

УДК 517.925.5

© И. Н. Сергеев

ШАРОВЫЕ И РАДИАЛЬНЫЕ, СИЛЬНЫЕ И СЛАБЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для произвольной дифференциальной системы первого порядка с нулевым решением рассматриваются ее различные осцилляционные свойства: блуждаемость, колеблемость, вращаемость и неблуждаемость, неколеблемость, невращаемость. Изучаются стандартные шаровые и сильные их варианты, а также радиальные и слабые их разновидности. Для этих свойств не только приведены ранее известные факты, но и получены некоторые новые результаты, описывающие их многочисленные логические взаимосвязи, а также примеры, демонстрирующие отсутствие конкретных других связей между ними.

Ключевые слова: дифференциальная система, осцилляционные свойства, шаровые и радиальные свойства, сильные и слабые свойства, блуждаемость, колеблемость, вращаемость.

DOI: [10.35634/vm260308](https://doi.org/10.35634/vm260308)

Введение

В исследовании качественной динамической картины, порождаемой дифференциальной системой или дифференциальным уравнением, важнейшую роль играют не только стабильностные свойства *устойчивости* и *неустойчивости*, связанные с показателями Ляпунова и Перрона ее решений, начинающихся близко к нулю [1, 2], но и различные их осцилляционные свойства: *блуждаемость*, *колеблемость*, *вращаемость*, а также *неблуждаемость*, *неколеблемость*, *невращаемость* [3–10]. Эти свойства решений, описываемые разнообразными числовыми характеристиками, вызвали значительный исследовательский интерес у многих авторов: см., например, работы [11–19].

Стабильностным свойствам дифференциальной системы [1, 2] естественным образом соответствуют их осцилляционные аналоги [20–23]: *шаровые* (или, что то же, *полные*, действующие для всех начинающихся достаточно близко к нулю решений), а также *сильные* (справедливые сразу при всех достаточно поздних моментах времени). В настоящей работе рассматриваются еще и некоторые ослабленные их разновидности, а именно: не только шаровые, но и *радиальные* (для решений, начинающихся в заданном направлении от нуля), а также не только *сильные*, но и *слабые* (верные при отдельных сколь угодно поздних моментах) осцилляционные свойства дифференциальной системы (см. ниже определения 1.1–1.3). Изучаются эти понятия и многочисленные взаимосвязи между ними (см. ниже теоремы 2.1–2.7), а также приводятся отдельные примеры дифференциальных систем, подтверждающие отсутствие конкретных логических связей между рассматриваемыми свойствами (теоремы 2.8–2.12).

§ 1. Основные понятия

Для *временного* луча $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ и заданной *фазовой* области $G \subset \mathbb{R}^n$ евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $0 \in G$, рассмотрим дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G, \mathbb{R}^n), \quad (1.1)$$

с *нулевым* решением $x(\cdot) = 0$, определенным на всем луче $\mathbb{R}_+$. Будем обозначать через $x_f(\cdot, x_0)$ *непродолжаемое* решение системы (1.1) с начальным значением $x_f(0, x_0) = x_0$,

определенное однозначно в силу гладкости правой части системы. Также будем допускать (см. теорему 2.12 ниже) *ослабленную гладкость* в нуле, состоящую лишь в локальной липшицевости правой части системы (1.1) по x (что, тем не менее, обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши). Кроме того, введем обозначения

$$\mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad G_* \equiv G \setminus \{0\}, \quad \mathbb{B}_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}_*^n \mid |x_0| \leq \delta\}, \quad \mathbb{S}_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid |x_0| = \delta\}.$$

Прежде всего, дадим определения разнообразных осцилляционных функционалов и свойств системы (1.1), восходящих к работе [8].

Определение 1.1. Для отрезка $X \equiv [0, t] \subset \mathbb{R}_+$ ($t > 0$) и произвольной непрерывно дифференцируемой вектор-функции $v: X \rightarrow \mathbb{R}_*^n$ определим значения $\Phi_{\varkappa}(t, v)$ следующих осцилляционных функционалов при ассоциированном индексе $\varkappa = \rho, \nu, \theta$ (если функция v определена не на всем отрезке X , то считаем значение $\Phi_{\varkappa}(t, v)$ неопределенным):

(1) функционал *блуждаемости*

$$\Phi_\rho(t, v) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} P(t, Lv), \quad P(t, v) \equiv \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \frac{v(\tau)}{|v(\tau)|} \right| d\tau,$$

равный минимизированному (здесь и ниже — по L) среднему от вариации следа $P(t, Lv)$ функции Lv на единичной сфере $\mathbb{S}_1$ за время t ;

(2) функционал *колеблемости*

$$\Phi_\nu(t, v) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t} N(t, P_1 Lv),$$

