^i, t_p^i) = \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^p \Omega(L^i x^i, t_{k-1}^i, t_k^i)}{t_p^i} = \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{p\pi}{t_p^i} = |\operatorname{Im} \lambda_i|.$$

Следовательно, на основании леммы 3.1 с учетом теоремы 7 [3] и теоремы 1 [17] получим следующие две цепочки соотношений

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \lambda_i| &= \check{\nu}^{\bullet}(x^i) \leq \check{\gamma}^{\bullet}(x^i) \leq \check{\omega}^{\bullet}(x^i) \leq \check{\rho}^{\bullet}(x^i) = |\operatorname{Im} \lambda_i|, \\ |\operatorname{Im} \lambda_i| &\leq \check{\gamma}^{\bullet}(x^i) \leq \hat{\gamma}^{\bullet}(x^i) \leq \hat{\omega}^{\bullet}(x^i) \leq |\operatorname{Im} \lambda_i|, \end{aligned}$$

из которых вытекают равенства $\gamma^{\bullet}(x) = \omega^{\bullet}(x) = |\operatorname{Im} \lambda_i|$.

4. Возьмем произвольное решение системы $A \in \mathcal{C}^n$:

$$x = c_q x^q(t) + c_l x^l(t) + \dots + c_r x^r(t), \quad c_q \cdot c_l \neq 0, \quad 1 \leq q < q+1 \leq l \leq r \leq n. \quad (4.7)$$

а) Если выполняются условия $0 < |\operatorname{Im} \lambda_q| \leq |\operatorname{Im} \lambda_l|$, то из доказательств теоремы 7 [3] и теоремы 1 [17] вытекает равенство $\nu^*(x) = |\operatorname{Im} \lambda_q|$. С другой стороны, найдется преобразование $L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$, обладающее свойствами

$$\begin{aligned} Lx(t) &= e^{\operatorname{Re} \lambda_q t} (u_1 \cos(|\operatorname{Im} \lambda_q|t) + u_2 \sin(|\operatorname{Im} \lambda_q|t)), \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}_*^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \angle(Lx(t_p^q), Lx(t_{p+1}^q)) &= \pi, \quad t_p^q = p\pi/|\operatorname{Im} \lambda_q|, \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Поэтому в силу леммы 3.2 получим оценку $\hat{\omega}^{\bullet}(x) \leq |\operatorname{Im} \lambda_q|$, из которой вытекает (см. лемму 3.1) цепочка равенств $\gamma^{\bullet}(x) = \omega^{\bullet}(x) = |\operatorname{Im} \lambda_q|$.

б) Если выполняются условия $0 = |\operatorname{Im} \lambda_q| < |\operatorname{Im} \lambda_l|$, $\lambda_q > \operatorname{Re} \lambda_l$, то найдется такое преобразование $L_a \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$, для которого справедливо представление

$$L_a x = (e^{\lambda_q t}, a e^{\operatorname{Re} \lambda_l t} \sin(|\operatorname{Im} \lambda_l|t), 0, \dots, 0)^T, \quad a > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Поэтому для последовательности

$$\tau_p = \frac{\pi/2 + p\pi}{|\operatorname{Im} \lambda_l|}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (4.8)$$

будем иметь

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\Omega(L_a x, \tau_p, \tau_{p+1})}{\tau_{p+1} - \tau_p} = \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{|\arctg(a e^{(\operatorname{Re} \lambda_l - \lambda_q)\tau_{p+1}}) - \arctg(a e^{(\operatorname{Re} \lambda_l - \lambda_q)\tau_p})|}{\pi/|\operatorname{Im} \lambda_l|} = 0.$$

Следовательно, в силу леммы 3.2 приходим к оценке $\hat{\omega}^{\bullet}(x) \leq 0$, из которой вытекает $\gamma^{\bullet}(x) = \omega^{\bullet}(x) = 0$.

