МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 4. С. 537–557.

УДК 519.644.5

© *Д. Ю. Иванов*

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ВБЛИЗИ И НА ГРАНИЦЕ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Получены аппроксимации нормальной производной потенциала простого слоя для двумерного уравнения Гельмгольца в приграничной области, включающей границу. Такие аппроксимации осуществимы для любой аналитически заданной границы класса C^5. Для их получения используются аналитическое интегрирование по гладкой компоненте функции расстояния, аддитивно-мультипликативный способ выделения особенности и кусочно-квадратичная интерполяция медленно изменяющихся функций. Доказано, что такие аппроксимации сходятся с кубической скоростью равномерно относительно расстояния до границы. Также доказано, что полуаналитические аппроксимации по аналогии с точной функцией терпят на границе разрыв, величина которого пропорциональна значениям интерполированной функции плотности. Теоретические выводы подтверждены результатами вычислений вблизи и на границе круговой области нормальной производной потенциала простого слоя.

Ключевые слова: квадратурная формула, нормальная производная потенциала простого слоя, уравнение Гельмгольца, почти сингулярные интегралы, равномерная сходимость.

DOI: 10.35634/vm250403

Введение

Метод граничных элементов (МГЭ) — один из основных численных методов решения краевых задач наряду с методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР) [1, п. 2.5]. Главное его достоинство заключается в том, что дискретизации подвергается лишь граница $\partial\Omega$ расчетной области Ω, что существенно сокращает вычислительные затраты по сравнению с МКЭ и МКР, требующими разбиения всей области.

В основе МГЭ лежит использование граничных интегральных уравнениях (ГИУ) [2, п. 1.1]. Решение краевой задачи в произвольной точке ищется в виде потенциала — интегрального оператора, зависящего от неизвестной функции плотности $v(x')$, которая определяется на границе $\partial\Omega$ из ГИУ. Сами ГИУ формируются с использованием потенциалов и их производных, заданных на границе области.

Вычисление потенциалов и их производных в общем случае осуществляется приближенно и состоит из двух этапов. На первом этапе граница $\partial\Omega$ разбивается на граничные элементы (ГЭ), и на каждом из них плотность $v(x')$ аппроксимируется интерполяционным полиномом, который задается значениями $v(x')$ в узловых точках. В двумерном случае ГЭ — это дуги кривой $\partial\Omega$. На втором этапе осуществляется приближенное вычисление интегралов на ГЭ, так как полученные после интерполяции $v(x')$ интегралы в общем случае также не имеют точного аналитического решения. В двумерном случае их обычно вычисляют с помощью квадратурных формул Гаусса (КФГ) [3, гл. 3, § 5, п. 3].

Однако точность КФГ резко падает, если точка наблюдения x находится слишком близко к границе $\partial\Omega$, а в самих узлах КФГ вычисление интегралов невозможно. Это явление, известное как эффект пограничного слоя, обусловлено сингулярностью ядра интегрального оператора при $x = x' \in \partial\Omega$. В зависимости от положения точки x интегралы на ГЭ делятся на сингулярные (СИ) — если точка наблюдения x лежит на ГЭ, и почти сингулярные (ПСИ) — если точка x лежит близко к ГЭ, но не на самом ГЭ.

Вычисление с приемлемой точностью СИ требуется при решении ГИУ, вычисление ПСИ — для анализа решений вблизи границы области, где МКЭ и МКР неэффективны из-за необходимости чрезмерно детальной дискретизации, а МГЭ демонстрирует преимущество, поскольку не требует дискретизации всей области. Поэтому представляют интерес специализированные методы, включая полуаналитические [4–17], разработанные для вычисления СИ и ПСИ.

Один из полуаналитических методов [4–6], предназначенный для аппроксимации двумерных потенциалов и их производных, основан на переходе от переменной интегрирования по длине дуги к переменной $\rho = (r^2 - d^2)^{1/2}$, где r и d — расстояния от точки наблюдения x до точки интегрирования $x' \in \partial\Omega$ и до кривой $\partial\Omega$ соответственно. Интегралы по ρ после частичной аппроксимации подынтегральной функции вычисляются аналитически. Для этого применяется мультипликативный способ выделения особенности: подынтегральная функция переменной ρ разбивается на два множителя, один из которых, включающий якобиан, является медленно изменяющейся функцией и поэтому аппроксимируется интерполяционными полиномами, а другой множитель, сингулярный или близкий к сингулярному, берется в качестве весовой функции.

Данный метод не требует аппроксимации границы для того, чтобы точное интегрирование стало возможным. Он может быть реализован для любой достаточно гладкой аналитически заданной кривой $\partial\Omega$, так как интегралы по переменной ρ зависят от кривой $\partial\Omega$ только параметрически и координатные функции не могут принципиально изменить вид подынтегральной функции. Если граничная кривая обладает достаточной гладкостью и известно ее аналитическое выражение, то не существует принципиальных ограничений для повышения порядка аппроксимации в рамках данного метода. Действительно, порядок аппроксимации здесь зависит от степени полинома, находящегося в числителе, поэтому рост степени полинома не приводит к существенному усложнению аналитического решения интеграла.

Заметим, что в полуаналитических методах [7–13], использующих локальные криволинейные координаты границы $\partial\Omega$, отличные от ρ, неограниченному увеличению порядка аппроксимации мешает то обстоятельство, что степени функции расстояния r^{2n} ($n \in \mathbb{N}$) находятся в знаменателе подынтегрального выражения или под знаком логарифма, и поэтому аппроксимация границы необходима. Действительно, для того чтобы точное интегрирование стало возможным, функция r^2 на ГЭ заменяется многочленом, образованным степенями значений локальных координат. Поскольку многочлен находится в знаменателе или под знаком логарифма, он обрезается до многочлена второй степени, иначе получение аналитического выражения для первообразной в общем случае невозможно. Поэтому использование в полуаналитических методах [7–13] полиномов более высоких степеней, чем вторая, для аппроксимации координатных функций границы $\partial\Omega$ не приводит к увеличению порядка аппроксимации.

В работах автора с помощью точного интегрирования по переменной ρ получены равномерно сходящиеся вблизи границы двумерной области аппроксимации потенциала двойного слоя (ПДС) для уравнения Гельмгольца [18], аппроксимации ПДС для уравнения Лапласа [19], аппроксимации нормальной производной (НП) потенциала простого слоя (ППС) для уравнения Лапласа [20], аппроксимации НП ППС и касательной производной ППС для уравнения Лапласа [21]. В настоящей работе на основе точного интегрирования по переменной ρ получены аппроксимации НП ППС для уравнения Гельмгольца для любой аналитически заданной границы класса C^5. Здесь, как и в работах [18–21], для аппроксимации интегралов, возникающих после интерполяции функции плотности $v(x')$ и находящихся на ограниченном расстоянии от точки наблюдения x, используется аддитивно-мультипликативный способ выделения особенности. А именно: интегралы на ГЭ представляются в виде суммы

нескольких интегралов, каждый из которых аппроксимируется описанным выше мультипликативным способом. Такая аддитивно-мультипликативная аппроксимация обладает равномерной сходимостью более высокого порядка, чем простая мультипликативная аппроксимация, описанная в работах [4–6], так как у весовых функций при этом уменьшается сингулярность.

Для аппроксимации медленно изменяющихся функций применяется кусочно-квадратичная интерполяция (ККИ). Вне окрестностей, где осуществляется точное интегрирование по ρ, для аппроксимации интегралов на ГЭ используются локальные КФГ с порядком аппроксимации не ниже пятого. Доказано, что полученные аппроксимации НП ППС сходятся с кубической скоростью равномерно в замкнутой приграничной области, включающей границу и ограниченной кривыми, отстоящими от границы на расстоянии трети радиуса Ляпунова. Также доказано, что аппроксимации обладают свойством, аналогичным свойству точной НП ППС: при переходе границы $\partial\Omega$ они терпят разрыв первого рода, величина которого пропорциональна значениям ККИ функции $v(x')$.

В заключительном параграфе приведены результаты вычисления НП ППС вблизи границы единичного круга, подтверждающие кубическую скорость равномерной сходимости полуаналитических аппроксимаций НП ППС.

§ 1. Постановка задачи

Пусть Ω_+ — двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$. В декартовых координатах (x_1, x_2) зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \widetilde{x}_1(s)$, $x_2 = \widetilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной граничной точки и заканчивающейся в точке $\widetilde{x}(s) \equiv (\widetilde{x}_1(s), \widetilde{x}_2(s))$, и увеличивается, когда область Ω_+ при обходе границы $\partial\Omega$ остается слева. Функции $\widetilde{x}_1(s)$, $\widetilde{x}_2(s)$ ($s \in \mathbb{R}$), периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимно однозначное отображение множества $[-S, S)$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^n$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $I_S \equiv [-S, S]$ производные $\widetilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0,n}$, $i = 1, 2$), причем $\widetilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \widetilde{x}_i^{(l)}(S-0)$. Будем считать, что $\partial\Omega \in C^2$, если иное не оговорено особо.

Через $C(\partial\Omega)$ обозначим банахово пространство периодических с периодом $2S$ и непрерывных на всей числовой оси $\mathbb{R}$ комплекснозначных функций $f(s)$, с нормой $\|f\|_{C(\partial\Omega)} \equiv \equiv \sup\limits_{s\in I_S} |f(s)|$. Через $C^n(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы пространства функций $f \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве I_S производные $f^{(l)}(s)$ ($l = \overline{1,n}$), с нормой $\|f\|_{C^n(\partial\Omega)} \equiv \equiv \sum\limits_{l=0}^{n} \|f^{(l)}\|_{C(\partial\Omega)}$ ($C^0(\partial\Omega) = C(\partial\Omega)$).