равный минимизированному нормализованному (множителем π) среднему числу нулей $N(t, P_1 Lv)$ функции $P_1 Lv$ на промежутке $(0, t]$ (неопределенному, если хотя бы один из нулей на отрезке $[0, t]$ кратен), где P_1 — проектор на фиксированную прямую в $\mathbb{R}^n$;

(3) функционал *вращаемости*

$$\Phi_\theta(t, v) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} |\Theta(t, P_2 Lv)| \quad (1.2)$$

равный минимизированной средней угловой скорости вектора $P_2 Lv(\tau)$ за время t , где $\Theta(t, P_2 Lv)$ — непрерывный по t ориентированный угол между вектором $P_2 Lv(t)$ и начальным вектором $P_2 Lv(0)$ (если $P_2 Lv(\tau) = 0$ хотя бы для одного $\tau \in [0, t]$, то считаем этот угол неопределенным), а P_2 — проектор на фиксированную двумерную плоскость в $\mathbb{R}^n$ (ниже при работе с функционалом вращаемости по умолчанию считаем, что $n > 1$).

Ранее [20] по умолчанию рассматривались в основном лишь сильные и шаровые (они же *полные*) осцилляционные свойства дифференциальной системы. Эти же понятия мы далее дополняем их слабыми и различными радиальными [21] разновидностями.

Определение 1.2. Скажем, что система (1.1) обладает следующим *сильным* или, соответственно, *слабым шаровым осцилляционным* свойством при ассоциированном индексе $\varkappa = \rho, \nu, \theta$:

(4) *блуждаемостью, колеблемостью, вращаемостью*, соответственно, если

$$\begin{aligned} \varkappa^\bullet(f) &\equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{x_0 \rightarrow 0} \Phi_{\varkappa}(t, x_f(\cdot, x_0)) > 0, \\ \varkappa^\circ(f) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \lim_{x_0 \rightarrow 0} \Phi_{\varkappa}(t, x_f(\cdot, x_0)) > 0; \end{aligned} \quad (1.3)$$

- (5) *неблуждаемостью, неколеблемостью, невращаемостью* (то есть аналогичным противоположным свойством), соответственно, если

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{K}}^\bullet(f) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} \Phi_{\mathcal{K}}(t, x_f(\cdot, x_0)) = 0, \\ \overline{\mathcal{K}}^\circ(f) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} \Phi_{\mathcal{K}}(t, x_f(\cdot, x_0)) = 0.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Определение 1.3. Скажем, что система (1.1) обладает *сильным* или, соответственно, *слабым осцилляционным* свойством при заданном векторе $u \in \mathbb{S}_1$, а именно, *лучевым* — для луча $q_u = r_u \equiv \{x_0(c) = cu \mid c > 0\}$, *узким* — хотя бы для одной кривой q_u , заданной непрерывно дифференцируемым отображением $0 < c \mapsto x_0(c) \in \mathbb{S}_c$ и имеющей в нулевой (своей предельной концевой) точке производную $x'_0(+0) = u$, или *широким* — для любой кривой q_u , при ассоциированном индексе $\mathcal{K} = \rho, \nu, \theta$:

- (6) *u-радиальной блуждаемостью, колеблемостью, вращаемостью*, соответственно, если

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{q_u}^\bullet(f) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{q_u \ni x_0 \rightarrow 0} \Phi_{\mathcal{K}}(t, x_f(\cdot, x_0)) > 0, \\ \mathcal{K}_{q_u}^\circ(f) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{q_u \ni x_0 \rightarrow 0} \Phi_{\mathcal{K}}(t, x_f(\cdot, x_0)) > 0;\end{aligned}\tag{1.5}$$

- (7) *u-радиальной неблуждаемостью, неколеблемостью, невращаемостью*, соответственно, если

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{K}}_{q_u}^\bullet(f) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{q_u \ni x_0 \rightarrow 0} \Phi_{\mathcal{K}}(t, x_f(\cdot, x_0)) = 0, \\ \overline{\mathcal{K}}_{q_u}^\circ(f) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{q_u \ni x_0 \rightarrow 0} \Phi_{\mathcal{K}}(t, x_f(\cdot, x_0)) = 0;\end{aligned}\tag{1.6}$$

- (8) *общерадиальным осцилляционным* свойством, если она обладает этим *u-радиальным* свойством для каждого $u \in \mathbb{S}_1$.

§ 2. Формулировки теорем

Сформулируем теоремы, относящиеся к различным понятиям из определений 1.1–1.3. Сначала перечислим для них утверждения общего характера, а также опишем логические взаимосвязи между этими понятиями. Затем приведем примеры, демонстрирующие отсутствие некоторых конкретных аналогичных предполагаемых взаимосвязей.

