ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 4. С. 497–512.

УДК 517.955

© *А. М. Волков*

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Статья посвящена развитию методов Ляпунова для анализа неустойчивости положения равновесия динамической системы в пространстве вероятностных мер, задаваемой нелокальным уравнением неразрывности. Рассматривается случай лишь барицентрически субдифференцируемой функции Ляпунова. Получены достаточные условия неустойчивости, которые являются аналогом теоремы Четаева и опираются на анализ поведения негладкой функции Ляпунова в окрестности положения равновесия. Приведен пример динамической системы, неустойчивость положения равновесия которой доказывается с использованием полученной теоремы.

Ключевые слова: нелокальное уравнение неразрывности, второй метод Ляпунова, негладкая функция Ляпунова, неустойчивость, производные в пространстве мер.

DOI: 10.35634/vm250401

Введение

В статье изучается свойство неустойчивости положения равновесия динамической системы в пространстве вероятностных мер, которая задается нелокальным уравнением неразрывности

$$\partial_t m_t + \operatorname{div}(f(x, m_t)m_t) = 0.$$

Такое уравнение описывает динамику бесконечной системы однотипных агентов в случае, когда скорости зависят не только от текущей позиции агента, но и от их общего распределения.

Уравнение неразрывности используется в широком спектре приложений: моделирование систем заряженных частиц [1], описание поведения сверхмассивных черных дыр [2], описание поведения больших групп животных [3], динамика биологических процессов [4], динамика общественного мнения [5] и др.

Ранее в литературе изучались такие свойства нелокального уравнения неразрывности как устойчивость по параметрам [6], экспоненциальная устойчивость [7], устойчивость носителя меры [8], а также устойчивость по Ляпунову положения равновесия [9].

В настоящей статье мы исследуем неустойчивость в смысле Ляпунова. Понятия устойчивости и неустойчивости по Ляпунову были впервые введены в знаменитых работах А. М. Ляпунова [10, 11] для систем ОДУ. Одним из самых важных результатов в этой области после работ самого Ляпунова стала теорема Четаева о неустойчивости (см. [12, 13]). Понятие неустойчивости по Ляпунову оказывается не менее важным, чем понятие устойчивости, и исследуется в большом числе постановок (см., в частности, [14–19]).

Перенос результатов для классических динамических систем на случай нелокального уравнения неразрывности оказывается нетривиален в силу того, что пространство вероятностных мер, являющееся в данном случае фазовым, не является ни линейным, ни σ-компактным. Однако на нем могут быть введены такие обобщения понятия производной как вариационная и внутренняя производные [20–22], и такие аналоги понятий из негладкого анализа [23] как сильные и слабые суб-/супердифференциалы. В некоторых случаях они могут быть описаны в явной форме [23].

В данной статье мы следуем подходу, изложенному в нашей предыдущей работе [9]. Для построения аналога теоремы Четаева используется негладкая функция Ляпунова, построение которой опирается на определение барицентрического суб-/супердифференциала.

Далее статья устроена следующим образом.

В разделе 1 приводятся общие определения и обозначения, используемые в статье. Определяется решение нелокального уравнения неразрывности и приводятся некоторые свойства таких решений. Также в данном разделе вводятся понятия барицентрических суб-/супердифференциалов функционалов от меры.

Раздел 2 содержит обобщение теоремы Четаева определения неустойчивости положения равновесия динамической системы и ее доказательство. Отметим, что в данном разделе «функция Ляпунова» предполагается не гладкой, а лишь барицентрически субдифференцируемой в окрестности положения равновесия.

Наконец, в разделе 2.1 приводится пример динамической системы, неустойчивость которой показывается с помощью доказанной теоремы.

§ 1. Терминология и обозначения

1.1. Общие определения и обозначения

Напомним, что метрическое пространство $(\mathscr{X}, \rho)$ называется *польским*, если оно является полным и сепарабельным. В данном подразделе будем предполагать, что $\mathscr{X}$ — польское пространство, $(\mathscr{Y}, \|\cdot\|)$ — банахово сепарабельное пространство, а $p > 1$.

В статье используются следующие обозначения.

- $\mathbb{R}_+$ — луч $[0, +\infty)$ на числовой оси $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^d$ — пространство d-мерных векторов-столбцов.
- $\mathbb{R}^{d*}$ — пространство d-мерных векторов-строк.
- $\mathsf{B}_R(x)$ — замкнутый шар радиуса R с центром в точке x, то есть
$$\mathsf{B}_R(x) \triangleq \{y \in \mathscr{X}: \ \rho(x, y) \leqslant R\}.$$
- $\mathsf{L}_a(f)$ — множество Лебега функции $f\colon \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ с уровнем $a \in \mathbb{R}$, то есть
$$\mathsf{L}_a(f) \triangleq \{x \in \mathscr{X}: f(x) \geqslant a\}.$$
- $\mathscr{C}^1_c(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$, имеющих компактный носитель.
- $\mathrm{Id}\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ — тождественная функция, то есть для произвольного элемента $x \in \mathscr{Y}$
$$\mathrm{Id}(x) = x.$$
- Если $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(\Omega', \mathcal{F}')$ — измеримые пространства, μ — мера на Ω, отображение $h\colon \Omega \to \Omega'$ является $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-измеримым, то $h\sharp\mu$ — образ меры μ при действии функции h, определяемый по правилу
$$(h\sharp\mu)(\Upsilon) = \mu(h^{-1}(\Upsilon))$$
для произвольного $\Upsilon \in \mathcal{F}'$.
- $\mathscr{P}(\mathscr{X})$ — пространство борелевских вероятностных мер над $\mathscr{X}$.

- $\mathscr{L}_p(\mathscr{X},\mu;\mathscr{Y})$ — пространство измеримых функций из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, p-я степень нормы которых интегрируема по мере μ.
- $\varsigma_p(\mu)$ — корень p-й степени p-го момента меры $\mu\in\mathscr{P}(\mathscr{X})$, то есть для произвольного фиксированного $x_o\in\mathscr{X}$

$$\varsigma_p(\mu)\triangleq\left(\int_{\mathscr{X}}\rho(x,x_o)^p\,\mu(dx)\right)^{1/p}.$$

- $\mathscr{P}_p(\mathscr{X})$ — подпространство элементов $\mathscr{P}(\mathscr{X})$, имеющих конечный p-й момент, то есть

$$\mathscr{P}_p(\mathscr{X})\triangleq\Big\{\mu\in\mathscr{P}(\mathscr{X})\colon\varsigma_p(\mu)<+\infty\Big\}.$$

Отметим одно очевидное свойство p-го момента.