Обозначим через $\vec{e}(s)$ единичный вектор, направленный по касательной к кривой $\partial\Omega$ в точке $\widetilde{x}(s)$ в сторону увеличения параметра s, а через $\vec{n}(s)$ — единичную нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке $\widetilde{x}(s)$, направленную внутрь области Ω_+. Векторы $\vec{e}(s)$, $\vec{n}(s)$ образуют правую систему, и их координаты (x_1, x_2) вычисляются с помощью формул: $\vec{e}(s) = (\widetilde{x}_1'(s), \widetilde{x}_2'(s))$, $\vec{n}(s) = (-\widetilde{x}_2'(s), \widetilde{x}_1'(s))$.

Введем в рассмотрение локальные системы декартовых координат (ξ_s, η_s) с началами в точках $\widetilde{x}(s)$ и осями абсцисс и ординат, сонаправленными с векторами $\vec{e}(s)$ и $\vec{n}(s)$ соответственно. Точки $\widetilde{x}_d(s)$ ($d \in \mathbb{R}$) с локальными координатами $(\xi_s, \eta_s) = (0, d)$ при фиксированном s образуют нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящую через точку $\widetilde{x}(s)$ ($\widetilde{x}_0(s) \equiv \widetilde{x}(s)$). Пусть $I_D = [-D, 0) \cup (0, D]$, где D — треть радиуса круга Ляпунова. Тогда при фиксированном $d \in I_D$ соответствие между точками $\widetilde{x}(s)$ и $\widetilde{x}_d(s)$ ($s \in I_S$) взаимно однозначное, точки $\widetilde{x}_d(s)$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d \in C^1$, а нормали к кривой $\partial\Omega$ в точках $\widetilde{x}(s)$ являются одновременно и нормалями к кривой $\partial\Omega_d$ в соответствующих точках $\widetilde{x}_d(s)$ [22,

п. 102].

Условимся иногда для краткости не писать аргументы функции, если они такие же, какие используются при определении функции. При $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}}$ ($\mathrm{T} \equiv I_S \times I_D$) зададим функции u, w:

$$u(s,d,\kappa) \equiv \int_{I_S} g\, v(s+\sigma)\, d\sigma, \quad g(s,\sigma,d,\kappa) \equiv (2\pi)^{-1} \partial_{\vec{n}(s)} K_0(\kappa r), \tag{1.1}$$
$$w(\widetilde{x}_d(s),\kappa) \equiv \int_{I_S} p\, v(s+\sigma)\, d\sigma, \quad p(s,\sigma,d,\kappa) \equiv (2\pi)^{-1} K_0(\kappa r).$$

Здесь $\kappa \neq 0$, $\arg\kappa \in (-\pi/2, \pi/2]$; $r(s,\sigma,d) \equiv |\vec{r}| > 0$, $\vec{r}(s,\sigma,d) \equiv \overrightarrow{\widetilde{x}_d(s)\widetilde{x}(s+\sigma)}$; $\partial_{\vec{n}(s)}$ — производная по переменной $\widetilde{x}_d(s)$ в направлении $\vec{n}(s)$ в точке $\widetilde{x}_d(s)$: $\partial_{\vec{n}(s)} K_0(\kappa r) = \partial_d K_0(\kappa r)$; $K_0(z)$ — функция Макдональда, которая при $z \neq 0$, $\arg z \in (-\pi/2, \pi/2]$ допускает выражение в виде ряда:

$$K_0(z) = -[\ln(z/2) + \gamma] I_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-2} (z^2/4)^n \sum_{m=1}^{n} m^{-1}, \quad I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-2} (z^2/4)^n \tag{1.2}$$

(γ — постоянная Эйлера, $I_0(z)$ — модифицированная цилиндрическая функция I рода) [23, п. 3.71, формула (14)]. С учетом тождества $(2\pi)^{-1} K_0(\kappa r) \equiv i/4 H_0^{(1)}(i\kappa r)$ ($i^2 = -1$, $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля первого рода) функция w — ППС с плотностью v, функция $u = \partial_{\vec{n}(s)} w$ — НП ППС для двумерного уравнения Гельмгольца $\partial^2_{x_1 x_1} w + \partial^2_{x_2 x_2} w - \kappa^2 w = 0$ в приграничной области, образованной точками $\widetilde{x}_d(s)$ при $(s,d) \in \mathrm{T}$. При $d = 0$, $s \in I_S$ функция u — прямое значение НП ППС на границе $\partial\Omega$ [24, гл. 18, § 7].

В настоящей работе при $\kappa \neq 0$, $\arg\kappa \in (-\pi/2, \pi/2]$ получены аппроксимации $\breve{u}(s,d,\kappa)$ функции u, равномерно сходящиеся на множестве $\overline{\mathrm{T}}$ со скоростью $O(h^3)$, то есть для них выполняется оценка

$$|\breve{u} - u| \leqslant c(v,\kappa) h^3 \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}}), \tag{1.3}$$

где $c(v,\kappa)$ — не зависящая от h и (s,d) положительная постоянная (вплоть до параграфа 7 будем считать число κ постоянной величиной). Заметим, что аналогичные аппроксимации, сходящиеся с кубической скоростью равномерно в замкнутой приграничной области, были получены в работе [21] для НП ППС уравнения Лапласа, то есть для случая $\kappa = 0$.

§ 2. Некоторые сведения о квадратичной интерполяции

Рассмотрим квадратичную интерполяцию, которую мы здесь используем. Пусть $h > 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$, $z_{\pm 1} \equiv z_0 \pm h$. Обозначим через $\Lambda_m^{[z_{-1},z_1]}(z)$ ($z \in [z_{-1}, z_1]$, $m = \overline{-1,1}$) базисные многочлены для интерполяции по Лагранжу на отрезке $[z_{-1}, z_1]$ [3, гл. 2, § 3, п. 2]:

$$\Lambda_m^{[z_{-1},z_1]}(z) \equiv \prod_{j=0\ (j\neq m)}^{2} \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \quad z_j \equiv z_0 + q_j h \quad (j = \overline{-1,1}), \quad q_{\pm 1} \equiv \pm 1, \quad q_0 \equiv 0.$$

Обозначим через $C^k([z_{-1}, z_1])$ ($k = 0, 1, \ldots$) линейные пространства непрерывных на промежутке $[z_{-1}, z_1]$ комплексных функций $f(z)$, имеющих непрерывные на $[z_{-1}, z_1]$ производные $f^{(l)}(z)$ ($l = \overline{1,k}$). Зададим квадратичную интерполяцию функции $f(z)$:

$$\widetilde{f}(z) \equiv \sum_{m=-1}^{1} f(z_m) \Lambda_m^{[z_{-1},z_1]}(z) \quad \big(f \in C^0([z_{-1}, z_1])\big). \tag{2.1}$$

Для остаточного члена интерполяции имеем при $z \in [z_{-1}, z_1]$ формулы

$$\operatorname{Re}\bigl(f - \widetilde{f}\,\bigr) = \omega \operatorname{Re} f^{(3)}(\zeta_1), \quad \operatorname{Im}\bigl(f - \widetilde{f}\,\bigr) = \omega \operatorname{Im} f^{(3)}(\zeta_2) \quad \bigl(f \in C^3\bigl([z_{-1}, z_1]\bigr)\bigr), \tag{2.2}$$

где $\omega(z) \equiv (z+h)z(z-h)$, $\zeta_i(z) \in [z_{-1}, z_1]$ $(i = 1, 2)$ (см. [3, гл. 2, § 5, п. 3]). С помощью определения (2.1) и формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [25, п. 318] получаем равенства

$$\widetilde{f}^{(1)}(z) = \frac{(2z - z_0 - z_1)\int_{z_0}^{z_{-1}} f^{(1)}(\zeta)\,d\zeta}{(z_{-1} - z_0)(z_{-1} - z_1)} + \frac{(2z - z_0 - z_{-1})\int_{z_0}^{z_1} f^{(1)}(\zeta)\,d\zeta}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_{-1})} \quad \bigl(f \in C^1\bigl([z_{-1}, z_1]\bigr)\bigr),$$

$$\widetilde{f}^{(2)}(z) = \frac{2\int_{z_0}^{z_{-1}} f^{(2)}(\zeta)(z_{-1} - \zeta)\,d\zeta}{(z_{-1} - z_0)(z_{-1} - z_1)} + \frac{2\int_{z_0}^{z_1} f^{(2)}(\zeta)(z_1 - \zeta)\,d\zeta}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_{-1})} \quad \bigl(f \in C^2\bigl([z_{-1}, z_1]\bigr)\bigr). \tag{2.3}$$

С помощью формул (2.2), (2.3) получаем при $z \in [z_{-1}, z_1]$ оценки

$$\bigl|\widetilde{f}(z) - f(z)\bigr| \leqslant c_\lambda \sup_{z \in [z_{-1}, z_1]} \bigl|f^{(3)}(z)\bigr| h^3 \quad \bigl(f \in C^3\bigl([z_{-1}, z_1]\bigr),\ c_\lambda \equiv \sqrt{6}\big/27\bigr), \tag{2.4}$$

$$\bigl|\widetilde{f}(z)\bigr| \leqslant c_{\Lambda,0} \max_{m=\overline{-1,1}} |f(z_m)| \quad \bigl(f \in C^0\bigl([z_{-1}, z_1]\bigr),\ c_{\Lambda,0} \equiv 3\bigr), \tag{2.5}$$

$$\bigl|\widetilde{f}^{(j)}(z)\bigr| \leqslant c_{\Lambda,j} \sup_{z \in [z_{-1}, z_1]} \bigl|f^{(j)}(z)\bigr| \quad \bigl(f \in C^j\bigl([z_{-1}, z_1]\bigr), \quad j = 1, 2,\ c_{\Lambda,1} \equiv 3,\ c_{\Lambda,2} \equiv 1\bigr). \tag{2.6}$$

§ 3. Аддитивно-мультипликативное выделение особенности

Здесь мы рассмотрим переход от переменной интегрирования σ к переменной интегрирования ρ в интегралах (1.1) и представим подынтегральную функцию в виде суммы, в каждом слагаемом которой выделим медленно изменяющийся множитель.