2.1. Общие утверждения

Дадим более подробное качественное описание понятий из определений 1.1–1.3.

Теорема 2.1. Система (1.1) обладает осцилляционным:

- (а) *сильным шаровым свойством: блуждаемостью, колеблемостью, вращаемостью или неблуждаемостью, неколеблемостью, невращаемостью* — тогда и только тогда, когда для некоторого или, соответственно, для любого $\varepsilon > 0$ при некотором $T > 0$ для каждого $t > T$ при достаточно малом $\delta > 0$ для всех $x_0 \in \mathbb{B}_\delta$ выполнено неравенство

$$\Phi_{\mathcal{K}}(t, x_f(\cdot, x_0)) \geq \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \Phi_{\mathcal{K}}(t, x_f(\cdot, x_0)) \leq \varepsilon;$$

- (б) *тем же слабым шаровым свойством* — тогда и только тогда, когда требование выше выполнено, возможно, не при некотором $T > 0$ для каждого $t > T$, но при каждом $T > 0$ хотя бы для одного $t > T$;

- (с) тем же (сильным или слабым) u -радиальным для заданного $u \in \mathbb{S}_1$ лучевым, узким или широким свойством — тогда и только тогда, когда требование выше (соответствующее) выполнено, возможно, не для всех $x_0 \in \mathbb{B}_\delta$, но хотя бы при всех $x_0 \in \mathbb{B}_\delta \cap q_u$ для луча $q_u = l_u$, для некоторой или, соответственно, любой кривой q_u .

Следующие 5 теорем раскрывают конкретные логические взаимосвязи между рассматриваемыми свойствами.

Теорема 2.2. Любое осцилляционное сильное или слабое лучевое, узкое или широкое общерадиальное свойство системы (1.1) вытекает из ее одноименного шарового свойства и влечет за собой ее одноименное u -радиальное свойство для каждого $u \in \mathbb{S}_1$.

Теорема 2.3. Любое осцилляционное радиальное сильное или слабое лучевое свойство системы (1.1) вытекает из ее одноименного широкого свойства и влечет за собой ее одноименное узкое свойство.

Теорема 2.4. Если система (1.1) обладает каким-либо осцилляционным шаровым или радиальным сильным свойством, то она обладает и одноименным слабым свойством, но не обладает противоположным ни сильным, ни слабым свойством.

Теорема 2.5. Система (1.1) обладает шаровой или радиальной сильной или слабой блуждаемостью (неблуждаемостью) тогда и только тогда, когда она обладает одноименной колеблемостью (соответственно, неколеблемостью).

Теорема 2.6. Если система (1.1) обладает шаровой или радиальной сильной или слабой:

- (d) вращаемостью, то и одноименной блуждаемостью и колеблемостью;
 (е) неблуждаемостью или неколеблемостью, то и одноименной невращаемостью.

Следующая теорема показывает, что двумерная система либо обладает сразу сильной (или слабой) шаровой вращаемостью, либо не обладает даже такой же узкой радиальной вращаемостью ни для одного единичного вектора.

Теорема 2.7. При $n = 2$ для любой системы (1.1), каждого вектора $u \in \mathbb{S}_1$ и каждой кривой q_u имеют место равенства

$$\theta^\bullet(f) = \theta_{q_u}^\bullet(f), \quad \theta^\circ(f) = \theta_{q_u}^\circ(f), \quad \bar{\theta}^\bullet(f) = \bar{\theta}_{q_u}^\bullet(f), \quad \bar{\theta}^\circ(f) = \bar{\theta}_{q_u}^\circ(f),$$

а если эта система обладает для хотя бы одного $u \in \mathbb{S}_1$ u -радиальной сильной или слабой хотя бы узкой вращаемостью или невращаемостью, то она обладает и одноименным шаровым свойством.

2.2. Частные примеры

При отсутствии сильных осцилляционных свойств могут иметь место их слабые варианты, которые, в отличие от сильных, к тому же совместимы со своими противоположными свойствами.

Теорема 2.8. При $n = 2$ существует линейная система (1.1), не обладающая никакими ни шаровыми, ни u -радиальными для каждого $u \in \mathbb{S}_1$ сильными осцилляционными свойствами, но обладающая сразу всеми перечисленными слабыми свойствами.

Следующие 2 теоремы показывают, что радиальные свойства системы могут как отсутствовать практически все сразу, так и наоборот, быть внешне противоречивыми.

Теорема 2.9. При $n = 2$ существует периодическая система (1.1), не обладающая никакими ни шаровыми, ни общерадиальными ни сильными, ни слабыми ни блуждаемостью, ни колеблемостью, ни вращаемостью и ни неблуждаемостью, ни неколеблемостью, но обладающая шаровой сильной невращаемостью.