Предложение 1.1. *Пусть $m\in\mathscr{P}_p(\mathscr{Y})$, $\Phi\in\mathscr{L}_p(\mathscr{Y},m;\mathscr{Y})$, а $\mu=(\mathrm{Id}+\Phi)\sharp m$. Тогда*

$$\varsigma_p(\mu)\leqslant\varsigma_p(m)+\|\Phi\|_{\mathscr{L}_p(\mathscr{Y},m;\mathscr{Y})}.$$

Над пространством $\mathscr{P}_p(\mathscr{X})$ можно определить метрику.

Определение 1.1 (см. [24, Problem 1.2 и Section 5.1]). *Транспортным планом* между мерами $\mu\in\mathscr{P}(\mathscr{X})$ и $\nu\in\mathscr{P}(\mathscr{X})$ называется такая мера $\pi\in\mathscr{P}(\mathscr{X}\times\mathscr{X})$, что

$$\pi(A\times\mathscr{X})=\mu(A),\quad \pi(\mathscr{X}\times B)=\nu(B),$$

для произвольных $A\subseteq\mathscr{X}$ и $B\subseteq\mathscr{X}$.

Множество всех транспортных планов будем обозначать как $\Pi(\mu,\nu)$.

Определение 1.2 (см. [24, Problem 1.2 и Section 5.1]). *Метрикой Канторовича* между мерами $\mu\in\mathscr{P}_p(\mathscr{X})$ и $\nu\in\mathscr{P}_p(\mathscr{X})$ называется функция

$$W_p(\mu,\nu)\triangleq\left(\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}}\rho(x,y)^p\,\pi(dxdy)\right)^{1/p}.$$

Транспортный план π, реализующий инфимум, будем называть *оптимальным*, а множество всех таких планов обозначать как $\Pi_o(\mu,\nu)$.

Всюду далее под планами будут подразумеваться именно транспортные планы.

Замечание 1.1. Известны следующие важные свойства метрики Канторовича (см. [24, Problem 1.2, Theorem 1.7, Propositon 5.1 и Theorem 5.11]):
(1) множество Π_o всегда непусто;
(2) метрика Канторовича действительно является метрикой в пространстве $\mathscr{P}_p(\mathscr{X})$;
(3) метрическое пространство $\big(\mathscr{P}_p(\mathscr{X}),W_p\big)$ является польским.

Замечание 1.2. Поскольку

$$W_p(\mu,\delta_0)=\varsigma_p(\mu),$$

то ограниченность множества Υ в пространстве $\big(\mathscr{P}_p(\mathscr{X}),W_p\big)$, в смысле вложения в некоторый шар, эквивалентна равномерной ограниченности величин $\varsigma_p(\mu)$ для каждого $\mu\in\Upsilon$.

Определение 1.3. Функция $\phi\colon \mathscr{P}_p(\mathscr{X}) \to \mathbb{R}$ называется *локально липшицевой*, если для любого $\alpha > 0$ найдется такое $K_\alpha > 0$, что для любых мер $m_1, m_2 \in \mathscr{P}_p(\mathscr{X})$ со свойством $\varsigma_p(m_i) \leqslant \alpha$ выполняется неравенство

$$|\phi(m_1) - \phi(m_2)| \leqslant K_\alpha \cdot W_p(m_1, m_2).$$

Можно считать, что K_α — неубывающая функция от α, которая непрерывна справа, имеет предел слева (càdlàg) и ограниченна на компактном множестве значений α.

Замечание 1.3. Несложно показать, что любая локально липшицевая функция над $\mathscr{P}_p(\mathscr{X})$ является локально ограниченной.

1.2. Нелокальное уравнение неразрывности

В данной статье основным объектом изучения является задача Коши для нелокального уравнения неразрывности

$$\partial_t m_t + \operatorname{div}(f(x, m_t) m_t) = 0, \tag{1.1}$$

$$m_0 = m_*, \tag{1.2}$$

где $f\colon \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ — векторное поле. Здесь и далее $p > 1$ — фиксированный параметр. Данное уравнение, как говорилось выше, описывает систему агентов с динамикой, задаваемой уравнением

$$\dot{x} = f(x, m_t).$$

Далее будем предполагать следующее условие.

Предположение 1.1. Функция f липшицева по совокупности переменных, то есть существует такая константа $C_0 > 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ и $\mu, \nu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$

$$\|f(x, \mu) - f(y, \nu)\| \leqslant C_0\big(\|x - y\| + W_p(\mu, \nu)\big).$$

Примерами функций, удовлетворяющих данному предположению, выступают, например, функции вида

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x, m, y)\, m(dy),$$

для липшицевой функции v.

Замечание 1.4. Из предположения 1.1 следует свойство подлинейного роста функции f: существует такая константа $C_1 > 0$, что для любых $x \in \mathbb{R}^d$ и $\mu \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$

$$\|f(x, \mu)\| \leqslant C_1\big(1 + \|x\| + \varsigma_p(\mu)\big).$$

Для этого достаточно в условии липшицевости положить $\nu = \delta_0$ и $y = 0$.

Далее определим решение уравнения (1.1) на промежутке $[0, T]$. Естественно, решением задачи Коши (1.1), (1.2) будем называть решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.2).

Определение 1.4. Мерозначную функцию $m_\cdot$ будем называть *решением нелокального уравнения неразрывности* (1.1) на отрезке $[0, T]$, если для любой пробной функции $\varphi \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R}^d \times (0, T); \mathbb{R})$ выполнено равенство

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \big(\partial_t \varphi(x, t) + \nabla_x \varphi(x, t) \cdot f(x, m_t)\big)\, m_t(dx) dt = 0.$$

Существование и единственность решения на любом конечном промежутке доказано в работе [25] в более общих условиях.