В силу формулы (1.2) функцию $K_0(\kappa r)$ при $r > 0$ можно представить в виде:

$$K_0(\kappa r) = 2\pi\bigl[K_{0,1}(r^2, \kappa)\ln r + K_{0,2}(r^2, \kappa)\bigr], \tag{3.1}$$

$$2\pi K_{0,1}(r, \kappa) \equiv -I_0(\kappa\sqrt{r}) = -\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-2}(\kappa^2 r/4)^n \quad (r \geqslant 0),$$

$$2\pi K_{0,2}(r, \kappa) \equiv I_0(\kappa\sqrt{r})\ln\sqrt{r} + K_0(\kappa\sqrt{r}) =$$

$$= [\ln(2/\kappa) - \gamma]\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-2}(\kappa^2 r/4)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-2}(\kappa^2 r/4)^n \sum_{m=1}^{n} m^{-1} \quad (r > 0),$$

$$K_{0,2}(0, \kappa) \equiv \lim_{r \to +0} K_{0,2}(r, \kappa) = (2\pi)^{-1}[\ln(2/\kappa) - \gamma].$$

Функцию g можно записать при $(s, \sigma, d) \in \Upsilon \equiv I_S^2 \times \overline{I_D}$ (кроме $d = \sigma = 0$) в виде

$$g = \bigl(2^{-1} r^{-2} K_{0,1,0} + \ln r\, K_{0,1,1} + K_{0,2,1}\bigr)\partial_{\vec{n}(s)} r^2, \tag{3.2}$$

$$K_{0,1,0}(r, \kappa) \equiv K_{0,1}(r^2, \kappa), \quad K_{0,1,1}(r, \kappa) \equiv \partial_{r'} K_{0,1}(r', \kappa)\bigr|_{r' = r^2},$$

$$K_{0,2,1}(r, \kappa) \equiv \partial_{r'} K_{0,2}(r', \kappa)\bigr|_{r' = r^2}. \tag{3.3}$$

Функции $K_{0,1,0}$, $K_{0,1,1}$, $K_{0,2,1}$ любое число раз непрерывно дифференцируемы по $r \geqslant 0$.

Пусть $\vec{r}_0(s, \sigma) \equiv \overrightarrow{\widetilde{x}(s)\widetilde{x}(s+\sigma)}$, $r_0(s, \sigma) \equiv |\vec{r}_0|$. Зададим на множестве I_S^2 функции ψ_i $(i = \overline{0, 3})$:

$$\psi_i(s, \sigma) \equiv \varphi_i/\sigma^2 \quad (\sigma \neq 0, \quad i = 0, 1), \qquad \psi_i(s, \sigma) \equiv \varphi_i/\sigma \quad (\sigma \neq 0, \quad i = 2, 3),$$

$$\varphi_0(s, \sigma) \equiv r_0^2, \quad \varphi_1(s, \sigma) \equiv 2^{-1}\bigl[\partial_{\vec{n}(s)} r^2\bigr]_{d=0} = -\bigl(\vec{n}(s), \vec{r}_0\bigr)_{\mathbb{R}^2},$$

$$\varphi_2(s, \sigma) \equiv 2^{-1}\partial_\sigma \varphi_0 = \bigl(\vec{e}(s+\sigma), \vec{r}_0\bigr)_{\mathbb{R}^2}, \quad \varphi_3(s, \sigma) \equiv 2^{-1}\partial_\sigma \varphi_1 = -\bigl(\vec{n}(s), \vec{e}(s+\sigma)\bigr)_{\mathbb{R}^2},$$

$$\psi_0(s, 0) = \psi_2(s, 0) \equiv 1, \quad 2\psi_1(s, 0) = \psi_3(s, 0) \equiv \widetilde{x}_2'(s)\widetilde{x}_1''(s) - \widetilde{x}_1'(s)\widetilde{x}_2''(s) = -K(s). \tag{3.4}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^2$, $K(s)$ — кривизна со знаком [26, п. 251] кривой $\partial\Omega$ в точке $\widetilde{x}(s)$. При условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ существуют непрерывные на множестве I_S^2 производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \psi_i$ $(k = \overline{0,n-l},\ l = \overline{0,n},\ i = \overline{0,3})$ [18, следствие 2.1].

Локальные координаты (ξ_s, η_s) точек $\widetilde{x}(s+\sigma)$ и $\widetilde{x}_d(s)$ равны $\big((\vec{e}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, (\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}\big)$ и $(0,d)$ соответственно, поэтому $r^2 = \left|\overrightarrow{\widetilde{x}_d(s)\widetilde{x}(s+\sigma)}\right|^2 = r_0^2 - 2d(\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2} + d^2$. На множестве Υ зададим функцию φ': $\varphi'(s,\sigma,d) \equiv r^2 - d^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_1$. Так как $\varphi' \geqslant 0$ при $(s,\sigma,d) \in \Upsilon$ ($\varphi' > 0$ при $\sigma \neq 0$, $\varphi' = 0$ при $\sigma = 0$) [18, § 2], то на множестве Υ может быть задана функция ρ': $\rho'(s,\sigma,d) \equiv (\varphi')^{1/2}$, если $\sigma \geqslant 0$; $\rho' \equiv -(\varphi')^{1/2}$, если $\sigma < 0$.

Так как $r^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_1 + d^2$, то с учетом равенства (3.2) функцию $g = (2\pi)^{-1}\partial_d K_0(\kappa r)$ можно записать при $(s,\sigma,d) \in \Upsilon$ (кроме $d = \sigma = 0$) в следующем виде:

$$g = \sum_{i=1}^{4} a_i(\rho', d)\,\delta_i + \delta_5, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &a_1(\rho,d) \equiv \rho^2 A^{-1}, \quad a_2(\rho,d) \equiv d\,A^{-1}, \quad a_3(\rho,d) \equiv \rho^2 \ln A, \\ &a_4(\rho,d) \equiv d \ln A, \quad A(\rho,d) \equiv \rho^2 + d^2; \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\delta_1(s,\sigma,d,\kappa) \equiv K_{0,1,0}\,\psi_1/\psi', \quad \delta_2(s,\sigma,d,\kappa) \equiv K_{0,1,0}, \quad \delta_3(s,\sigma,d,\kappa) \equiv K_{0,1,1}\,\psi_1/\psi', \\ &\delta_4(s,\sigma,d,\kappa) \equiv K_{0,1,1}, \quad \delta_5(s,\sigma,d,\kappa) \equiv 2K_{0,2,1}(\varphi_1 + d), \quad \psi'(s,\sigma,d) \equiv \psi_0 + 2d\psi_1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Пусть $D \equiv (3c_K)^{-1}c_r$, где $c_K \equiv \sup\limits_{s\in I_S} |K(s)|$, $c_r \equiv \inf\limits_{(s,\sigma)\in I_S^2} (\psi_0)^{1/2}$ $(0 < c_r \leqslant 1)$ (см. [18, § 2]). Для функций δ_i $(i = \overline{1,5})$ можно обеспечить любую гладкость по $(s,\sigma) \in I_S^2$ за счет соответствующей гладкости границы $\partial\Omega$. Действительно, при $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}}$ выполняются неравенства $1 - dK(s) \geqslant 2/3$. Так как $\psi_0(s,0) = 1$, $\psi_1(s,0) = -2^{-1}K(s)$, то $\psi'(s,0,d) \geqslant 2/3$ при $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}}$. Кроме того, $\psi' = \varphi'/\sigma^2 > 0$ при $(s,\sigma,d) \in \Upsilon$, $\sigma \neq 0$. Поэтому $\psi' > 0$ на множестве Υ, и при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \delta_i$ $(k = \overline{0,n-l},\ l = \overline{0,n},\ i = \overline{1,5})$.

При фиксированном $s \in I_S$ обозначим через E_s замкнутую дугу кривой $\partial\Omega$, ограниченную двумя несовпадающими прямыми, параллельными нормали $\widetilde{x}(s)\widetilde{x}_D(s)$ и отстоящими от нее на расстоянии D, причем $\widetilde{x}(s) \in \mathrm{E}_s$. Множество значений σ, при которых $\widetilde{x}(s+\sigma) \in \mathrm{E}_s$, обозначим через Ξ_s, границы Ξ_s — через Σ_s^- < 0, $\Sigma_s^+ > 0$, и тогда $\Xi_s = [\Sigma_s^-, \Sigma_s^+]$, $\Sigma_s^- \leqslant -D$, $\Sigma_s^+ \geqslant D$; $\widetilde{x}(s+\Sigma_s^-)$, $\widetilde{x}(s+\Sigma_s^+)$ — границы дуги E_s (см. рис. 1). Существуют числа $\Sigma_- \equiv \sup\limits_{s\in I_S} \Sigma_s^- < 0$, $\Sigma_+ \equiv \inf\limits_{s\in I_S} \Sigma_s^+ > 0$. Пусть $\Sigma \equiv \min\{-\Sigma_-, \Sigma_+\}$.