в) Если выполняются условия $0 = |\operatorname{Im} \lambda_q| < |\operatorname{Im} \lambda_l|$, $\lambda_q = \operatorname{Re} \lambda_l$, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется преобразование $L_\varepsilon \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям

$$L_\varepsilon x = (e^{\lambda_q t}, \varepsilon e^{\lambda_q t} \sin(|\operatorname{Im} \lambda_l|t), 0, \dots, 0)^T, \quad \Omega(L_\varepsilon x, \tau_p, \tau_{p+1}) \leq 2 \arctg \varepsilon, \quad p \in \mathbb{N},$$

а значит, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, и в этом случае получим $\gamma^{\bullet}(x) = \omega^{\bullet}(x) = 0$.

г) Пусть выполняется условие $|\operatorname{Im} \lambda_q| = |\operatorname{Im} \lambda_l| = 0$. Если собственные значения λ_q и λ_l не равны или равны, но им соответствуют разные жордановы клетки, то найдется такое преобразование $L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$, что $Lx = (e^{\lambda_q t}, e^{\lambda_l t}, 0, \dots, 0)^T$. Если собственным значениям $\lambda_q = \lambda_l$ соответствует одна жорданова клетка, то найдется такое $L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$, что $Lx = (dte^{\lambda_q t}, e^{\lambda_q t}, 0, \dots, 0)^T$, $d \neq 0$.

- д) Пусть в случае $0 = |\operatorname{Im} \lambda_q| < |\operatorname{Im} \lambda_l|$, $\lambda_q < \operatorname{Re} \lambda_i$, где $i \neq q$ и i пробегает все значения (кроме $i = q$) нижних индексов ненулевых коэффициентов в (4.7), и решение x содержит хотя бы одну нулевую компоненту. Тогда найдется такое $L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$, что $Lx = (e^{\lambda_q t}, 0, \dots, 0)^T$.

Для каждого из рассмотренных случаев в пунктах 4, г) и 4, д) настоящего доказательства выполнена оценка $|\varphi(Lx, t)| \leq \pi$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$, поэтому $\gamma^\bullet(x) = \omega^\bullet(x) = 0$.

- е) Пусть теперь $0 = |\operatorname{Im} \lambda_q| < |\operatorname{Im} \lambda_l|$, $\lambda_q < \operatorname{Re} \lambda_i$, где $i \neq q$ и i принимает все значения (кроме $i = q$) нижних индексов ненулевых коэффициентов в (4.7), и решение x не содержит ни одной нулевой компоненты.

Если некоторому собственному значению матрицы системы соответствует более одной жордановой клетки, то найдется $L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$, что $Lx = (e^{\lambda_q t}, 0, \dots, 0)^T$, а значит, выполнены равенства $\gamma^\bullet(x) = \omega^\bullet(x) = 0$.

Если каждому собственному значению матрицы системы соответствует ровно одна жорданова клетка, то компоненты решения (4.7) представляют собой линейно независимые скалярные функции. Поэтому ни при каком $L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$ невозможно представление $Lx = (e^{\lambda_q t}, 0, \dots, 0)^T$. Более того, невозможно получить для некоторой равномерно малой на положительной полуоси скалярной функции $\eta(t)$ представление $Lx = (e^{\lambda_q t}, \eta(t), \dots, 0)^T$ в силу неравенств $\lambda_q < \operatorname{Re} \lambda_i$. Следовательно, для любого преобразования $L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$ справедлива двусторонняя оценка

$$|\operatorname{Im} \lambda_l| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Gamma(Lx, t) \leq |\operatorname{Im} \lambda_n|.$$

Отсюда, с учетом существования $L_1 \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию

$$L_1 x(t) = e^{\operatorname{Re} \lambda_l t} (\xi_1 \cos(|\operatorname{Im} \lambda_l| t) + \xi_2 \sin(|\operatorname{Im} \lambda_l| t)), \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}_*^n, \quad (4.9)$$

будем иметь

$$\tilde{\gamma}^\bullet(x) = \inf_{L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Gamma(Lx, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Gamma(L_1 x, t) = |\operatorname{Im} \lambda_l|. \quad (4.10)$$