В дальнейшем, для фиксированной траектории $m.$ решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), m_t), \quad x(s) = z,$$

вычисленное в момент r, будем обозначать через $\mathsf{X}^{s,z}_{m.}(r)$.

В конце данного раздела мы приведем некоторые свойства решения уравнения (1.1), доказанные в работе [9], выводящиеся напрямую из предположения 1.1 и замечания 1.4.

Предложение 1.2. *Пусть $T > 0$, m_* и α таковы, что $\varsigma_p(m_*) \leqslant \alpha$, а мерозначная функция $m.\colon \mathbb{R} \to \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ — решение задачи Коши (1.1), (1.2). Тогда для траектории $\{m_t\colon t \in [0,T]\}$ решения найдется такая функция $G_1(T,\alpha) \geqslant 0$, что для любого $t \in [0,T]$ выполняется оценка*

$$\varsigma_p(m_t) \leqslant G_1(T,\alpha).$$

Предложение 1.3. *Пусть $T > 0$, m_* и α таковы, что $\varsigma_p(m_*) \leqslant \alpha$, а мерозначная функция $m.\colon \mathbb{R} \to \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ — решение задачи Коши (1.1), (1.2). Тогда, найдется такая функция $G_2(T,\alpha) \geqslant 0$, что для любых $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant T$ и любого $x \in \mathbb{R}^d$ будет справедлива следующая оценка:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|f(\mathsf{X}^{s,x}_{m.}(r), m_r) - f(x, m_s)\|^p \, m_s(dx)\right)^{1/p} \leqslant G_2(T,\alpha)\cdot(r-s).$$

1.3. Барицентрическая дифференцируемость

Для пространства $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ построено большое количество различных обобщений понятия дифференцируемости (см., например [20–23, 26]). Мы будем использовать понятия барицентрических суб- и супердифференциалов из работы [9].

Определение 1.5. Пусть $q = p' = \frac{p}{p-1}$, а функционал $\phi\colon \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ полунепрерывен сверху. Тогда *барицентрическим субдифференциалом* $\partial_b^-\phi(m)$ функции ϕ в точке m будем называть множество всех таких функций $\gamma \in \mathscr{L}_q(\mathbb{R}^d, m; \mathbb{R}^{d*})$, что для любой функции $b \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^d, m; \mathbb{R}^d)$ найдется монотонная функция $\xi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ со свойствами:

- $\xi(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$;
- для любого $\tau > 0$ выполняется соотношение

$$\phi((\mathrm{Id} + \tau b)\sharp m) - \phi(m) \geqslant \tau \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x)\cdot b(x)\, m(dx) - \tau\xi(\tau).$$

Барицентрическим супердифференциалом $\partial_b^+\phi(m)$ функции ϕ в точке m будем называть множество всех функций $\gamma \in \mathscr{L}_q(\mathbb{R}^d, m; \mathbb{R}^{d*})$, удовлетворяющих следующему включению:

$$(-\gamma) \in \partial_b^-(-\phi)(m).$$

Всюду далее под суб-/супердифференцируемостью будет подразумеваться именно барицентрическая суб-/супердифференцируемость.

§ 2. Теорема Четаева для нелокального уравнения неразрывности

Для классических динамических систем в конечномерных евклидовых пространствах известен следующий результат о неустойчивости.

Теорема 2.1 (Теорема Четаева). *Пусть для системы*

$$\dot{x} = f(x), \quad x = x_0$$

существует такая функция $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, *что:*

(1) V *дифференцируема в некоторой окрестности* 0*;*

(2) $V(0) = 0$, *и в сколь угодно малой окрестности* 0 *имеются точки* x, *для которых* $V(x) > 0$*;*

(3) *в области* $V > 0$ *производная в силу системы* $\dot{V} \cdot f > 0$, *причем в области* $V > \alpha$ *производная* $\dot{V} \cdot f \geqslant \beta > 0$.

Тогда нулевое положение равновесия системы является неустойчивым.

Основным результатом статьи является теорема, аналогичная приведенному варианту теоремы Четаева, перенесенная на случай нелокального уравнения неразрывности. Для начала определим понятия теории устойчивости по Ляпунову для пространства $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$, наделенного метрикой Канторовича W_p.

Определение 2.1. *Положением равновесия уравнения* (1.1) будем называть такую меру $\hat{m} \in \mathbb{R}^d$, что мерозначная функция $m_t \equiv \hat{m}$ является решением уравнения (1.1). Исходя из определения 1.4, данное условие можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{div}(f(x, \hat{m})\hat{m}) = 0.$$

Определение 2.2. Положение равновесия $\hat{m}$ является *неустойчивым*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого $\delta > 0$ можно подобрать начальную позицию $m_* \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ и момент времени $T > 0$, что $W_p(\hat{m}, m_*) < \delta$ и $W_p(\hat{m}, m_T) \geqslant \varepsilon$. Здесь $m_\cdot$ — решение уравнения (1.1) с начальным условием $m_0 = m_*$.

Замечание 2.1. Учитывая непрерывность решения уравнения (1.1), достаточно считать, что

$$W_p(\hat{m}, m_T) = \varepsilon.$$

Определение 2.3. Функцию $\phi\colon \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ будем называть локально липшицевой субдифференцируемой *функцией Ляпунова* для положения равновесия $\hat{m}$ уравнения (1.1), если выполнены следующие условия:

(1) ϕ субдифференцируема в шаре $\mathsf{B}_R(\hat{m})$, для некоторого $R > 0$;

(2) $\phi(\hat{m}) = 0$ и для любого $R > 0$ существует такая мера $\mu \in \mathsf{B}_R(\hat{m})$, что $\phi(\mu) > 0$;

(3) для любого $\alpha > 0$ найдется такое $\beta > 0$, что для всех $\mu \in \mathsf{L}_\alpha(\phi)$

$$\sup_{\gamma \in \partial_b^- \phi(\mu)} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x) \cdot f(x, \mu)\, \mu(dx) \geqslant \beta.$$

Второе условие обобщает свойство положительной определенности функции Ляпунова, в то время как третье условие обобщает отделимость от нуля «производной в силу системы».