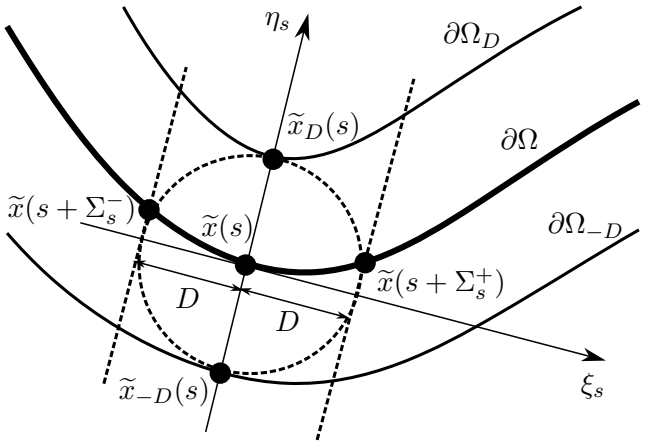

Рис. 1. Построение дуги E_s

Теорема 3.1 (см. [18, теорема 2.2]). *Пусть* $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда на множестве* $\Upsilon' \equiv \{(s,\sigma,d)\colon s \in I_S,\ \sigma \in \Xi \equiv [-\Sigma,\Sigma],\ d \in \overline{I_D}\}$ *существует положительная функция* δ_0:

$$\delta_0(s,\sigma,d) \equiv (\partial_\sigma \rho')^{-1} = (\psi')^{1/2}(\psi_2 + d\psi_3)^{-1}, \tag{3.8}$$

и непрерывные производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l \delta_0$ ($k = \overline{0,n-l}$, $l = \overline{0,n}$).

Следствие 3.1. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда функции* $\widetilde{\rho}_{s,d}(\sigma) \equiv \rho'$ *при любых фиксированных* $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}}$ *диффеоморфно с гладкостью* C^{n+1} *отображают множество* Ξ *на множество* $\widetilde{\Xi}_{s,d} \equiv \left[\widetilde{\Sigma}^-_{s,d}, \widetilde{\Sigma}^+_{s,d}\right]$ ($\widetilde{\Sigma}^\pm_{s,d} \equiv \widetilde{\rho}_{s,d}(\pm\Sigma)$). *Функции*

$$\delta'_0(s,\rho,d) \equiv \delta_0(s,\widetilde{\sigma}_{s,d}(\rho),d), \quad \delta'_i(s,\rho,d,\kappa) \equiv \delta_i(s,\widetilde{\sigma}_{s,d}(\rho),d,\kappa)\delta'_0 \quad (i = \overline{1,4}), \tag{3.9}$$

где $\widetilde{\sigma}_{s,d}(\rho)$ — *функция, обратная к* $\widetilde{\rho}_{s,d}(\sigma)$, *имеют непрерывные на множестве* $\widetilde{\Upsilon}' \equiv \{(s,\rho,d)\colon s \in I_S,\ \rho \in \widetilde{\Xi}_{s,d},\ d \in \overline{I_D}\}$ *производные* $\partial_s^k \partial_\rho^l \delta'_i$ ($k = \overline{0,n-l}$, $l = \overline{0,n}$, $i = \overline{0,4}$).

В соответствии с равенствами (3.5) функция u может быть представлена на множестве $\overline{\mathrm{T}}$ в виде суммы: $u = \sum\limits_{i=1}^{6} u_i$, где функции $u_i(s,d,\kappa)$ имеют вид:

$$\begin{gathered} u_i \equiv \int_\Xi a_i w_i\, d\sigma = \int_{\widetilde{\Xi}_{s,d}} a_i w'_i\, d\rho \quad (i = \overline{1,4}), \qquad u_5 \equiv \int_{I_S} w_5\, d\sigma, \quad u_6 \equiv \int_{I_S \setminus \Xi} w_6\, d\sigma, \\ w_i(s,\sigma,d,\kappa) \equiv \delta_i v(s+\sigma) \quad (i = \overline{1,5}), \qquad w'_i(s,\rho,d,\kappa) \equiv w_i\big|_{\sigma=\widetilde{\sigma}_{s,d}(\rho)}\delta'_0 \quad (i = \overline{1,4}), \\ w_6(s,\sigma,d,\kappa) \equiv (g - \delta_5)v(s+\sigma). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь подынтегральные функции a_i ($i = \overline{1,4}$) имеют интегрируемые особенности при $\rho = d = 0$. В силу следствия 3.1 для функций w'_i ($i = \overline{1,4}$) может быть обеспечена произвольная гладкость по $(s,\rho) \in I_S \times \widetilde{\Xi}_{s,d}$ за счет гладкости кривой $\partial\Omega$ и функции плотности v, а именно: при условиях $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $v \in C^n(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют производные $\partial_s^k \partial_\rho^l w'_i$ ($k = \overline{0,n-l}$, $l = \overline{0,n}$, $i = \overline{1,4}$), непрерывные на $\widetilde{\Upsilon}'$. Кроме того, при условиях $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $v \in C^n(\partial\Omega)$ существуют производные $\partial_s^k \partial_\sigma^l w_i$ ($i = \overline{1,5}$), $\partial_s^k \partial_\sigma^l w_6$ ($k = \overline{0,n-l}$, $l = \overline{0,n}$), непрерывные на множествах Υ, $\overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}$ соответственно.

§ 4. Описание полуаналитических аппроксимаций НП ППС

Пусть $L \in \mathbb{N}$, $h(L) \equiv S/(2L+1)$, $s_l \equiv lh$, $l \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $s_l \in I_S$ при $l = \overline{-2L-1, 2L+1}$, и что $\widetilde{x}(s_{l+4L+2}) = \widetilde{x}(s_l)$, в частности, $\widetilde{x}(s_{-2L-1}) = \widetilde{x}(s_{2L+1})$. Зададим множества I_L, состоящие из точек s_{2l} при $l = \overline{-L, L}$, и множества $\mathrm{T}_L \equiv I_L \times I_D$.

Зададим ККИ $\widetilde{v}(s)$ ($s \in I_S$) функции плотности $v \in C(\partial\Omega)$ по переменной s на промежутках $[s_{2l-1}, s_{2l+1}]$:

$$\widetilde{v}(s) \equiv \sum_{m=-1}^{1} v(s_{2l+m})\Lambda_m^{[s_{2l-1},s_{2l+1}]}(s) \quad (s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], \quad l = \overline{-L, L}). \tag{4.1}$$

Зададим функции $\widetilde{w}'_i$ ($i = \overline{1,4}$), $\widetilde{w}_i$ ($i = \overline{1,6}$):

$$\begin{gathered} \widetilde{w}'_i(s,\rho,d,\kappa) \equiv \delta'_i\, \widetilde{v}(s + \tilde{\sigma}_{s,d}(\rho)) \quad ((s,\rho,d) \in \widetilde{\Upsilon}', \quad i = \overline{1,4}), \\ \widetilde{w}_i(s,\sigma,d,\kappa) \equiv \delta_i \widetilde{v}(s+\sigma) \quad ((s,\sigma,d) \in \Upsilon, \quad i = \overline{1,5}), \\ \widetilde{w}_6(s,\sigma,d,\kappa) \equiv (g - \delta_5)\widetilde{v}(s+\sigma) \quad ((s,\sigma,d) \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Обозначим через $\widehat{w}_i'$ ($i = \overline{1,4}$) ККИ функций $\widetilde{w}_i'$ по переменной ρ на промежутках $[\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}]$:

$$\widehat{w}_i'(s,\rho,d,\kappa) \equiv \widehat{w}_{i,l}' \quad (\rho \in [\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}], \quad l = \overline{-L-1, L+1}, \quad (s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}), \tag{4.3}$$

$$\widehat{w}_{i,l}'(s,\rho,d,\kappa) \equiv \begin{cases} \sum\limits_{m=-1}^{1} \widetilde{w}_i'\big|_{\rho=\rho_{s,d,2l+m}} \Lambda_m^{[\rho_{s,d,2l-1},\rho_{s,d,2l+1}]}(\rho) & (\rho_{s,d,2l-1} < \rho_{s,d,2l+1}) \\ \widetilde{w}_i'\big|_{\rho=\rho_{s,d,2l}} & (\rho_{s,d,2l-1} = \rho_{s,d,2l+1}). \end{cases}$$

Здесь $\rho_{s,d,\pm 1} \equiv \pm \min\limits_{l=-1,1} |\widetilde{\rho}_{s,d}(\alpha_l)|$, $\rho_{s,d,\pm(2l+3)} \equiv \widetilde{\rho}_{s,d}(\alpha_{\pm(2l+1)})$, $\alpha_{2l+1} \equiv \min\{s_{2l+1}, \Sigma\}$, $\alpha_{-2l-1} \equiv -\alpha_{2l+1}$ ($l = \overline{0,L}$), $\rho_{s,d,2l} \equiv 2^{-1}(\rho_{s,d,2l-1} + \rho_{s,d,2l+1})$ ($l = \overline{-L-1, L+1}$). Кроме того, пусть $\alpha_{2l} \equiv 2^{-1}(\alpha_{2l-1} + \alpha_{2l+1})$ ($l = \overline{-L, L}$). По определению выполняются равенства $\bigcup\limits_{l=-2L-3}^{2L+2} [\rho_{s,d,l}, \rho_{s,d,l+1}] = \widetilde{\Xi}_{s,d}$, $\bigcup\limits_{l=-2L-1}^{2L} [\alpha_l, \alpha_{l+1}] = \Xi$. Дополнительные узлы $\rho_{s,d,\pm 1}$, симметричные относительно $\rho = 0$, вводятся для того, чтобы узел $\rho_{s,d,0}$ равнялся нулю, тогда выполняется предельное равенство (5.1).