Теорема 2.10. При $n = 2$ существует периодическая система (1.1), обладающая одновременно сильными и слабыми u -радиальными для данного $u \in \mathbb{S}_1$ лучевыми блуждаемостью и колеблемостью, а также узкими неблуждаемостью и неколеблемостью.

Общерадиальные осцилляционные свойства могут иметь место даже при отсутствии шаровых свойств.

Теорема 2.11. При $n = 2$ существует периодическая система (1.1), обладающая одновременно общерадиальными лучевыми сильными и слабыми блуждаемостью и колеблемостью или, наоборот, неблуждаемостью и неколеблемостью, но не обладающая ни одним из одноименных шаровых свойств.

Ослабив локальную гладкость системы в точке $x = 0$, можно добиться отсутствия у нее всех вообще осцилляционных свойств (пополнив их набор из теоремы 2.9).

Теорема 2.12. При $n = 2$ существует автономная система (1.1) с ослабленной гладкостью в нуле, не обладающая никакими ни сильными, ни слабыми ни шаровыми, ни радиальными (ни для какого единичного вектора) осцилляционными свойствами.

§ 3. Доказательства теорем

Докажем все сформулированные выше теоремы подряд, причем некоторые из них для удобства объединим в небольшие группы.

Доказательство теорем 2.1–2.3. Справедливость этих теорем выводится непосредственно из определений 1.1–1.3, причем теорема 2.1 получается прямой математической расшифровкой формул (1.3)–(1.6). $\square$

Доказательство теоремы 2.4. Наименьшая из левых частей соотношений (1.3) и (1.4) совпадает с левой частью $\mathcal{K}^\bullet(f)$ первого неравенства (1.3), а наибольшая — с левой частью $\overline{\mathcal{K}}^\bullet(f)$ первого равенства (1.4). Поэтому справедливость теоремы 2.4 основывается на следующих наблюдениях.

1. Выполнение неравенства $\mathcal{K}^\bullet(f) > 0$, соответствующего сильному (шаровому) свойству блуждаемости, колеблемости или вращаемости, влечет за собой положительность левых частей всех условий (1.3), (1.4), то есть наличие одноименного слабого свойства и отсутствие противоположных сильных и слабых свойств.
2. Выполнение равенства $\overline{\mathcal{K}}^\bullet(f) = 0$, соответствующего сильному свойству неблуждаемости, неколеблемости или невращаемости, влечет за собой равенство нулю левых частей всех условий (1.3), (1.4), то есть наличие одноименного слабого свойства и отсутствие противоположных сильных и слабых свойств.

Аналогичное рассуждение справедливо и для u -радиального осцилляционного свойства при произвольном $u \in \mathbb{S}_1$ и любой кривой q_u , поскольку наименьшая из левых частей соотношений (1.5) и (1.6) совпадает с левой частью $\mathcal{K}_{q_u}^\bullet(f)$ первого неравенства (1.5), а наибольшая — с левой частью $\overline{\mathcal{K}}_{q_u}^\bullet(f)$ первого равенства (1.6). $\square$

Доказательство теорем 2.5 и 2.6. Для любых $t > 0$ и $x_0 \in G_*$ верна цепочка соотношений

$$\Phi_\theta(t, x_f(\cdot, x_0)) - \frac{\pi}{t} \leq \Phi_\nu(t, x_f(\cdot, x_0)) = \Phi_\rho(t, x_f(\cdot, x_0)),$$

доказанная фактически в работах [5, 7]. Поэтому левые части каждого из условий (1.3)–(1.6) в отдельности совпадают при $\varkappa = \rho$ и $\varkappa = \nu$, а значит, они могут быть положительными или, соответственно, равными нулю только одновременно, что и подтверждает справедливость теоремы 2.5. Более того, их положительность вытекает из положительности при $\varkappa = \theta$, а их равенство нулю влечет за собой равенство нулю и при $\varkappa = \theta$, чего по существу и достаточно для обоснования справедливости теоремы 2.6. $\square$

Доказательство теоремы 2.7. Заметим, что в формулах (1.3)–(1.6) верхний предел при $x_0 \rightarrow 0$ после сужения этого условия до $q_u \ni x_0 \rightarrow 0$ заведомо не увеличится, а нижний предел — не уменьшится. Поэтому для системы (1.1) верны односторонние оценки

$$\bar{\theta}^\bullet(f) \geq \bar{\theta}_{q_u}^\bullet(f), \quad \bar{\theta}^\circ(f) \geq \bar{\theta}_{q_u}^\circ(f), \quad \theta^\bullet(f) \leq \theta_{q_u}^\bullet(f), \quad \theta^\circ(f) \leq \theta_{q_u}^\circ(f). \quad (3.1)$$

Докажем справедливость аналогичных обратных оценок при $n = 2$.