Напомним, что $\mathsf{B}_R(\hat{m})$ — шар радиуса R с центром в точке $\hat{m}$, а $\mathsf{L}_\alpha(\phi)$ — множество Лебега функции ϕ с уровнем α.

Теорема 2.2 (Аналог теоремы Четаева). *Пусть мера $\hat{m} \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ — положение равновесия уравнения (1.1), функция $f\colon \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ удовлетворяет предположению 1.1, а также существует локально липшицевая субдифференцируемая функция Ляпунова ϕ. Тогда положение равновесия $\hat{m}$ неустойчиво.*

Для доказательства нам потребуется следующая вспомогательная оценка неубывающего роста функции Ляпунова ϕ вдоль траектории движения системы.

Лемма 2.1. *Пусть $\alpha > 0$ и $T > 0$. Тогда в условиях теоремы 2.2 существует такая константа $C(T, m_*)$, что для любых $\varepsilon > 0$ и $s \in [0, T)$ можно подобрать такое $r \in (0, T]$, что неравенство*

$$\phi(m_\theta) - \phi(m_s) \geqslant \big(\beta - C(T, m_*) \cdot \varepsilon\big) \cdot (\theta - s) \tag{2.1}$$

выполнено при $m_s \in \mathsf{L}_\alpha(\phi)$ и $\theta \in (s, r]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$, $s \in [0, T)$ и $m_s \in \mathsf{L}_\alpha(\phi)$. Из условия (3) определения функции Ляпунова выберем такой субдифференциал $\gamma_s \in \partial_b^-(m_s)$, чтобы выполнялась следующая оценка:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \gamma_s(x) \cdot f(x, m_s)\, m_s(dx) \geqslant \beta - \varepsilon.$$

Далее выберем $r \in (s, T]$, $\theta \in (s, r]$ и $\tau > 0$ так, что

$$\xi_s(\tau) \leqslant \varepsilon,$$
$$\tau = (\theta - s) \leqslant (r - s) \leqslant \varepsilon.$$

Здесь ξ_s — функция, заданная в определении 1.5, удовлетворяющая неравенству

$$\phi\big((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s\big) - \phi(m_s) \geqslant \tau \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_s(x) \cdot b_s(x)\, m_s(dx) - \tau \xi_s(\tau).$$

Положим

$$b_s(x) \triangleq f(x, m_s)$$

и выберем произвольное $\theta \in (s, r]$. Рассмотрим разность

$$\phi(m_\theta) - \phi(m_s) = \Big[\phi(m_\theta) - \phi\big((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s\big)\Big] + \Big[\phi\big((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s\big) - \phi(m_s)\Big].$$

В силу выбора τ и θ имеем, что

$$\phi\big((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s\big) - \phi(m_s) \geqslant (r - s) \cdot (\beta - 2\varepsilon) \geqslant (\theta - s) \cdot (\beta - 2\varepsilon). \tag{2.2}$$

Оценим теперь разность

$$\phi(m_\theta) - \phi\big((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s\big).$$

Для этого введем обозначение

$$D_s(T, m_*) \triangleq G_1(T, \varsigma_p(m_*)) + T \cdot \|f(\cdot, m_s)\|_{\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^d, m_s; \mathbb{R}^d)}.$$

Отметим, что в силу предложения 1.1

$$\varsigma_p\big((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s\big) \leqslant G_1\big(T, \varsigma_p(m_*)\big) + \tau \|f(\cdot, m_s)\|_{\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^d, m_s; \mathbb{R}^d)} \leqslant D_s(T, m_*),$$

а в силу предложения 1.2

$$\varsigma_p(m_t) \leqslant G_1\bigl(T, \varsigma_p(m_*)\bigr) \leqslant D_s(T, m_*).$$

Введем отображение

$$\chi\colon z \mapsto \left(z + \tau \cdot b_s(z),\ z + \int_s^\theta f(\mathsf{X}^{s,z}_{m.}(t), m_t)\, dt\right),$$

и построим план по правилу

$$\pi \triangleq \chi\sharp m_s \in \Pi\bigl((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s, m_\theta\bigr).$$

Тогда из локальной липшицевости функции ϕ и определения 1.2 следует неравенство

$$|\phi(m_\theta) - \phi((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s)| \leqslant$$

$$\leqslant K_{D_s(T,m_*)} \cdot W_p\bigl((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s, m_\theta\bigr) \leqslant K_{D_s(T,m_*)} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \|x' - y'\|^p\, \pi(dx'dy')\right)^{1/p} =$$

$$= K_{D_s(T,m_*)} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left\| x + (\theta - s) \cdot b_s(x) - x - \int_s^\theta f(\mathsf{X}^{s,x}_{m.}(t), m_s)\, dt \right\|^p m_s(dx)\right)^{1/p}.$$

Используя неравенство предложения 1.3, продолжим предыдущую оценку:

$$\bigl|\phi(m_\theta) - \phi\bigl((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s\bigr)\bigr| \leqslant$$
$$\leqslant K_{D_s(T,m_*)} \cdot G_2\bigl(T, \varsigma_p(m_*)\bigr) \cdot (\theta - s)^2 \leqslant K_{D_s(T,m_*)} \cdot G_2\bigl(T, \varsigma_p(m_*)\bigr) \cdot \varepsilon \cdot (\theta - s).$$

В силу монотонности и ограниченности K_α по параметру α можно определить число $\check{K} \triangleq \sup\limits_{s \in [0,T]} K_{D_s(T,m_*)}$ и получить неравенство

$$\bigl|\phi(m_\theta) - \phi\bigl((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s\bigr)\bigr| \leqslant \check{K} \cdot G_2\bigl(T, \varsigma_p(m_*)\bigr) \cdot \varepsilon \cdot (\theta - s).$$

Следовательно,

$$\phi(m_\theta) - \phi((\mathrm{Id} + \tau b_s)\sharp m_s) \geqslant -\check{K} \cdot G_2(T, \varsigma_p(m_*)) \cdot \varepsilon \cdot (\theta - s). \tag{2.3}$$

Полагая $C(T, m_*) \triangleq 2 + \check{K} \cdot G_2\bigl(T, \varsigma_p(m_*)\bigr)$ и учитывая оценки (2.2) и (2.3), получаем искомую оценку (2.1). □