Обозначим через $\widehat{w}_{5,l}$ аппроксимации интегралов $\int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} \widetilde{w}_5\, d\sigma$ ($l = \overline{-L, L}$) на основе КФГ с γ узлами ($\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant 2$):

$$\widehat{w}_{5,l}(s,d,\kappa) \equiv h \sum_{j=1}^{\gamma} \eta_j \widetilde{w}_5\big|_{s=s_{l,j}} \quad (l = \overline{-L, L}, \quad (s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}). \tag{4.4}$$

Здесь $s_{l,j} \equiv s_{2l} + h z_j$ ($l = \overline{-L, L}$); z_j — корни многочлена $(d^\gamma/dz^\gamma)(z^2-1)^\gamma$ на интервале $(-1,1)$; выполняются условия: $\sum\limits_{j=1}^{\gamma} \eta_j = 2$, $\eta_j > 0$ [3, гл. 3, § 5].

Обозначим через $\widehat{w}_{6,l}$ аппроксимации интегралов $\int_{\beta_l}^{\beta_{l+1}} \widetilde{w}_6\, d\sigma$ ($l = \overline{-2L-2, -2}, \overline{1, 2L+1}$) на основе КФГ с γ узлами:

$$\widehat{w}_{6,l}(s,d,\kappa) \equiv h_l \sum_{j=1}^{\gamma} \eta_j \widetilde{w}_6\big|_{s=\beta_{l,j}} \quad (l = \overline{-2L-1, -1},\ \overline{1, 2L+1}, \quad (s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}). \tag{4.5}$$

Здесь $\beta_{l,j} \equiv \overline{\beta}_l + h_l z_j$, $\beta_{-l,j} \equiv -\beta_{l,j}$ при $j = \overline{1,\gamma}$, $l = \overline{1, 2L+1}$; $h_l \equiv 2^{-1}(\beta_{l+1} - \beta_l)$, $\overline{\beta}_l \equiv 2^{-1}(\beta_l + \beta_{l+1})$, $\overline{\beta}_{-l} \equiv -\overline{\beta}_l$ при $l = \overline{1, 2L+1}$; $\beta_{l+1} \equiv \max\{s_l, \Sigma\}$, $\beta_{-l-1} \equiv -\beta_{l+1}$ при $l = \overline{0, 2L+1}$. По определению выполняется равенство $\bigcup\limits_{l=\overline{-2L-2,-2},\, \overline{1,2L+1}} [\beta_l, \beta_{l+1}] = \overline{I_S \setminus \Xi}$.

На множествах $\overline{\mathrm{T}_L}$ ($L \in \mathbb{N}$) зададим полуаналитические аппроксимации $\widehat{u}(s,d,\kappa)$ НП ППС u:

$$\widehat{u}(s,d,\kappa) \equiv \sum_{i=1}^{6} \widehat{u}_i(s,d,\kappa) \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}), \tag{4.6}$$

$$\widehat{u}_i(s,d,\kappa) \equiv \int_{\widetilde{\Xi}_{s,d}} a_i \widehat{w}_i' d\rho \ (i = \overline{1,4}), \quad \widehat{u}_5(s,d,\kappa) \equiv \sum_{l=-L}^{L} \widehat{w}_{5,l}, \ \widehat{u}_6(s,d,\kappa) \equiv \sum_{l=\overline{-2L-1,-1},\,\overline{1,2L+1}} \widehat{w}_{6,l}.$$

Функции $\widehat{u}_i$ — аппроксимации соответствующих функций u_i на множествах $\overline{\mathrm{T}_L}$.

Теперь зададим ККИ $\widetilde{v}'(s)$ ($s \in I_S$) функции плотности $v \in C(\partial\Omega)$ по переменной s на промежутках $[s_{2l}, s_{2l+2}]$:

$$\widetilde{v}'(s) \equiv \sum_{m=-1}^{1} v(s_{2l+1+m}) \Lambda_m^{[s_{2l}, s_{2l+2}]}(s) \quad (s \in [s_{2l}, s_{2l+2}], \quad l = \overline{-L, L}).$$

Введем в рассмотрение множества I'_L, состоящие из точек s_{2l+1} при $l = \overline{-L, L}$, и множества $\mathrm{T}'_L \equiv I'_L \times I_D$. По аналогии с тем, как на множествах $\overline{\mathrm{T}_L}$ с помощью функций $\widetilde{v}$ были заданы аппроксимации $\widehat{u}(s, d, \kappa)$, зададим на множествах $\overline{\mathrm{T}'_L}$ с помощью функций $\widetilde{v}'$ аппроксимации $\widehat{u}'(s, d, \kappa)$ НП ППС u.

Теперь, используя приближенные значения $\widehat{u}$, $\widehat{u}'$ в узловых точках s_l при фиксированном $d \in \overline{I_D}$, осуществим интерполяцию этих значений по переменной s:

$$\breve{u}(s, d, \kappa) \equiv \widehat{u}'\big|_{s=s_{2l-1}} \Lambda_{-1}^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) + \widehat{u}\big|_{s=s_{2l}} \Lambda_{0}^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) + \widehat{u}'\big|_{s=s_{2l+1}} \Lambda_{1}^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s). \quad (4.7)$$

Здесь $s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}]$, $l = \overline{-L, L}$. Таким образом мы имеем возможность вычислить аппроксимации $\breve{u}$ НП ППС u при любых $(s, d) \in \overline{\mathrm{T}}$.

Итак, вычисление аппроксимаций $\breve{u}$ при каждом фиксированном $d \in \overline{I_D}$ можно разбить на три этапа. На первом этапе с помощью формул (4.6) вычисляются аппроксимации $\widehat{u}$ при всех $s \in I_L$. Функции a_i в формулах (4.6) вычисляются с помощью формул (3.6), функции $\widehat{w}'_i$ — с помощью (4.3), $\widehat{w}_{5,l}$ и $\widehat{w}_{6,l}$ — с помощью (4.4) и (4.5). Функции $\widetilde{w}'_i$, $\widetilde{w}_5$, $\widetilde{w}_6$ в формулах (4.3)–(4.5) задаются равенствами (4.2), где функция $\widetilde{v}$ определяется формулой (4.1), функции δ_i — формулами (3.7), функции δ'_i — формулами (3.8), (3.9). В свою очередь, функции ψ_i и φ_1 в формулах (3.7), (3.8) задаются равенствами (3.4), а функции $K_{0,1,0}$, $K_{0,1,1}$, $K_{0,2,1}$ — равенствами (3.1), (3.3).

На втором этапе по аналогии с первым этапом вычисляются аппроксимации $\widehat{u}'$ при всех $s \in I'_L$. На третьем этапе с помощью формул (4.7) вычисляются аппроксимации $\breve{u}$ при любых $s \in I_S$.

Интегралы $\widehat{u}_i$ ($i = \overline{1, 4}$) вычисляются аналитически. Функции $\widehat{u}_i$ ($i = \overline{1, 6}$) можно представить в матричной форме $\sum\limits_{l=-2L-1}^{2L} U_l(s, d, \kappa) v(s_l)$, где $U_l(s, d, \kappa)$ — некоторые функции (см. [21, формулы (3.11), (3.12)]).

§ 5. Конечные разрывы полуаналитических аппроксимаций НП ППС на границе области

Докажем, что полуаналитические аппроксимации $\breve{u}$ по аналогии с точной функцией u терпят на границе области разрыв, величина которого пропорциональна значениям интерполированной функции плотности $\widetilde{v}$.

Теорема 5.1. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $v \in C(\partial\Omega)$, $L \in \mathbb{N}$. Тогда функция $\widehat{u}$ непрерывна на множестве T_L и может быть доопределена при $d = 0$, $s \in I_L$ до функции, непрерывной или на множестве $I_L \times [0, D]$, или на множестве $I_L \times [-D, 0]$ с помощью соответствующих равномерно по $s \in I_L$ сходящихся пределов*

$$\lim_{d \to \pm 0} \widehat{u} = \mp 2^{-1} v + \widehat{u}\big|_{d=0}. \quad (5.1)$$

Доказательство. Функция δ_5 непрерывна на множестве Υ, функция δ_6 — при $\sigma \in \overline{I_S \backslash \Xi}$, $(s, d) \in \overline{\mathrm{T}}$. Следовательно, функции $\widehat{u}_5$, $\widehat{u}_6$ непрерывны на $\overline{\mathrm{T}_L}$.