Далее, из представления (4.9) с помощью последовательности (4.8) выводим

$$\hat{\omega}^\bullet(x) \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau_p} \Omega(L_1 x, \tau_p) = |\operatorname{Im} \lambda_l|. \quad (4.11)$$

Итак, из соотношений (4.10) и (4.11) с учетом леммы 3.1 получим

$$|\operatorname{Im} \lambda_l| \leq \tilde{\gamma}^\bullet(x) \leq \check{\omega}^\bullet(x) \leq \hat{\omega}^\bullet(x) \leq |\operatorname{Im} \lambda_l|, \quad |\operatorname{Im} \lambda_l| \leq \tilde{\gamma}^\bullet(x) \leq \hat{\gamma}^\bullet(x) \leq \hat{\omega}^\bullet(x) \leq |\operatorname{Im} \lambda_l|.$$

Таким образом, пришли к равенствам $\gamma^\bullet(x) = \omega^\bullet(x) = |\operatorname{Im} \lambda_l|$ и тем самым завершили доказательство равенств (4.1) и (4.2).

5. Сначала с помощью формул (3.3) найдем крайние значения сильных показателей частотной вращения

$$\gamma_{\underline{1}}^\bullet(A) = \gamma_{\overline{1}}^\bullet(A) = \inf_{x \in S_*(A)} \gamma^\bullet(x) = |\operatorname{Im} \lambda_1|, \quad \gamma_{\underline{n}}^\bullet(A) = \gamma_{\overline{n}}^\bullet(A) = \sup_{x \in S_*(A)} \gamma^\bullet(x) = |\operatorname{Im} \lambda_n|.$$

Теперь для выбранного числа $i \in \{2, \dots, n-1\}$ возьмем произвольное решение (4.6) с коэффициентами $c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_i \neq 0$ и $c_{i+1} = c_{n-1} = c_n = 0$. Тогда в силу рассуждений,

проведенных в пп. 1, 3, 4 настоящего доказательства, будем иметь $\gamma^\bullet(x) \leq |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|$, откуда из определения главных значений показателей системы вытекает

$$\gamma_i^\bullet(A) \leq |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|. \quad (4.12)$$

Далее для любого номера $i \in \{2, \dots, n-1\}$ возьмем произвольное решение (4.6) с коэффициентами $c_1 = c_2 = \dots = c_{i-1} = 0$ и $c_i \cdot \dots \cdot c_{n-1} \cdot c_n \neq 0$. Аналогично из рассуждений, проведенных в предыдущих пунктах, вытекает неравенство $\gamma^\bullet(x) \geq |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|$, гарантирующее оценку

$$\gamma_i^\bullet(A) \geq |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|. \quad (4.13)$$

Следовательно, из неравенств (4.12) и (4.13) на основании свойств (3.1) и (3.2) главных значений получим цепочку

$$|\operatorname{Im} \lambda_i(A)| \leq \gamma_i^\bullet(A) \leq \gamma_i^\bullet(A) \leq |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|,$$

все неравенства которой обращаются в равенства.

Таким образом, установили справедливость равенств (4.3). $\square$

§ 5. Отсутствие свойства остаточности у сильных показателей вращаемости

Для вычисления значений неостаточного (то есть неинвариантного относительно изменения решения на промежутке конечной длины) функционала $\varkappa: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ учитывается поведение решений на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ (см. [18, 19]), а для остаточных функционалов достаточно знать поведение решений при больших значениях аргумента.

На множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений все характеристические частоты являются остаточными [8]. Из результатов работ [3, 4] вытекает, что слабые показатели колеблемости, показатели блуждаемости, скорости блуждания на множестве $\mathcal{S}^n$ являются остаточными. Вообще интуитивно ожидалось, что все показатели колеблемости, блуждаемости и вращаемости будут остаточными, но однако сильные показатели колеблемости не обладали этим свойством [20–22]. Оказалось, что сильные показатели частотной и неориентированной вращаемости уже на множестве $\mathcal{S}^4$ не обладают этим свойством.