1. Пусть первое или второе из неравенств (3.1) — строгое, то есть при некотором малом $\alpha > 0$ выполнено соответствующее неравенство

$$\bar{\theta}^\bullet(f) > \bar{\theta}_{q_u}^\bullet(f) + 5\alpha \quad \text{или} \quad \bar{\theta}^\circ(f) > \bar{\theta}_{q_u}^\circ(f) + 5\alpha,$$

из которого, с учетом свойств нижнего или верхнего предела при $t \rightarrow +\infty$ в соответствующих этим показателям формулах (1.4) и (1.6), для некоторой неограниченно возрастающей последовательности $0 < t_1 < t_2 < \dots$ имеем оценки

$$\overline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} \Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0)) > \overline{\lim}_{q_u \ni x_0 \rightarrow 0} \Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0)) + 3\alpha, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Фиксируем такое $k \in \mathbb{N}$, что $\alpha t_k > 4\pi$, и такое $x_1 \in q_u$, что все точки x_0 , принадлежащие дуге $q_u^{x_1} \subset q_u$, определяемой условием $|x_0| \leq |x_1|$, лежат в одной фазовой полуплоскости относительно точки 0 и удовлетворяют оценке

$$\Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0)) \leq \overline{\lim}_{q_u \ni y_0 \rightarrow 0} \Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, y_0)) + \alpha, \quad x_0 \in q_u^{x_1}. \quad (3.3)$$

Используя непрерывную на всем отрезке $[0, t_k]$ зависимость решения от начального значения x_0 в точке $x_0 = 0$, выберем такое $\beta > 0$, что

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{B}_\beta, \tau \in [0, t_k]} |x_f(\tau, x_0)| < \gamma \equiv \min_{\tau \in [0, t_k]} |x_f(\tau, x_1)|, \quad (3.4)$$

откуда следует, что любое решение системы (1.1), начинающееся в точке $x_2 \in \mathbb{B}_\beta \setminus q_u$, ни в какой момент $\tau \in [0, t_k]$ не покидает γ -трубку нулевого решения и не попадает на кривую $K(\tau, 0)q_u^{x_1}$ (где K — оператор Коши системы), начинающуюся в точке 0 и кончающуюся в точке $x_f(\tau, x_1) \notin \mathbb{B}_\beta$. Поэтому для значения функционала (1.2) от любого такого решения имеем

$$|\Theta(t_k, P_2 L x_f(\cdot, x_2))| \leq t_k \max_{x_0 \in q_u^{x_1}} |\Theta(t_k, L x_f(\cdot, x_0))| + 3\pi, \quad L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n,$$

откуда с помощью точной нижней грани по L получаем

$$\Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_2)) \leq \sup_{x_0 \in q_u^{x_1}} |\Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0))| + \alpha \leq \overline{\lim}_{q_u \ni x_0 \rightarrow 0} \Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0)) + 2\alpha, \quad x_2 \in \mathbb{B}_\beta \setminus q_u,$$

а, с учетом более сильного неравенства (3.3), выводим противоречие оценке (3.2), что опровергает сделанное в начале настоящего пункта предположение.

2. Пусть третье или четвертое из неравенств (3.1) — строгое, то есть при некотором $\alpha > 0$ выполнено соответствующее неравенство

$$\theta^\bullet(f) < \theta_{q_u}^\bullet(f) - 5\alpha \quad \text{или} \quad \theta^\circ(f) < \theta_{q_u}^\circ(f) - 5\alpha,$$

Тогда, рассуждая аналогично предыдущему пункту настоящего доказательства, для некоторого значения $t_k > 0$ имеем $\alpha t_k > 4\pi$ и

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} \Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0)) < \lim_{q_u \ni x_0 \rightarrow 0} \Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0)) - 3\alpha. \quad (3.5)$$

Выберем такое $x_1 \in q_u$, что дуга $q_u^{x_1} \subset q_u$ лежит в одной фазовой полуплоскости относительно точки 0 и удовлетворяет оценке

$$\Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0)) \geq \lim_{q_u \ni x_0 \rightarrow 0} \Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0)) - \alpha, \quad x_0 \in q_u^{x_1}, \quad (3.6)$$

а затем выберем $\beta > 0$, для которого выполнено условие (3.4), и получим

$$\Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_2)) \geq \inf_{x_0 \in q_u^{x_1}} \Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0)) - \alpha \geq \lim_{q_u \ni x_0 \rightarrow 0} \Phi_\theta(t_k, x_f(\cdot, x_0)) - 2\alpha, \quad x_2 \in \mathbb{B}_\beta \setminus q_u,$$