Функции $\widehat{u}_i$ ($i = \overline{1, 4}$) можно представить в виде сумм $\widehat{u}_i = \sum\limits_{j=0}^{2} \sum\limits_{l=-L}^{L} \widehat{u}_{i,j,l}$, где $\widehat{u}_{i,j,l}(s, d, \kappa) \equiv$ $\equiv \widetilde{A}_{i,j,l} \gamma_{i,j,l}$, $\widetilde{A}_{i,j,l}(d) \equiv \int\limits_{\rho_{s,d,2l-1}}^{\rho_{s,d,2l+1}} a_i \rho^j \, d\rho$, $\gamma_{i,j,l}(s, d, \kappa)$ — коэффициенты полиномов Лагранжа $\widehat{w}'_{i,l} = \gamma_{i,0,l} + \gamma_{i,1,l}\rho + \gamma_{i,2,l}\rho^2$. Заметим, что $\widetilde{v} \in C(\partial\Omega)$, так как границы интервалов $[s_{2l-1}, s_{2l-1}]$ ($l = \overline{-L, L}$) являются узлами ККИ. В силу следствия 3.1 функции $\widehat{w}'_{i,l}$ непрерывны на множестве $\widetilde{\Upsilon}'$, границы $\rho_{s,d,2l\pm1}$ непрерывно зависят от $(s, d) \in \overline{\mathrm{T}_L}$ и $\rho_{s,d,2l-1} < \rho_{s,d,2l+1}$, поэтому функции $\gamma_{i,j,l}$ непрерывны при $\rho \in [\rho_{s,d,2l-1}, \rho_{s,d,2l+1}]$, $(s, d) \in \overline{\mathrm{T}_L}$. Функции $\widetilde{A}_{i,j,l}(d)$

при $d \in \overline{I_D}$ вычисляются аналитически:

$$\widetilde{A}_{i,j,l}(d) = A_{i,j}(\rho_{s,d,2l+1}, d) - A_{i,j}(\rho_{s,d,2l-1}, d) \quad (l = \overline{-L, L}, \quad j = \overline{0,2}, \quad i = \overline{1,4}).$$

Здесь $\partial_\rho A_{i,j}(\rho, d) \equiv a_i \rho^j$. Так как $\rho_{s,d,2l\pm1} \neq 0$, то все функции $\widetilde{A}_{i,j,l}(d)$, кроме $\widetilde{A}_{2,0,0}(d)$, непрерывны на множестве $\overline{I_D}$. Тогда соответствующие функции $\widehat{u}_{i,j,l}$ и, следовательно, $\widehat{u}_i$ ($i = 1, 3, 4$) непрерывны на $\overline{\mathrm{T}_L}$.

Функция $\widetilde{A}_{2,0,0}(d)$ терпит при $d = 0$ конечный разрыв: $\widetilde{A}_{2,0,0}(-0) = -\pi$, $\widetilde{A}_{2,0,0}(0) = 0$, $\widetilde{A}_{2,0,0}(+0) = \pi$. Так как $\rho_{s,d,0} = 0$, то при $s \in I_L$ имеем равенства

$$\gamma_{2,0,0}\big|_{d=0} = \widehat{w}_2'\big|_{\rho=0,\, d=0} = \delta_2'\big|_{\rho=0,\, d=0}\widetilde{v} = \delta_2\big|_{\sigma=0,\, d=0} v = K_{0,1,0}\big|_{r=0} v = -(2\pi)^{-1} v.$$

Так как $\widetilde{A}_{2,0,0}(0) = 0$, то $\widehat{u}_{2,0,0}\big|_{d=0} = 0$ ($s \in I_L$). Следовательно, имеют место равномерно по $s \in I_L$ сходящиеся пределы $\lim\limits_{d\to\pm0} \widehat{u}_{2,0,0} = \mp 2^{-1} v + \widehat{u}_{2,0,0}\big|_{d=0}$, из которых с учетом непрерывности остальных функций $\widehat{u}_{i,j,l}$ следуют пределы (5.1). Теорема 5.1 доказана. □

Следствие 5.1. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $v \in C(\partial\Omega)$, $L \in \mathbb{N}$. Тогда функция $\breve{u}$ непрерывна на множестве T и может быть доопределена при $d = 0$, $s \in I_S$ до непрерывной или на множестве $I_S \times [0, D]$, или на множестве $I_S \times [-D, 0]$ с помощью равномерно по $s \in I_S$ сходящихся пределов $\lim\limits_{d\to\pm0} \breve{u} = \mp 2^{-1}\widetilde{v} + \breve{u}\big|_{d=0}$.*

§ 6. Обоснование возможности касательной интерполяции НП ППС вблизи и на границе области

Здесь мы докажем равномерную сходимость интерполянтов НП ППС по переменной s в замкнутой области $\overline{\mathrm{T}}$. Для этого сначала получим условия существования и непрерывности касательных производных НП ППС в области $\overline{\mathrm{T}}$.

Пусть $\mathrm{P}_- \equiv \sup\limits_{(s,d)\in\overline{\mathrm{T}}} \widetilde{\Sigma}^-_{s,d}$, $\mathrm{P}_+ \equiv \inf\limits_{(s,d)\in\overline{\mathrm{T}}} \widetilde{\Sigma}^+_{s,d}$, $\mathrm{P} \equiv \min\{-\mathrm{P}_-, \mathrm{P}_+\}$, $\widetilde{\Xi} \equiv [-\mathrm{P}, \mathrm{P}]$; $\Sigma^\pm_{s,d} \equiv \widetilde{\sigma}_{s,d}(\pm\mathrm{P})$, $\Xi_{s,d} \equiv \big[\Sigma^-_{s,d}, \Sigma^+_{s,d}\big]$ ($(s,d) \in \overline{\mathrm{T}}$). В соответствии с равенствами (3.5) функция u может быть представлена на множестве $\overline{\mathrm{T}}$ в виде суммы: $u = \sum\limits_{i=1}^{6} u_i$, где

$$u_i(s,d,\kappa) \equiv \int_{\widetilde{\Xi}} a_i w_i' \, d\rho \quad (i = \overline{1,4}), \qquad u_5(s,d,\kappa) \equiv \int_{I_S} w_5 \, d\sigma, \qquad u_6(s,d,\kappa) \equiv \int_{I_S \setminus \Xi_{s,d}} w_6 \, d\sigma.$$

Теорема 6.1. *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $v \in C^n(\partial\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда производные $\partial_s^l u$ ($l = \overline{0,n}$) существуют и непрерывны на множествах T, $\overline{\mathrm{T}} \setminus \mathrm{T}$ и могут быть доопределены при $d = 0$, $s \in I_S$ до функций, непрерывных или на множестве $I_S \times [0, D]$, или на множестве $I_S \times [-D, 0]$, с помощью соответствующих равномерно по $s \in I_S$ сходящихся пределов*

$$\lim_{d\to\pm0} \partial_s^l u = \pm\pi \, \partial_s^l w_2\big|_{\sigma=0,\, d=0} + \partial_s^l u\big|_{d=0} \quad (l = \overline{0,n}, \quad s \in I_S). \tag{6.1}$$

Доказательство. При $\sigma \in \overline{I_S \setminus \Xi_{s,d}}$, $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}}$ производные $\partial_s^l w_6$ ($l = \overline{0,n}$) непрерывны, так как $r \geqslant |\rho'| = |\sigma|(\psi')^{1/2} > 0$. В силу следствия 3.1 производные $\partial_s^l \Sigma^\pm_{s,d}$ ($l = \overline{0,n}$) непрерывны на множестве $\overline{\mathrm{T}}$. Следовательно, существуют непрерывные на $\overline{\mathrm{T}}$ производные $\partial_s^l u_6$ ($l = \overline{0,n}$).

Производные $\partial_s^l w_5$ ($l = \overline{0,n}$) непрерывны на множестве Υ, следовательно, существуют непрерывные на множестве $\overline{\mathrm{T}}$ производные $\partial_s^l u_5 = \int\limits_{I_S} \partial_s^l w_5 \, d\sigma$ ($l = \overline{0,n}$).

В силу следствия 3.1 производные $\partial_s^l w_i'$ ($l = \overline{0,n}$, $i = \overline{1,4}$) непрерывны на множестве $\widetilde{\Upsilon}'$. Функции a_i ($i = 1,3,4$) ограничены при $|\rho| \in (0,\mathrm{P}]$, $d \in \overline{I_D}$: $|a_i| \leqslant c_i$, где

$$c_1 \equiv 1, \quad c_3 \equiv \sup_{|\rho|\in(0,\mathrm{P}],\, d\in\overline{I_D}} (\rho^2+d^2)\big|\ln(\rho^2+d^2)\big|, \quad c_4 \equiv \sup_{|\rho|\in(0,\mathrm{P}],\, d\in\overline{I_D}} (\rho^2+d^2)^{1/2}\big|\ln(\rho^2+d^2)\big|.$$

Следовательно, интегралы $\int_{\widetilde{\Xi}} a_i\, \partial_s^l w_i'\, d\rho$ ($l = \overline{0,n}$, $i = 1,3,4$) сходятся равномерно относительно $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}}$, и существуют непрерывные на множестве $\overline{\mathrm{T}}$ производные $\partial_s^l u_i = \int_{\widetilde{\Xi}} a_i\, \partial_s^l w_i'\, d\rho$ ($l = \overline{0,n}$, $i = 1,3,4$). Функция a_2 непрерывна при $\rho \in \mathbb{R}$, $d \in I_D$; $a_2 = 0$ при $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$, $d = 0$. Следовательно, существуют непрерывные на множествах T и $\overline{\mathrm{T}} \setminus \mathrm{T}$ производные $\partial_s^l u_2 = \int_{\widetilde{\Xi}} a_2\, \partial_s^l w_2'\, d\rho$ ($l = \overline{0,n}$).