Теорема 5.1. *Каждый из функционалов*

$$\check{\gamma}^\bullet, \check{\omega}^\bullet, \hat{\gamma}^\bullet, \hat{\omega}^\bullet: \mathcal{S}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$$

не является остаточным.

Доказательство.

1. Выберем автономную систему $A \in \mathcal{C}^4$ с фундаментальной матрицей

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 0 & 0 & -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Заметим, что решение $x(t) = (\sin t, \cos t, e^t \cos 2t, -e^t \sin 2t)^\top$ удовлетворяет (см. доказательство теоремы 1 [13]) равенству $\nu^*(x) = 1$, а его проекция $u = L_{1,2}x = (\sin t, \cos t, 0, 0)^\top$

на ориентированную плоскость первых двух базисных векторов обладает следующими свойствами:

$$|\dot{e}_u(t)| = 1, \quad \nu^*(u, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Поэтому на основании леммы 3.1 справедлива цепочка соотношений

$$1 = \check{\gamma}^\circ(x) \leq \check{\gamma}^\bullet(x) \leq \hat{\gamma}^\bullet(x) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Gamma(L_{1,2}x, t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t d\tau = 1,$$

из которой с учетом (4.1) получим равенства

$$\check{\gamma}^\bullet(x) = \hat{\gamma}^\bullet(x) = \check{\omega}^\bullet(x) = \hat{\omega}^\bullet(x) = 1.$$

2. Для проекции $v = L_{3,4}x = (0, 0, e^t \cos 2t, -e^t \sin 2t)^\top$ выбранного решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ на ориентированную плоскость последних двух базисных векторов получим равенства

$$\hat{\omega}^\bullet(x) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Omega(L_{3,4}x, t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t 2 d\tau = 2. \quad (5.1)$$

3. Рассмотрим функцию

$$f(t) \equiv \begin{cases} \frac{t \cdot \cos(\pi \ln t)}{\ln t}, & t \in (0, 1/e]; \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

и оценим ее производную

$$\dot{f}(t) = \frac{\cos(\pi \ln t)}{\ln t} - \frac{\pi \sin(\pi \ln t)}{\ln t} - \frac{\cos(\pi \ln t)}{\ln^2 t} \in [-\pi - 2, \pi + 2], \quad t \in (0, 1/e],$$

а из условия $f(t) = o(t)$ при $t \rightarrow 0$ найдем $\dot{f}(0) = 0$.

Возьмем монотонную функцию $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, обладающую свойствами

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/e, \\ 1, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Теперь выберем систему $B \in \mathcal{M}^4$ с фундаментальной матрицей

$$\begin{aligned} B(t) &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{f}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & f(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1/e]; \\ B(t) &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \theta(t) & 1 - \theta(t) & 0 \\ -\theta(t) & 0 & 2 - 2\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & \theta(t) & 2\theta(t) \\ 0 & 0 & -2\theta(t) & \theta(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [1/e; \pi]; \\ B(t) &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 0 & 0 & -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix}, \quad t \geq \pi. \end{aligned}$$

На отрезке $[0, 1/e]$ проекция $L_{1,2}y \equiv (t, f(t) + 1, 0, 0)^T$ решения $y(t) = (t, f(t) + 1, 1, 0)^T$ на ориентированную плоскость первых двух базисных векторов образует с первым из них в моменты $t_k = e^{-k} \rightarrow +0$ при $\mathbb{N} \ni k \rightarrow +\infty$ следующие знакочередующиеся углы

$$\varphi_k \equiv \operatorname{arctg}\left(\frac{f(t_k)}{t_k} + \frac{1}{t_k}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t_k \cdot \cos(-\pi k)}{-k \cdot t_k} + e^k\right) = \operatorname{arctg}\left(e^k - \frac{(-1)^k}{k}\right).$$

Очевидно, что найдется такой номер k_0 , начиная с которого выполняется оценка $\varphi_k \geq 1$, $k \geq k_0$. Поэтому, учитывая неравенство (1.4), будем иметь

$$\Omega(L_{1,2}y, t_k) \geq \Gamma(L_{1,2}y, t_k) = \sum_{i=k}^{+\infty} (\Gamma(L_{1,2}y, t_i) - \Gamma(L_{1,2}y, t_{i+1})) \geq \sum_{i=k}^{+\infty} (|\varphi_i| + |\varphi_{i+1}|) = +\infty.$$

Последнее соотношение означает, что инфимум в определениях сильных показателей частотной вращаемости и неориентированной вращаемости не реализуется на $L_{1,2}$.