что, с учетом неравенства (3.6), противоречит оценке (3.5) и опровергает сделанное в начале настоящего пункта предположение, завершая доказательство теоремы 2.7. $\square$

Доказательство теоремы 2.8. Рассмотрим линейную систему (1.1) (см. [22]) вида

$$\dot{x} = f(t, x) \equiv \zeta(t) \cdot Jx, \quad J \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in G \equiv \mathbb{R}^2, \quad (3.7)$$

задающую в фазовой плоскости при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ вращение вокруг нуля с непрерывной (по t) угловой скоростью $\zeta(t) \in [0, 1]$, удовлетворяющей условиям

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_{m-1} + 1, t_m], \quad m = 2k - 1; \\ 1, & t \in [t_{m-1} + 1, t_m], \quad m = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Моменты $t_0 \equiv 0 < 1 < t_1 < t_1 + 1 < t_2 < t_2 + 1 < t_3 < \dots$ подберем последовательно так, чтобы сразу при всех $x_0 \in G_*$ и $\varkappa = \rho, \nu, \theta$ выполнялись условия

$$\Phi_\varkappa(t_{2k-1}, x_f(\cdot, x_0)) < 1/k, \quad \Phi_\varkappa(t_{2k}, x_f(\cdot, x_0)) > 1 - 1/k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для полученной системы первые из условий (1.3)–(1.6) не выполнены, а вторые — выполнены, что и подтверждает справедливость теоремы 2.8. $\square$

Доказательство теорем 2.9–2.11. Рассмотрим исходную линейную периодическую систему вида (3.7) с функцией $\zeta(t) \equiv \pi/2 \cdot \sin t$. Каждое решение этой системы 2π -периодично и получается поворотами его начального вектора x_0 за каждую половину π периода ровно на половину целого оборота то в одну, то в другую сторону.

1. Возмутим исходную систему 2π -периодически так, чтобы все решения, начинающиеся в области $U_1 \subset G_*$, задаваемой условием $|x_2| < |x_1|$, делали за каждую половину периода чуть меньше пол-оборота, оставаясь 2π -периодичными, а все остальные решения не менялись вовсе. Полученная система удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.9: она обладает сильной шаровой невращаемостью, но не обладает ни сильными, ни слабыми ни шаровыми, ни общерадиальными ни блуждаемостью, ни колеблемостью, ни вращаемостью, ни неблуждаемостью, ни неколеблемостью, поскольку соответствующие этим свойствам требования при произвольном $\delta > 0$ заведомо не выполнены для решений, начинающихся в области $\mathbb{B}_\delta \cap U_1$ или $\mathbb{B}_\delta \setminus \overline{U}_1$.

2. Считая (без ограничения общности), что вектор $u \in \mathbb{S}_1$ совпадает с базисным вектором $e_1 \in \mathbb{R}^2$, возмутим исходную систему в соответствии с предыдущим пунктом, аналогично изменив все решения, но начинающиеся не в области U_1 , а в области $U_2 \subset G_*$, задаваемой условием $0 < x_2 < 2x_1^2$. Полученная система будет обладать всеми свойствами из теоремы 2.10: u -радиальными лучевыми сильными (а значит, и слабыми) блуждаемостью и колеблемостью, а также u -радиальными узкими сильными неблуждаемостью и неколеблемостью для кривой q_u , лежащей, к примеру, на параболе $x_2 = x_1^2$.

3. Возмутим исходную систему в соответствии с предыдущими пунктами, аналогично изменив все решения, начинающиеся в области $U_3 \subset G_*$, задаваемой условием $x_1^2 < x_2 < 2x_1^2$ (или наоборот, в области $U'_3 \equiv G_* \setminus \overline{U}_3$). Полученная система обладает всеми свойствами из теоремы 2.11: действительно, у любого луча r_u некоторая достаточно малая полуокрестность точки 0 лежит в области U'_3 , поэтому система обладает общерадиальными лучевыми сильными блуждаемостью и колеблемостью (или соответственно, наоборот, неблуждаемостью и неколеблемостью), но из-за наличия решений, начинающихся в области U_3 , система не обладает никакими шаровыми перечисленными свойствами. $\square$

Доказательство теоремы 2.12. Рассмотрим (см. также [23]) автономную систему типа (3.7), в которой, правда, функция $\zeta: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ непрерывно зависит не от переменной t , а от $|x| > 0$, удовлетворяя равенствам

$$\zeta(r) = \begin{cases} 0, & r = 1/(2k); \\ 1, & r = 1/(2k-1), \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