При любом $\varepsilon \in (0,\mathrm{P}]$ имеем равномерно по $s \in I_S$ сходящиеся пределы

$$\lim_{d\to 0} \int_{-\mathrm{P}}^{-\varepsilon} a_2\, \partial_s^l w_2'\, d\rho = \lim_{d\to 0} \int_{\varepsilon}^{\mathrm{P}} a_2\, \partial_s^l w_2'\, d\rho = 0 \quad (l = \overline{0,n}). \tag{6.2}$$

Также имеют место равномерно по $s \in I_S$ сходящиеся пределы:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\lim_{d\to\pm 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} a_2\, \partial_s^l w_2'\, d\rho\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\lim_{d\to\pm 0}\Big(\big[\operatorname{Re}\partial_s^l w_2'\big]_{\rho=\rho_1} + i\big[\operatorname{Im}\partial_s^l w_2'\big]_{\rho=\rho_2}\Big)\, 2A_{2,0}(\varepsilon,d)\right) =$$
$$= \pm\pi\, \partial_s^l w_2'\big|_{\rho=0,\, d=0} = \pm\pi\, \partial_s^l w_2\big|_{\sigma=0,\, d=0} \quad (l = \overline{0,n}), \tag{6.3}$$

где $i^2 = -1$, $A_{2,0}(\rho,d) = \operatorname{arctg}(\rho/d)$; ρ_1, ρ_2 — точки на промежутке $[-\varepsilon,\varepsilon]$, точное положение которых зависит от $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon \in (0,\mathrm{P}]$. В силу пределов (6.2), (6.3) и равенств $\partial_s^l u_2\big|_{d=0} = 0$ ($s \in I_S$) существуют равномерно по $s \in I_S$ сходящиеся пределы

$$\lim_{d\to\pm 0} \partial_s^l u_2 = \pm\pi\, \partial_s^l w_2\big|_{\sigma=0,\, d=0} + \partial_s^l u_2\big|_{d=0} \quad (l = \overline{0,n})$$

и, следовательно, пределы (6.1). Теорема 6.1 доказана. □

Так как $\widehat{w}_2'\big|_{\rho=0,\, d=0} = K_{0,1,0}\big|_{r=0} v = -(2\pi)^{-1} v$, то при $l = 0$ равенство (6.1) принимает вид $\lim\limits_{d\to\pm 0} u = \mp 2^{-1} v + u\big|_{d=0}$, что согласуется с известной теоремой [27, теорема 2.19].

На множестве $\overline{\mathrm{T}}$ зададим ККИ $\dot{u}$ функции u по переменной s на промежутках $[s_{2l-1}, s_{2l+1}]$ с узлами в точках s_{2l-1}, s_{2l}, s_{2l+1}:

$$\dot{u}(s,d,\kappa) \equiv \sum_{m=-1}^{1} u\big|_{s=s_{2l+m}} \Lambda_m^{[s_{2l-1},s_{2l+1}]}(s) \quad (d \in \overline{I_D}, \quad s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], \quad l = \overline{-L,L}). \tag{6.4}$$

На основании оценки (2.4) и теоремы 6.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 6.1. *Пусть $L \in \mathbb{N}$, $\partial\Omega \in C^5$, $v \in C^3(\partial\Omega)$. Справедливы оценки*

$$|\dot{u} - u| \leqslant c_\lambda\, C'(v,\kappa)\, h^3 \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}}), \quad C'(v,\kappa) \equiv \sup_{(s,d)\in\overline{\mathrm{T}}} |\partial_s^3 u|. \tag{6.5}$$

§ 7. Доказательство равномерной сходимости полуаналитических аппроксимаций НП ППС вблизи и на границе области

Здесь мы докажем, что аппроксимации $\breve{u}$ сходятся с кубической скоростью к точной функции u равномерно в приграничной области, включающей границу.

На множестве $\overline{\mathrm{T}}$ зададим аппроксимации $\widetilde{u}$ функции u: $\widetilde{u}(s,d,\kappa) \equiv \int\limits_{I_S} g\,\widetilde{v}(s+\sigma)\,d\sigma$.

Теорема 7.1. *Пусть $L \in \mathbb{N}$, $\partial\Omega \in C^2$, $v \in C^3(\partial\Omega)$. Тогда для функций $\widetilde{u}$ справедливы оценки*

$$|u - \widetilde{u}| \leqslant C_1(\kappa)\|v\|_{C^3(\partial\Omega)}h^3 \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}}), \tag{7.1}$$

где $C_1(\kappa)$ — положительная постоянная, не зависящая от L, (s,d), v.

Доказательство. В силу равенств (3.5) при $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}}$ функции u, $\widetilde{u}$ могут быть представлены в виде сумм $u = \sum\limits_{i=1}^{5} u_i$, $\widetilde{u} = \sum\limits_{i=1}^{5} \widetilde{u}_i$, где

$$u_i(s,d,\kappa) \equiv \int\limits_{I_S} a_i(\rho',d)\,w_i\,d\sigma, \qquad \widetilde{u}_i(s,d,\kappa) \equiv \int\limits_{I_S} a_i(\rho',d)\,\widetilde{w}_i\,d\sigma \ (i = \overline{1,4}),$$
$$u_5(s,d,\kappa) \equiv \int\limits_{I_S} w_5\,d\sigma, \qquad \widetilde{u}_5(s,d,\kappa) \equiv \int\limits_{I_S} \widetilde{w}_5\,d\sigma.$$

При $(s,\sigma,d) \in \Upsilon$, кроме $\sigma = d = 0$, имеем оценки $|a_i(\rho',d)| \leqslant c_i'$ $(i = 1,3,4)$, где

$$c_1' \equiv 1, \quad c_3' \equiv \sup_{(s,\sigma,d)\in\Upsilon,\,\sigma\neq 0} r^2\big|\ln r^2\big|, \quad c_4' \equiv \sup_{(s,\sigma,d)\in\Upsilon,\,\sigma\neq 0} r\big|\ln r^2\big|.$$

Пусть $c_5' \equiv 1$. В силу неравенств (2.4) справедливы оценки

$$|\widetilde{u}_i - u_i| \leqslant c_i(\kappa)\|v\|_{C^3(\partial\Omega)}h^3 \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}}), \quad c_i(\kappa) \equiv 2S\,c_\lambda c_i' \sup_{(s,\sigma,d)\in\Upsilon'} |\delta_i| \quad (i = 1,\overline{3,5}). \tag{7.2}$$

Существует постоянная $c_\rho' \equiv \inf\limits_{(s,\sigma,d)\in\Upsilon} (\psi')^{1/2} > 0$. При $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}}$ имеем неравенства

$$\int\limits_{I_S} |a_2(\rho',d)|\,d\sigma \leqslant \int\limits_{I_S} |d|\big[(c_\rho'\sigma)^2 + d^2\big]^{-1} d\sigma \leqslant \pi/c_\rho'.$$

Учитывая также неравенства (2.4), получаем оценки

$$|\widetilde{u}_2 - u_2| \leqslant c_2(\kappa)\|v\|_{C^3(\partial\Omega)}h^3 \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}}), \quad c_2(\kappa) \equiv \pi c_\lambda/c_\rho' \sup_{(s,\sigma,d)\in\Upsilon'} |\delta_2|. \tag{7.3}$$

В силу оценок (7.2), (7.3) имеем оценки (7.1), где $C_1(\kappa) \equiv \sum\limits_{i=1}^{5} c_i(\kappa)$. □

Теорема 7.2. *Пусть γ, $L \in \mathbb{N}$, $h \leqslant 1$, $\gamma \geqslant 2$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $v \in C^2(\partial\Omega)$. Тогда для функций $\widehat{u}(s,d)$ справедливы оценки*

$$|\widehat{u} - \widetilde{u}| \leqslant C_2(\kappa)\|v\|_{C^2(\partial\Omega)}h^3 \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}), \tag{7.4}$$

где $C_2(\kappa)$ — положительная постоянная, не зависящая от L, (s,d), v.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим функцию $\widetilde{u}$ на множестве $\overline{\mathrm{T}}$ в виде суммы: $\widetilde{u} = \sum\limits_{i=1}^{6} \widetilde{u}_i$, где

$$\widetilde{u}_i(s,d,\kappa) \equiv \int\limits_{\widetilde{\Xi}_{s,d}} a_i \widetilde{w}_i' \, d\rho \quad (i = \overline{1,4}), \qquad \widetilde{u}_5(s,d,\kappa) \equiv \int\limits_{I_S} \widetilde{w}_5 \, d\sigma, \qquad \widetilde{u}_6(s,d,\kappa) \equiv \int\limits_{I_S \setminus \Xi} \widetilde{w}_6 \, d\sigma.$$

Так как $r > 0$ при $(s,\sigma,d) \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}$, то существуют положительные постоянные $\widehat{c}_{6,j}(\kappa) \equiv \sup\limits_{s,\sigma,d) \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}} \bigl|\partial_\sigma^j (g - \delta_5)\bigr|$ $(j = \overline{0,2\gamma})$. Поэтому при $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}$ и почти всех $\sigma \in \overline{I_S \setminus \Xi}$ производная $\partial_\sigma^{2\gamma} \widetilde{w}_6$ существует, и в силу неравенств (2.5), (2.6) выполняются оценки

$$\bigl|\partial_\sigma^{2\gamma} \widetilde{w}_6\bigr| \leqslant \widetilde{c}_6(\kappa) \|v\|_{C^2(\partial\Omega)} \ ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}), \quad \widetilde{c}_6(\kappa) \equiv \widehat{c}_{6,2\gamma} c_{\Lambda,0} + 2\gamma \widehat{c}_{6,2\gamma-1} c_{\Lambda,1} + \gamma(2\gamma-1)\, \widehat{c}_{6,2\gamma-2} c_{\Lambda,2}.$$

Используя оценку остаточного члена КФГ [3, гл. 3, § 5, п. 2], получаем оценку погрешности аппроксимации функции $\widetilde{u}_6$:

$$|\widehat{u}_6 - \widetilde{u}_6| \leqslant c_6(\kappa) \|v\|_{C^2(\partial\Omega)} h^{2\gamma} \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}), \tag{7.5}$$