4. На промежутке $[\pi, +\infty)$ проекция Ly выбранного решения $y \in \mathcal{S}_*(B)$ на любую плоскость, отличную от первых двух базисных векторов, удовлетворяет равенству

$$e^{-t}Ly(t) = \zeta_1 \cos 2t + \zeta_2 \sin 2t + \zeta_3 e^{-t} \cos t + \zeta_4 e^{-t} \sin t, \quad \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4 \in \mathbb{R}^4.$$

Следовательно, рассуждения, проведенные в п. 4, д) доказательства теоремы 5.1, приводят к оценке $\tilde{\gamma}^\bullet(y) \geq 2$, а значит, в силу (5.1) получим $\gamma^\bullet(y) = \omega^\bullet(y) = 2$.

Итак, два решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и $y \in \mathcal{S}_*(B)$, совпадающие на полуоси $[\pi, +\infty)$ имеют различные сильные показатели вращаемости. $\square$

Следствие 5.1. Существует функция $x \in \mathcal{S}^4$, удовлетворяющая неравенству

$$\gamma^\circ(x) = \omega^\circ(x) < \gamma^\bullet(x) = \omega^\bullet(x).$$

Доказательство. Обратимся к доказательству теоремы 5.1. Скалярное произведение решения $y \in \mathcal{S}_*(B)$ и вектора $m = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}_*^4$ на полуоси $[\pi, +\infty)$ представим виде

$$\langle y(t), m \rangle = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \sin(t - t_m) + m_3 e^t \cos 2t - m_4 e^t \sin 2t.$$

Из доказательства теоремы IV работы [8] вытекает, что для любого уравнения с постоянными коэффициентами характеристическая частота строгих знаков у любого ненулевого его решения не меньше, чем наименьший из модулей мнимых частей корней его характеристического многочлена. Поэтому на основании (см. теорему 2 [4]) оценки

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^4} \nu^*(\langle y, m \rangle, \pi) = \lim_{m \rightarrow m'} \nu^*(\langle y, m \rangle, \pi) < +\infty,$$

получим равенство

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^4} \nu^*(\langle y, m \rangle, t) = \lim_{m \rightarrow m'} \nu^*(\langle y, m \rangle, t), \quad m' = (1, 1, 0, 0), \quad t > \pi.$$

Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} \nu_\circ^*(y) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \operatorname{End}_1 \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t} \nu^*(Lx, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^4} \frac{\pi}{t} \nu^*(\langle y, m \rangle, t) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow m'} \nu^*(\langle y, m \rangle, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \left[\frac{t - t_m}{\pi} \right] = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, для выбранного решения

$$\gamma^\circ(y) = \omega^\circ(y) = \nu_\circ^*(y) = 1 < 2 = \gamma^\bullet(y) = \omega^\bullet(y).$$

$\square$

Заключение

В настоящей работе полностью описаны сильные показатели частотной и неориентированной вращаемости на множестве решений автономных дифференциальных систем и установлено отсутствие свойства остаточности у этих показателей на множестве решений четырехмерных неавтономных дифференциальных систем. Интересным остается вопрос о справедливости этих свойств для обобщенных показателей колеблемости (в [1] они названы показателями поворачиваемости k -го ранга).