а ее ограниченность обеспечивает для правой части этой системы локальную липшицевость по x в нуле, причем все окружности (с центром в нуле) радиусом $1/(2k)$ состоят из неподвижных точек, а по окружностям радиусом $1/(2k-1)$ происходит вращение с единичной угловой скоростью. Поэтому предъявленная система удовлетворяет всем описанным в теореме 2.12 требованиям. $\square$

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках научного проекта № 075-03-2026-395.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. <https://zbmath.org/0144.10702>
2. Изобов Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.
3. Сергеев И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. <https://www.mathnet.ru/rus/tsp65>
4. Сергеев И. Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 149–172. <https://doi.org/10.4213/im5035>
5. Сергеев И. Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. <https://doi.org/10.4213/sm7928>
6. Сергеев И. Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183. <https://www.mathnet.ru/rus/iimi318>

7. Сергеев И. Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математические заметки. 2016. Т. 99. Вып. 5. С. 732–751.
<https://doi.org/10.4213/mzm10555>
8. Сергеев И. Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. <https://www.mathnet.ru/rus/tsp95>
9. Сергеев И. Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46. <https://www.mathnet.ru/rus/vmumm4402>
10. Сергеев И. Н. Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 726–734.
<https://doi.org/10.31857/S0374064123060031>
11. Горицкий А. Ю., Фисенко Т. Н. Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 479–486.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=17680290>
12. Смоленцев М. В. О спектре частот периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка // Сб. трудов Международной миниконференции «Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения» (16 июня 2012 г.). М.: Изд-во МЭСИ, 2013. С. 58–74.
13. Бурлаков Д. С., Цой С. В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93.
<https://www.mathnet.ru/rus/tsp71>
14. Лысак М. Д. Оценки скорости блуждания решений некоторых типов систем линейных дифференциальных уравнений // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 106–111. <https://www.mathnet.ru/rus/iimi309>
15. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2016. Т. 60. № 1. С. 24–31. <https://elibrary.ru/item.asp?id=25800782>
16. Быков В. В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425.
<https://doi.org/10.1134/S0374064116040026>
17. Шишлянников Е. М. Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости // Математический сборник. 2018. Т. 209. № 12. С. 149–164. <https://doi.org/10.4213/sm8995>
18. Сташ А. Х., Аллахвердян А. А., Артисевич А. Е., Лобода Н. А. О нулевых спектрах характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера // Динамические системы. 2020. Т. 10 (38). № 2. С. 216–224. <https://elibrary.ru/item.asp?id=46435035>
19. Панеш А. А., Сташ А. Х. О реализации счетных существенных спектров показателей колеблемости и блуждаемости линейных однородных двумерных дифференциальных систем // Математические заметки. 2026. Т. 119. Вып. 4. С. 563–575. <https://doi.org/10.4213/mzm14718>
20. Сергеев И. Н. Исследование полных свойств колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы по первому приближению // Математические заметки. 2024. Т. 115. Вып. 4. С. 610–618. <https://doi.org/10.4213/mzm14146>
21. Сергеев И. Н. О различных радиальных свойствах дифференциальной системы // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61. № 5. С. 596–605. <https://doi.org/10.7868/s3034503025050026>
22. Сергеев И. Н. Полные свойства блуждаемости, колеблемости и вращаемости дифференциальной системы и их связь с мерами этих свойств // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2025. Т. 65. С. 72–84.
<https://doi.org/10.35634/2226-3594-2025-65-05>
23. Богданова И. Д., Сергеев И. Н. Пример дифференциальной системы с единичными осцилляционными мерами, но без радиальной осцилляционности // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2026. № 4. С. 67–70.
<https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-67-4-10>

Поступила в редакцию 27.07.2026

Принята к публикации 01.09.2026

Сергеев Игорь Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8976-0732>

E-mail: igniserg@gmail.com

Цитирование: И. Н. Сергеев. Шаровые и радиальные, сильные и слабые осцилляционные свойства дифференциальных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2026. Т. 36. Вып. 3. С. 474–485.

I. N. Sergeev

Ball and radial, strong and weak oscillatory properties of differential systems

Keywords: differential system, oscillatory properties, ball and radial properties, strong and weak properties, wandering, oscillation, rotation.

MSC2020: 34C10

DOI: [10.35634/vm260308](https://doi.org/10.35634/vm260308)

For an arbitrary first-order differential system with a zero solution, we consider its various oscillatory properties: wandering, oscillatory, rotatory and non-wandering, non-oscillatory, and non-rotatory. Standard ball and strong variants, as well as radial and weak varieties, are studied. Not only are previously known facts presented for these properties, but several new results are also obtained, describing their numerous logical interrelations, as well as examples demonstrating the absence of specific other connections between them.

Funding. The study was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the basic part, project no. 075-03-2026-395.