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.2. Для начала зафиксируем число $\alpha > 0$ и момент времени $T > 0$. Рассмотрим множество

$$\Theta \triangleq \Bigl\{\theta \in [0, T]\colon \phi(m_\theta) - \phi(m_0) \geqslant \bigl(\beta - C(T, m_*) \cdot \varepsilon\bigr) \cdot \theta\Bigr\}.$$

Данное множество непусто, так как $0 \in \Theta$, и замкнуто в силу непрерывности функций $m.$ и $\phi(\cdot)$. Также очевидно, что $\{m_\theta\colon \theta \in \Theta\}$ является подмножеством $\mathsf{L}_\alpha(\phi)$, если $m_0 \in \mathsf{L}_\alpha(\phi)$ и $\varepsilon < \frac{\beta}{C(T,m_*)}$. Покажем, что в этих условиях $\check{\theta} \triangleq \sup\Theta \in \Theta = T$. Отсюда будет следовать инвариантность множества $\mathsf{L}_\alpha(\phi)$.

Пусть, от противного, $\check\theta < T$. Из вложения $\check\theta \in \Theta$, упомянутой связи множества Θ с множеством $\mathsf{L}_\alpha(\phi)$ и оценки (2.1) следует существование такого $\theta \in (\check\theta, T]$, что

$$\phi(m_\theta) - \phi(m_{\check\theta}) \geqslant \big(\beta - C(T, m_*)\cdot\varepsilon\big)\cdot(\theta - \check\theta).$$

По построению $\check\theta$ имеем

$$\phi(m_\theta) - \phi(m_0) = \big(\phi(m_\theta) - \phi(m_{\check\theta})\big) - \big(\phi(m_{\check\theta}) - \phi(m_0)\big) \geqslant \big(\beta - C(T, m_*)\cdot\varepsilon\big)\cdot\theta,$$

то есть $\theta \in \Theta$ и $\theta > \check\theta$. Это противоречит предположению о том, что $\check\theta = \sup\Theta$. Таким образом, $\sup\Theta = T \in \Theta$ и, следовательно,

$$\phi(m_T) - \phi(m_0) \geqslant \big(\beta - C(T, m_*)\cdot\varepsilon\big)\cdot T.$$

Так как ε и T выбирались произвольными, то, устремляя ε к 0, получим при любом $T > 0$

$$\phi(m_T) - \phi(m_0) \geqslant \beta T. \tag{2.4}$$

Покажем теперь, что положение равновесия $\hat m$ является неустойчивым. Пусть верно обратное, и $\hat m$ устойчиво, то есть для любого $\Omega \in (0, R]$ найдется такое $\omega \in (0, R]$, что для любого начального положения m_* со свойством $W_p(\hat m, m_*) < \omega$ и любого момента времени $t > 0$ выполняется неравенство

$$W_p(\hat m, m_t) < \Omega,$$

где $m_\cdot$ — решение уравнения (1.1) с начальным условием $m_0 = m_*$.

Из условия (2) определения 2.3 выберем начальное положение m_* со свойствами $W_p(\hat m, m_*) < \omega$ и $\phi(m_*) > 0$. Обозначив $\alpha \triangleq \phi(m_*) > 0$, в силу условия (3) определения 2.3 можно подобрать такое число $\beta > 0$, что будет выполнено неравенство (2.4):

$$\phi(m_t) \geqslant \beta t + \phi(m_0).$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, получим

$$\phi(m_t) \to \infty.$$

Но из сделанного предположения $W_p(\hat m, m_t) < \Omega$, то есть $m_t \in \mathsf{B}_\Omega(\hat m)$, для всех $t \geqslant 0$. Это противоречит локальной ограниченности функции ϕ (см. замечание 1.3). □

Аналогично выводится аналог теоремы Четаева в случае супердифференцируемой функции Ляпунова.

Теорема 2.3. *Пусть мера $\hat m \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ — положение равновесия уравнения (1.1), функция $f\colon \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ удовлетворяет предположению 1.1, а также существует локально липшицевая функция $\phi\colon \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *ϕ супердифференцируема в шаре $\mathsf{B}_R(\hat m)$, для некоторого $R > 0$;*

(2) *для любого $R > 0$ существует такая точка $\mu \in \mathsf{B}_R(\hat m)$, что $\phi(\mu) > 0$;*

(3) *для любого $\alpha > 0$ найдется такое $\beta > 0$, что для всех $\mu \in \mathsf{L}_\alpha(\phi)$*

$$\sup_{\gamma\in\partial_b^+\phi(\mu)} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x)\cdot f(x,\mu)\,\mu(dx) \geqslant \beta.$$

Тогда положение равновесия $\hat m$ неустойчиво.

2.1. Пример

Для построения примера нам потребуются понятия так называемых вариационной и внутренней производных, подробно рассмотренные в работах [20–22].

Определение 2.4. Пусть $\Phi\colon \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$. Тогда *вариационной производной* функционала Φ в точке $m_* \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ будем называть функцию $\dfrac{\delta\Phi}{\delta m}\colon \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую соотношению

$$\lim_{s\downarrow 0} \frac{\Phi((1-s)m_* + sm) - \Phi(m_*)}{s} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta\Phi}{\delta m}(m_*, y)\,\big[m(dy) - m_*(dy)\big],$$

для любой меры $m \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$.