Автор выражает благодарность доценту А. Х. Сташу за постановку задач и внимание к работе.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 075-03-2026-395).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев И. Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. <https://doi.org/10.1134/S0374064114100082>
2. Сергеев И. Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183. <https://www.mathnet.ru/rus/imi318>
3. Сергеев И. Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 149–172. <https://doi.org/10.4213/im5035>
4. Сергеев И. Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. <https://doi.org/10.4213/sm7928>
5. Сергеев И. Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математические заметки. 2016. Т. 99. Вып. 5. С. 732–751. <https://doi.org/10.4213/mzm10555>
6. Сергеев И. Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. <https://www.mathnet.ru/rus/tsp95>
7. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 8. С. 1408–1416. <https://www.mathnet.ru/rus/de4052>
8. Сергеев И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. <https://www.mathnet.ru/rus/tsp65>
9. Сергеев И. Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.
10. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007. <https://elibrary.ru/item.asp?id=20246135>
11. Сташ А. Х. Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1418–1422. <https://doi.org/10.1134/S0374064114100203>
12. Бурлаков Д. С., Цой С. В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93. <https://www.mathnet.ru/rus/tsp71>
13. Сташ А. Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 558–568. <https://doi.org/10.20537/vm190407>

14. Сташ А. Х. Показатели ориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24. № 3. С. 120–132. <https://doi.org/10.46698/a8125-0078-5238-y>
15. Бурлаков Д. С. Спектр скоростей блуждания неортогонального произведения двух поворотов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2015. № 2. С. 49–53. <https://www.mathnet.ru/rus/vmumm224>
16. Сташ А. Х., Панеш А. А. О скорости блуждания решений линейных автономных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61. № 10. С. 1316–1325. <https://doi.org/10.7868/S3034503025100023>
17. Stash A. Kh. On the properties of oscillation indices of solutions to differential systems // Differential Equations. 2025. Vol. 61. No. 6. P. 769–824. <https://doi.org/10.1134/S0012266125060023>
18. Сташ А. Х. Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2017. № 2. С. 65–68. <https://www.mathnet.ru/rus/vmumm61>
19. Сташ А. Х. Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2019. № 5. С. 48–51. <https://elibrary.ru/item.asp?id=40809084>
20. Сташ А. Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 59–69. <https://doi.org/10.35634/vm210105>
21. Сташ А. Х., Лобода Н. А. К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23. Вып. 3. С. 348–356. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356>
22. Сташ А. Х. О некоторых свойствах сильных показателей колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений // Владикавказский математический журнал. 2024. Т. 26. № 2. С. 122–132. <https://doi.org/10.46698/x2543-2938-8548-c>

Поступила в редакцию 15.03.2026

Принята к публикации 26.07.2026

Панеш Асхад Асланович, научный сотрудник, лаборатория дифференциальных уравнений и алгоритмической оптимизации, Адыгейский государственный университет, 385000, Россия, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-0885-5664>

E-mail: askhadr@mail.ru

Цитирование: А. А. Панеш. Общие свойства сильных показателей частотной и неориентированной вращаемости решений линейных дифференциальных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 3. С. 458–473.

A. A. Panesh

General properties of strong exponents of frequency and non-oriented rotation of solutions of linear differential systems

Keywords: linear system, differential equation, oscillation exponents, wandering exponents, rotation exponents, Lyapunov exponent.

MSC2020: 34C10, 34D05

DOI: [10.35634/vm260307](https://doi.org/10.35634/vm260307)

In the first part of this paper, we study strong exponents of frequency and non-oriented rotation of non-zero solutions of linear homogeneous differential systems with constant coefficients. On the set of non-zero solutions of autonomous systems, we establish the coincidence of all strong rotation exponents. The spectra of these exponents are fully studied, and their principal values are found. These sets coincide with the set of absolute values of the imaginary parts of the eigenvalues of the system matrix. In the second part of this paper, we establish the absence of the residual property for strong exponents of frequency and non-oriented rotation, considered as functions on the set of solutions of linear homogeneous four-dimensional differential systems with continuous coefficients bounded on the non-negative semi-axis. As a consequence, we obtain a solution of this system, whose rotation exponents are exact but not absolute.

Funding. This work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 075-03-2026-395).