REFERENCES

1. Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskii V. V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to stability problems), Moscow: Nauka, 1966. <https://zbmath.org/0144.10702>
2. Izobov N. A. *Lyapunov exponents and stability*, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2013. <https://zbmath.org/1287.34002>
Original Russian text published in Izobov N. A. *Vvedeniye v teoriyu pokazatelei Lyapunova*, Minsk: Belarusian State University, 2006.
3. Sergeev I. N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, issue 1, pp. 2764–2793. <https://doi.org/10.1007/s10958-006-0142-6>
4. Sergeev I. N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential system, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, issue 1, pp. 139–162. <https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002578>
5. Sergeev I. N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, issue 1, pp. 114–132. <https://doi.org/10.1070/SM2013v204n01ABEH004293>
6. Sergeev I. N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 171–183 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/iimi318>
7. Sergeev I. N. Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, issue 5, pp. 729–746. <https://doi.org/10.1134/S0001434616050114>
8. Sergeev I. N. Lyapunov characteristics of oscillation, rotation, and wandering of solutions of differential systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 234, issue 4, pp. 497–522. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4025-4>
9. Sergeev I. N. The definition of the indices of oscillation, rotation, and wandering of nonlinear differential systems, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2021, vol. 76, issue 3, pp. 129–134. <https://doi.org/10.3103/S0027132221030074>
10. Sergeev I. N. Studying the oscillation, rotation, and wandering indicators by the first approximation, *Differential Equations*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 741–750. <https://doi.org/10.1134/S0012266123060034>

11. Goritskii A. Yu., Fisenko T. N. Characteristic frequencies of zeros of a sum of two harmonic oscillations, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 486–493. <https://doi.org/10.1134/S0012266112040039>
12. Smolentsev M. V. On the frequency spectrum of a periodic linear differential equation of the third order, *Qualitative theory of differential equations and applications: Abstracts of the International Mini-Conference (June 16, 2012)*, Moscow: Moscow State University of Economics, Statistics, and Informatics, 2013, pp. 58–74 (in Russian).
13. Burlakov D. S., Tsoii S. V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, issue 2, pp. 155–167. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2554-7>
14. Lysak M. D. Wandering rate estimations of solutions for some types of linear differential equation systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 106–111 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/iimi309>
15. Barabanov E. A., Vaidzelevich A. S. Spectra of the upper Sergeev frequencies of zeros and signs of linear differential equations, *Doklady Natsional'noi Akademii Nauk Belarusi*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 24–31 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=25800782>
16. Bykov V. V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solutions of linear differential equations, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 413–420. <https://doi.org/10.1134/S0012266116040029>
17. Shishlyannikov E. M. The existence of a two-dimensional bounded system with continual and coinciding spectra of frequencies and of wandering exponents, *Sbornik: Mathematics*, 2018, vol. 209, issue 12, pp. 1812–1826. <https://doi.org/10.1070/SM8995>
18. Stash A. Kh., Allahverdyan A. A., Artisevich A. E., Loboda N. A. On zero spectra of Sergeyev oscillation characteristic of the Euler's equation, *Dinamicheskie Sistemy*, 2020, vol. 10 (38), no. 2, pp. 216–224 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=46435035>
19. Panesh A. A., Stash A. Kh. On the realization of countable essential spectra of oscillation and wandering indices for linear homogeneous two-dimensional differential systems, *Mathematical Notes*, 2026, vol. 119, issue 4, pp. 670–680. <https://doi.org/10.1134/S000143462660211X>
20. Sergeev I. N. Study of the complete oscillation, rotation, and wandering properties of a differential system by the first approximation, *Mathematical Notes*, 2024, vol. 115, issue 4, pp. 599–606. <https://doi.org/10.1134/S0001434624030313>
21. Sergeev I. N. On various radial properties of a differential system, *Differential Equations*, 2025, vol. 61, no. 5, pp. 584–592. <https://doi.org/10.1134/S0012266125050039>
22. Sergeev I. N. The connection of the complete properties of wandering, oscillation and rotation of a differential system with the measures of these properties, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2025, vol. 65, pp. 72–84 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2025-65-05>
23. Bogdanova I. D., Sergeev I. N. Example of a differential system with unit oscillation measures but without radial oscillation, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya I. Matematika. Mekhanika*, 2026, no. 4, pp. 67–70 (in Russian). <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-67-4-10>

Received 27.07.2026

Accepted 01.09.2026

Igor Nikolaevich Sergeev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, Leninskiye Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8976-0732>

E-mail: igniserg@gmail.com

Citation: I. N. Sergeev. Ball and radial, strong and weak oscillatory properties of differential systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2026, vol. 36, issue 3, pp. 474–485.