Определение 2.5. Пусть $\Phi\colon \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ имеет вариационную производную $\dfrac{\delta\Phi}{\delta m}$, которая дифференцируема по второму аргументу. Тогда *внутренней производной* функции Φ в точке $m \in \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ будем называть функцию $\nabla_m\Phi\colon \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d*}$, определяемую по правилу

$$\nabla_m\Phi(m, y) \triangleq \nabla_y \frac{\delta\Phi}{\delta m}(m, y).$$

Пусть $p = 2$ и

$$E(m) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} x\, m(dx),$$
$$v(x, m) \triangleq \|x\|^2 - \|E(m)\|^2.$$

Рассмотрим функционал

$$\phi(m) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x, m)\, m(dx)$$

и систему агентов, заданную динамикой

$$\dot{x} = \big(\nabla_m\phi(m, x)\big)^\top.$$

Соответствующее уравнение неразрывности имеет вид:

$$\partial_t m_t + \operatorname{div}\Big(\big(\nabla_m\phi(m, x)\big)^\top m_t\Big) = 0. \tag{2.5}$$

Отметим, что (см. [27, Proposition A.3])

$$\nabla_m\phi(m, x) = \nabla_x v(x, m) + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_m v(y, m, x)\, m(dy) = 2(x - E(m))^\top.$$

Отсюда,

- $\phi(\delta_0) = v(0, \delta_0) = 0$;
- $\nabla_x v$ и $\nabla_m v$ определены всюду на $\mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$ и $\mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ соответственно;
- $\nabla_x v(x, m)$ и $\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_m v(y, m, x)\, m(dy)$ липшицевы по совокупности аргументов;
- $\nabla_m\phi(\delta_0, 0) = \nabla_x v(0, \delta_0) + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_m v(0, \delta_0, 0)\, \delta_0(dy) = 0.$

Покажем, что $\hat{m} = \delta_0$ является положением равновесия уравнения (2.5), то есть

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \varphi(x) \cdot \nabla_m \phi(\hat{m}, x)^\top \, \hat{m}(dx) = \nabla_x \varphi(0) \cdot \nabla_m \phi(\hat{m}, 0)^\top = 0,$$

для любой $\varphi \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$. Левая часть может быть переписана в виде

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \varphi(x) \cdot \left(\nabla_x v(x, \hat{m}) + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_m v(y, \hat{m}, x) \, \hat{m}(dy) \right)^\top \hat{m}(dx) = \\ = \nabla_x \varphi(0) \cdot \big(\nabla_x v(0, \delta_0) + \nabla_m v(0, \delta_0, 0) \big)^\top = 0.$$

Проверим условия теоремы 2.2. В [9, утверждение 2.24] было показано, что в случае существования внутренней производной

$$\partial_b^- \phi(m) = \big\{ \nabla_m \phi(m, \cdot) \big\}.$$

Функционал ϕ, таким образом, обладает следующими свойствами.

- $\phi(\hat{m}) = 0$.
- Выберем произвольные $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$ и $\pi \in \Pi_o(\mu, \nu)$. Из следующей цепочки неравенств следует локальная липшицевость ϕ:

$$\phi(\mu) - \phi(\nu) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x, \mu) \, \mu(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} v(y, \nu) \, \nu(dy) = \\ = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (v(x, \mu) - v(y, \nu)) \, \pi(dxdy) = \\ = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (\|x\|^2 - \|y\|^2) \, \pi(dxdy) + \|E(\mu)\|^2 - \|E(\nu)\|^2$$

  Оценим первое слагаемое, пользуясь обратным неравенством треугольника и неравенством Гёльдера:

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (\|x\|^2 - \|y\|^2) \, \pi(dxdy) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (\|x\| - \|y\|) \cdot (\|x\| + \|y\|) \, \pi(dxdy) \leqslant \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (\|x - y\|) \cdot (\|x\| + \|y\|) \, \pi(dxdy) \leqslant W_2(\mu, \nu) \cdot (\varsigma_2(\mu) + \varsigma_2(\nu)).$$

  Аналогично оценим второе слагаемое:

$$\|E(\mu)\|^2 - \|E(\nu)\|^2 = (\|E(\mu)\| - \|E(\nu)\|) \cdot (\|E(\mu)\| + \|E(\nu)\|) \leqslant \\ \leqslant (\|E(\mu) - E(\nu)\|) \cdot (\|E(\mu)\| + \|E(\nu)\|) \leqslant W_2(\mu, \nu) \cdot (\varsigma_2(\mu) + \varsigma_2(\nu))$$

  Таким образом,

$$|\phi(\mu) - \phi(\nu)| \leqslant 2 \cdot W_2(\mu, \nu) \cdot \big(\varsigma_2(\mu) + \varsigma_2(\nu) \big)$$

- Рассматривая, например, d-мерные гауссовы меры γ_n^d с параметрами $\big(0, \frac{1}{n^2} \cdot \mathbb{I}\big)$, получим, что γ_n^d сходится к δ_0 и $\phi(\gamma_n^d) = \frac{d}{n^2} > 0$. То есть сколь угодно близко к положению равновесия существуют точки со строго положительным значением функции ϕ.

- Рассмотрим множество $\mathsf{L}_\alpha(\phi)$ для некоторого $\alpha > 0$, то есть множество
$$\left\{m \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)\colon \int_{\mathbb{R}^d} x^2\, m(dx) - E(m)^2 \geqslant \alpha\right\}.$$
Тогда для точек данного множества справедливо неравенство:
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_m\phi(m,x)\cdot\nabla_m\phi(m,x)^\top\, m(dx) = \|\nabla_m\phi(m,\cdot)\|^2_{\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^d,m;\mathbb{R}^{d*})} =\\ = 4\int_{\mathbb{R}^d}\big(x - E(m)\big)^2\, m(dx) = 4\int_{\mathbb{R}^d}\big(x^2 - 2x\cdot E(m) + E(m)^2\big)\, m(dx) =\\ = 4\bigg(\int_{\mathbb{R}^d} x^2\, m(dx) - 2E(m)\cdot\int_{\mathbb{R}^d} x\, m(dx) + E(m)^2\bigg) =\\ = 4\bigg(\int_{\mathbb{R}^d} x^2\, m(dx) - E(m)^2\bigg) \geqslant 4\alpha \triangleq \beta.\end{aligned}$$

Следовательно, положение равновесия $\hat{m}$ и функция ϕ удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Это влечет неустойчивость $\hat{m}$.