REFERENCES

1. Sergeev I. N. Turnability characteristics of solutions of differential systems, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1342–1351. <https://doi.org/10.1134/S0012266114100085>
2. Sergeev I. N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 171–183 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/iimi318>
3. Sergeev I. N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential system, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, issue 1, pp. 139–162. <https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002578>
4. Sergeev I. N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, issue 1, pp. 114–132. <https://doi.org/10.1070/SM2013v204n01ABEH004293>
5. Sergeev I. N. Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, issue 5, pp. 729–746. <https://doi.org/10.1134/S0001434616050114>
6. Sergeev I. N. Lyapunov characteristics of oscillation, rotation, and wandering of solutions of differential systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 234, issue 4, pp. 497–522. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4025-4>
7. Millionshchikov V. M. Baire function classes and Lyapunov indices. I, *Differential Equations*, 1981, vol. 16, pp. 902–907. <https://zbmath.org/0487.34046>
8. Sergeev I. N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, issue 1, pp. 2764–2793. <https://doi.org/10.1007/s10958-006-0142-6>
9. Sergeev I. N. A contribution to the theory of Lyapunov exponents for linear systems of differential equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 1986, vol. 33, issue 6, pp. 1245–1292. <https://doi.org/10.1007/BF01084752>

10. Tyrtysnikov E.E. *Matrichnyi analiz i lineinaya algebra* (Matrix analysis and linear algebra), Moscow: Fizmatlit, 2007. <https://elibrary.ru/item.asp?id=20246135>
11. Stash A.Kh. Properties of complete and vector sign frequencies of solutions of linear autonomous differential equations, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1413–1417. <https://doi.org/10.1134/S0012266114100206>
12. Burlakov D.S., Tsoii S.V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, issue 2, pp. 155–167. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2554-7>
13. Stash A.Kh. Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 558–568 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm190407>
14. Stash A.Kh. Oriented rotatability exponents of solution to homogeneous autonomous linear differential systems, *Siberian Mathematical Journal*, 2024, vol. 65, issue 1, pp. 234–244. <https://doi.org/10.1134/S003744662401018X>
15. Burlakov D.S. Spectrum of wandering rates of a nonorthogonal product of two rotations, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2015, vol. 70, issue 2, pp. 88–91. <https://doi.org/10.3103/S0027132215020072>
16. Stash A.Kh., Panesh A.A. On the wandering velocity of solutions to linear autonomous differential systems, *Differential Equations*, 2025, vol. 61, no. 10, pp. 1506–1514. <https://doi.org/10.1134/S0012266125100027>
17. Stash A.Kh. On the properties of oscillation indices of solutions to differential systems, *Differential Equations*, 2025, vol. 61, no. 6, pp. 769–824. <https://doi.org/10.1134/S0012266125060023>
18. Stash A.Kh. The absence of residual property for total hyper-frequencies of solutions to third order differential equations, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2017, vol. 72, issue 2, pp. 81–83. <https://doi.org/10.3103/S0027132217020085>
19. Stash A.Kh. Some properties of oscillation indicators of solutions to a two-dimensional system, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, issue 5, pp. 202–204. <https://doi.org/10.3103/S0027132219050061>
20. Stash A.Kh. The absence of residual property for strong exponents of oscillation of linear systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 59–69 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/vm210105>
21. Stash A.Kh., Loboda N.A. On the question of residual of strong exponents of oscillation on the set of solutions of third-order differential equations, *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Novaya Seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2023, vol. 23, issue 3, pp. 348–356 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356>
22. Stash A.Kh. On some properties of strong oscillation exponents of solutions to homogeneous linear differential equations, *Siberian Mathematical Journal*, 2024, vol. 65, issue 6, pp. 1475–1482. <https://doi.org/10.1134/S0037446624060235>

Received 15.03.2026

Accepted 26.07.2026

Askhad Aslanovich Panesh, Researcher, Laboratory of Differential Equations and Algorithmic Optimization, Adyghe State University, ul. Pervomaiskaya, 208, Maikop, 385000, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-0885-5664>

E-mail: askhadr@mail.ru

Citation: A.A. Panesh. General properties of strong exponents of frequency and non-oriented rotation of solutions of linear differential systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 3, pp. 458–473.