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2025-1549).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boffi V. C., Spiga G. Continuity equation in the study of nonlinear particle-transport evolution problems // Physical Review A. 1984. Vol. 29. No. 2. P. 782–790. https://doi.org/10.1103/physreva.29.782
2. Tucci M., Volonteri M. Constraining supermassive black hole evolution through the continuity equation // Astronomy and Astrophysics. 2017. Vol. 600. No. A64. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201628419
3. Botsford L. W. Optimal fishery policy for size-specific, density-dependent population models // Journal of Mathematical Biology. 1981. Vol. 12. No. 3. P. 265–293. https://doi.org/10.1007/bf00276917
4. Di Mario C., Meneveau N., Gil R., de Jaegere P., de Feyter P. J., Slager C. J., Roelandt Jos R. T. C., Serruys P. W. Maximal blood flow velocity in severe coronary stenoses measured with a Doppler guidewire // American Journal of Cardiology. 1993. Vol. 71. No. 14. P. D54–D61. https://doi.org/10.1016/0002-9149(93)90134-x
5. Pluchino A., Latora V., Rapisarda A. Changing opinions in a changing world: a new perspective in sociophysics // International Journal of Modern Physics C. 2005. Vol. 16. No. 04. P. 515–531. https://doi.org/10.1142/s0129183105007261
6. Ambrosio L., Crippa G. Continuity equations and ODE flows with non-smooth velocity // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. 2014. Vol. 144. No. 6. P. 1191–1244. https://doi.org/10.1017/s0308210513000085
7. Bonnet B., Frankowska H. Viability and exponentially stable trajectories for differential inclusions in Wasserstein spaces // 2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2022. P. 5086–5091. https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9992888
8. D’Apice C., Manzo R., Piccoli B., Vespri V. Lyapunov stability for measure differential equations // Mathematical Control and Related Fields. 2024. Vol. 14. No. 4. P. 1391–1407. https://doi.org/10.3934/mcrf.2024028
9. Авербух Ю. В., Волков А. М. Устойчивость по Ляпунову положения равновесия нелокального уравнения неразрывности // Математический сборник. 2025. Т. 216. № 2. С. 3–31. https://doi.org/10.4213/sm10084
10. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения: дис. … д-ра матем. / Императорский Московский Университет. Москва, 1892.

11. Ляпунов А. М. К вопросу об устойчивости движения // Сообщения Харьковского математического общества. Вторая серия. 1893. Т. 3. С. 265–272. https://www.mathnet.ru/rus/khmo263
12. Четаев Н. Г. Об устойчивости движения // Учёные записки Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова–Ленина. 1934. Т. 94. № 2. С. 1–14.
13. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. https://zbmath.org/0760.34045
14. Dellago C., Posch H. A., Hoover W. G. Lyapunov instability in a system of hard disks in equilibrium and nonequilibrium steady states // Physical Review E. 1996. Vol. 53. No. 2. P. 1485–1501. https://doi.org/10.1103/physreve.53.1485
15. Posch H. A., Hoover W. G. Lyapunov instability of dense Lennard-Jones fluids // Physical Review A. 1988. Vol. 38. No. 1. P. 473–482. https://doi.org/10.1103/physreva.38.473
16. Latora V., Rapisarda A., Ruffo S. Lyapunov instability and finite size effects in a system with long-range forces // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80. No. 4. P. 692–695. https://doi.org/10.1103/physrevlett.80.692
17. De Cruz L., Schubert S., Demaeyer J., Lucarini V., Vannitsem S. Exploring the Lyapunov instability properties of high-dimensional atmospheric and climate models // Nonlinear Processes in Geophysics. 2018. Vol. 25. No. 2. P. 387–412. https://doi.org/10.5194/npg-25-387-2018
18. Skiba Yu. N. Lyapunov instability of the Rossby–Haurwitz waves and dipole modons // Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1991. Vol. 6. No. 6. P. 515–535. https://doi.org/10.1515/rnam.1991.6.6.515
19. Braun P., Grüne L., Kellett C. M. Complete instability of differential inclusions using Lyapunov methods // 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2018. P. 718–724. https://doi.org/10.1109/cdc.2018.8618663
20. Kolokoltsov V. N. Nonlinear Markov processes and kinetic equations. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 2010. https://doi.org/10.1017/CBO9780511760303
21. Kolokoltsov V. Differential equations on measures and functional spaces. Cham: Birkhäuser, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03377-4
22. Cardaliaguet P., Delarue F., Lasry J.-M., Lions P.-L. The master equation and the convergence problem in mean field games. Princeton: Princeton University Press, 2019. https://doi.org/10.23943/princeton/9780691190716.001.0001
23. Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Gradient flows. In metric spaces and in the space of probability measures. Basel: Birkhäuser, 2005. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8722-8
24. Santambrogio F. Optimal transport for applied mathematicians. Calculus of variations, PDEs and modeling. Cham: Birkhäuser, 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-20828-2
25. Averboukh Y. V. A mean field type differential inclusion with upper semicontinuous right-hand side // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 489–501. https://doi.org/10.35634/vm220401
26. Gangbo W., Tudorascu A. On differentiability in the Wasserstein space and well-posedness for Hamilton–Jacobi equations // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 2019. Vol. 125. P. 119–174. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.09.003
27. Averboukh Y., Khlopin D. Pontryagin maximum principle for the deterministic mean field type optimal control problem via the Lagrangian approach // arXiv:2207.01892v3 [math.OC]. 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.01892

Поступила в редакцию 25.08.2025
Принята к публикации 29.11.2025

Волков Алексей Михайлович, младший научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620077, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.
ORCID: https://orcid.org/0009-0001-7337-2695
E-mail: volkov@imm.uran.ru

Цитирование: А. М. Волков. Неустойчивость по Ляпунову положения равновесия нелокального уравнения неразрывности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 4. С. 497–512.

MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 4. Pp. 497–512.

A. M. Volkov

Lyapunov instability of the equilibrium of the non-local continuity equation

Keywords: non-local continuity equation, Lyapunov second method, non-smooth Lyapunov function, instability, derivatives in the space of measures.

MSC2020: 34D20, 35B35, 35F20, 35Q70, 35R06, 82C22

DOI: 10.35634/vm250401

The article is devoted to the development of Lyapunov methods for analyzing the instability of the equilibrium of a dynamical system in the space of probability measures, given by the nonlocal continuity equation. We consider the case of non-smooth Lyapunov function, but barycentrically subdifferentiable only. Sufficient instability conditions are obtained, which are an analogue of the Chetaev theorem and are based on an analysis of the behavior of the non-smooth Lyapunov function in the neighbourhood of the equilibrium. Also we give an example of a dynamical system, the instability of whose equilibrium position is proved using the obtained theorem.

Funding. The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2025-1549).

REFERENCES

1. Boffi V. C., Spiga G. Continuity equation in the study of nonlinear particle-transport evolution problems, *Physical Review A*, 1984, vol. 29, no. 2, pp. 782–790. https://doi.org/10.1103/physreva.29.782
2. Tucci M., Volonteri M. Constraining supermassive black hole evolution through the continuity equation, *Astronomy and Astrophysics*, 2017, vol. 600, no. A64. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201628419
3. Botsford L. W. Optimal fishery policy for size-specific, density-dependent population models, *Journal of Mathematical Biology*, 1981, vol. 12, no. 3, pp. 265–293. https://doi.org/10.1007/bf00276917
4. Di Mario C., Meneveau N., Gil R., de Jaegere P., de Feyter P. J., Slager C. J., Roelandt Jos R. T. C., Serruys P. W. Maximal blood flow velocity in severe coronary stenoses measured with a Doppler guidewire, *American Journal of Cardiology*, 1993, vol. 71, no. 14, pp. D54–D61. https://doi.org/10.1016/0002-9149(93)90134-x
5. Pluchino A., Latora V., Rapisarda A. Changing opinions in a changing world: a new perspective in sociophysics, *International Journal of Modern Physics C*, 2005, vol. 16, no. 04, pp. 515–531. https://doi.org/10.1142/s0129183105007261
6. Ambrosio L., Crippa G. Continuity equations and ODE flows with non-smooth velocity, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 2014, vol. 144, no. 6, pp. 1191–1244. https://doi.org/10.1017/s0308210513000085
7. Bonnet B., Frankowska H. Viability and exponentially stable trajectories for differential inclusions in Wasserstein spaces, *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*, IEEE, 2022, pp. 5086–5091. https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9992888
8. D'Apice C., Manzo R., Piccoli B., Vespri V. Lyapunov stability for measure differential equations, *Mathematical Control and Related Fields*, 2024, vol. 14, no. 4, pp. 1391–1407. https://doi.org/10.3934/mcrf.2024028
9. Averboukh Yu. V., Volkov A. M. Lyapunov stability of an equilibrium of the nonlocal continuity equation, *Sbornik: Mathematics*, 2025, vol. 216, no. 2, pp. 140–167. https://doi.org/10.4213/sm10084e
10. Lyapunov A. M. *General problem of the stability of motion*, Dr. Sci. (Math.) Dissertation, Imperial Moscow University, Moscow, 1892. (In Russian).
11. Liapounoff A. On the issue of motion stability, *Communications de la Société mathématique de Kharkow. 2-éme série*, 1893, vol. 3, pp. 265–272 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/khmo263

12. Chetaev N. G. On stability of motion, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 1934, vol. 94, no. 2, pp. 1–14 (in Russian).
13. Chetaev N. G. *Ustoichivost' dvizheniya* (Stability of motion), Moscow: Nauka, 1990. https://zbmath.org/0760.34045
14. Dellago C., Posch H. A., Hoover W. G. Lyapunov instability in a system of hard disks in equilibrium and nonequilibrium steady states, *Physical Review E*, 1996, vol. 53, no. 2, pp. 1485–1501. https://doi.org/10.1103/physreve.53.1485
15. Posch H. A., Hoover W. G. Lyapunov instability of dense Lennard-Jones fluids, *Physical Review A*, 1988, vol. 38, no. 1, pp. 473–482. https://doi.org/10.1103/physreva.38.473
16. Latora V., Rapisarda A., Ruffo S. Lyapunov instability and finite size effects in a system with long-range forces, *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, no. 4, pp. 692–695. https://doi.org/10.1103/physrevlett.80.692
17. De Cruz L., Schubert S., Demaeyer J., Lucarini V., Vannitsem S. Exploring the Lyapunov instability properties of high-dimensional atmospheric and climate models, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2018, vol. 25, no. 2, pp. 387–412. https://doi.org/10.5194/npg-25-387-2018
18. Skiba Yu. N. Lyapunov instability of the Rossby–Haurwitz waves and dipole modons, *Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 1991, vol. 6, no. 6, pp. 515–535. https://doi.org/10.1515/rnam.1991.6.6.515
19. Braun P., Grüne L., Kellett C. M. Complete instability of differential inclusions using Lyapunov methods, *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, IEEE, 2018, pp. 718–724. https://doi.org/10.1109/cdc.2018.8618663
20. Kolokoltsov V. N. *Nonlinear Markov processes and kinetic equations*, Cambridge, MA: Cambridge University Press, 2010. https://doi.org/10.1017/CBO9780511760303
21. Kolokoltsov V. *Differential equations on measures and functional spaces*, Cham: Birkhäuser, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03377-4
22. Cardaliaguet P., Delarue F., Lasry J.-M., Lions P.-L. *The master equation and the convergence problem in mean field games*, Princeton: Princeton University Press, 2019. https://doi.org/10.23943/princeton/9780691190716.001.0001
23. Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. *Gradient flows. In metric spaces and in the space of probability measures*, Basel: Birkhäuser, 2005. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8722-8
24. Santambrogio F. *Optimal transport for applied mathematicians. Calculus of variations, PDEs and modeling*, Cham: Birkhäuser, 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-20828-2
25. Averboukh Y. V. A mean field type differential inclusion with upper semicontinuous right-hand side, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 489–501. https://doi.org/10.35634/vm220401
26. Gangbo W., Tudorascu A. On differentiability in the Wasserstein space and well-posedness for Hamilton–Jacobi equations, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2019, vol. 125, pp. 119–174. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.09.003
27. Averboukh Y., Khlopin D. Pontryagin maximum principle for the deterministic mean field type optimal control problem via the Lagrangian approach, *arXiv:2207.01892 [math.OC]*, 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.01892

Received 25.08.2025
Accepted 29.11.2025

Aleksei Mikhailovich Volkov, Junior Researcher, Department of Controlled Systems, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108 Russia.
ORCID: https://orcid.org/0009-0001-7337-2695
E-mail: volkov@imm.uran.ru

Citation: A. M. Volkov. Lyapunov instability of the equilibrium of the non-local continuity equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 4, pp. 497–512.