где $c_6(\kappa) \equiv 2S(\gamma!)^4 \bigl[(2\gamma)!\bigr]^{-3} (2\gamma+1)^{-1} \widetilde{c}_6(\kappa)$. Пусть $\widehat{c}_{5,j}(\kappa) \equiv \sup\limits_{(s,\sigma,d) \in \Upsilon} |\partial_\sigma^j \delta_5|$ $(j = \overline{0,2\gamma})$. Аналогично получаем оценку погрешности аппроксимации функции $\widetilde{u}_5$:

$$\begin{gathered} |\widehat{u}_5 - \widetilde{u}_5| \leqslant c_5(\kappa) \|v\|_{C^2(\partial\Omega)} h^{2\gamma} \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}), \\ c_5(\kappa) \equiv 2S(\gamma!)^4 \bigl[(2\gamma)!\bigr]^{-3} (2\gamma+1)^{-1} \widetilde{c}_5, \\ \widetilde{c}_5(\kappa) \equiv \widehat{c}_{5,2\gamma} c_{\Lambda,0} + 2\gamma \widehat{c}_{5,2\gamma-1} c_{\Lambda,1} + \gamma(2\gamma-1) \widehat{c}_{5,2\gamma-2} c_{\Lambda,2}. \end{gathered} \tag{7.6}$$

В силу следствия 3.1 могут быть определены положительные постоянные $\widehat{c}_{i,j}(\kappa) \equiv \equiv \sup\limits_{(s,\rho,d) \in \widetilde{\Upsilon}'} |\partial_\rho^j \delta_i'|$ $(j = \overline{0,3},\ i = \overline{0,4})$. При почти всех $(s,\rho,d) \in \widetilde{\Upsilon}'$ производные $\partial_\rho^3 \widetilde{w}_i'$ $(i = \overline{1,4})$ существуют, и в силу неравенств (2.5), (2.6) выполняются оценки:

$$\begin{gathered} |\partial_\rho^3 \widetilde{w}_i'| \leqslant \widetilde{c}_i(\kappa) \|v\|_{C^2(\partial\Omega)} \quad (i = \overline{1,4}), \\ \widetilde{c}_i(\kappa) \equiv \widehat{c}_{i,3} c_{\Lambda,0} + \bigl(3\widehat{c}_{i,2}\widehat{c}_{0,0} + 3\widehat{c}_{i,1}\widehat{c}_{0,1} + \widehat{c}_{i,0}\widehat{c}_{0,2}\bigr) c_{\Lambda,1} + 3\bigl(\widehat{c}_{i,1}\widehat{c}_{0,0}^2 + \widehat{c}_{i,0}\widehat{c}_{0,1}\widehat{c}_{0,0}\bigr) c_{\Lambda,2}. \end{gathered}$$

Используя также неравенства $h_{s,d,l} \leqslant c_\rho'' h$ $(l = \overline{-L-1, L+1}$, $(s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L})$, где $h_{s,d,l} \equiv \equiv 2^{-1}(\rho_{s,d,2l+1} - \rho_{s,d,2l-1})$, $c_\rho'' \equiv \sup\limits_{(s,\sigma,d) \in \Upsilon} (\psi')^{1/2}$, по аналогии с оценками (7.2), (7.3) получаем оценки погрешности аппроксимаций функций $\widetilde{u}_i$ $(i = \overline{1,4})$:

$$|\widehat{u}_i - \widetilde{u}_i| \leqslant c_i(\kappa) \|v\|_{C^2(\partial\Omega)} h^3 \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}, \quad i = \overline{1,4}), \tag{7.7}$$

где $c_i(\kappa) \equiv 2S c_\lambda c_i' \widetilde{c}_i(\kappa) (c_\rho'')^3$ $(i = 1,3,4)$, $c_2(\kappa) \equiv \pi c_\lambda \widetilde{c}_2(\kappa) (c_\rho'')^3$. В силу оценок (7.5)–(7.7) имеют место оценки (7.4), где $C_2(\kappa) \equiv \sum\limits_{i=1}^{6} c_i(\kappa)$. Теорема 7.2 доказана. □

На основании неравенств (7.1), (7.4) при условиях $\gamma,\ L \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant 2$, $h \leqslant 1$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $v \in C^3(\partial\Omega)$ получаем оценки

$$|\widehat{u} - u| \leqslant C(\kappa) \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} h^3 \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L}), \quad C(\kappa) \equiv C_1(\kappa) + C_2(\kappa). \tag{7.8}$$

Аналогично при $\gamma,\ L \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant 2$, $h \leqslant 1$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $v \in C^3(\partial\Omega)$ выполняются оценки

$$|\widehat{u}' - u| \leqslant C(\kappa) \|v\|_{C^3(\partial\Omega)} h^3 \quad ((s,d) \in \overline{\mathrm{T}_L'}). \tag{7.9}$$

Согласно (4.7), (6.4) функция $\breve{u}-\dot{u}$ вычисляется при $(s,d)\in\overline{\mathrm{T}}$ с помощью формулы

$$\breve{u}-\dot{u}=\big[\widehat{u}'-u\big]_{s=s_{2l-1}}\Lambda_{-1}^{[s_{2l-1},s_{2l+1}]}+\big[\widehat{u}-u\big]_{s=s_{2l}}\Lambda_{0}^{[s_{2l-1},s_{2l+1}]}+\big[\widehat{u}'-u\big]_{s=s_{2l+1}}\Lambda_{1}^{[s_{2l-1},s_{2l+1}]},$$

где $d\in\overline{I_D}$, $s\in[s_{2l-1},s_{2l+1}]$, $l=\overline{-L,L}$, то есть функция $\breve{u}-\dot{u}$ на промежутках $[s_{2l-1},s_{2l+1}]$ описывается квадратичными полиномами Лагранжа, заданными значениями функций $\widehat{u}-u$, $\widehat{u}'-u$ в узлах s_l ($l=\overline{-2L-1,2L}$). Поэтому с учетом неравенств (2.5), (7.8), (7.9) при γ, $L\in\mathbb{N}$, $\gamma\geqslant 2$, $h\leqslant 1$, $\partial\Omega\in C^{2\gamma+1}$, $v\in C^3(\partial\Omega)$ имеют место следующие оценки:

$$|\breve{u}-\dot{u}|\leqslant c_{\Lambda,0}\,C(\kappa)\|v\|_{C^3(\partial\Omega)}h^3\quad((s,d)\in\overline{\mathrm{T}}).\tag{7.10}$$

На основании оценок (6.5), (7.10) получаем основное утверждение настоящей работы.

Следствие 7.1. *Пусть γ, $L\in\mathbb{N}$, $\gamma\geqslant 2$, $h\leqslant 1$, $\partial\Omega\in C^{2\gamma+1}$, $v\in C^3(\partial\Omega)$. Тогда для функций $\breve{u}$ справедливы оценки* (1.3)*, где* $c(v,\kappa)\equiv c_\lambda\,C'(v,\kappa)+c_{\Lambda,0}\,C(\kappa)\|v\|_{C^3(\partial\Omega)}$.

§ 8. Случай больших по модулю значений комплексного волнового числа

Здесь мы коснемся вопроса, как влияет на погрешность аппроксимаций НП ППС увеличение модуля числа κ.

В силу разложений [23, п. 7.23, формулы (1), (2)] для функций $I_0(z)$, $K_0(z)$ имеем при $|z|\to\infty$ и фиксированном $\arg z\in(-\pi/2,\pi/2]$ асимптотические равенства

$$\begin{gathered}I_0^{(n)}(z)=(2\pi z)^{-1/2}\Big[e^z\big(1+O\big(|z|^{-1}\big)\big)+e^{-z+\pi i/2}\big((-1)^n+O\big(|z|^{-1}\big)\big)\Big],\\ K_0^{(n)}(z)=\pi^{1/2}(2z)^{-1/2}e^{-z}\big((-1)^n+O\big(|z|^{-1}\big)\big)\quad(n\in\mathbb{Z}_+)\end{gathered}\tag{8.1}$$

и пределы $\big|I_0^{(n)}(z)\big|\to\infty$, $\big|K_0^{(n)}(z)\big|\to 0$.

Здесь $O\big(|f_1(z)|\big)$ при $|z|\to\infty$ — это общее обозначение для некоторых функций $f_2(z)$, для которых существуют числа $M>0$, $C>0$, такие, что при $|z|\geqslant M$ выполняется неравенство $|f_2(z)|\leqslant C|f_1(z)|$.

Пусть $\arg\kappa\in(-\pi/2,\pi/2]$, $r>0$, $\ln r\neq 0$. С помощью формул (8.1) получаем при $|\kappa|\to\infty$ и фиксированных $\arg\kappa$, r равенства

$$\begin{gathered}2\pi\partial_r^n K_{0,1,0}(r,\kappa)=-\partial_r^n I_0(\kappa r)=-\kappa^n I_0^{(n)}(\kappa r)=\\ =-(2\pi r)^{-1/2}\kappa^{n-1/2}\Big[e^{\kappa r}\big(1+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)+e^{-\kappa r+\pi i/2}\big((-1)^n+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)\Big],\\ 2\pi\partial_r^n K_{0,1,1}(r,\kappa)=-2^{-1}\kappa\partial_r^n\big(r^{-1}I_0'(\kappa r)\big)=-2^{-1}\sum_{m=0}^{n}C_n^m(r^{-1})^{(n-m)}\kappa^{m+1}I_0^{(m+1)}(\kappa r)=\\ =-(8\pi r)^{-1/2}\sum_{m=0}^{n}C_n^m(r^{-1})^{(n-m)}\kappa^{m+1/2}\Big[e^{\kappa r}\big(1+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)+\\ +e^{-\kappa r+\pi i/2}\big((-1)^{m+1}+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)\Big]=\\ =-(8\pi r^3)^{-1/2}\kappa^{n+1/2}\Big[e^{\kappa r}\big(1+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)+e^{-\kappa r+\pi i/2}\big((-1)^{n+1}+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)\Big],\\ 2\pi\partial_r^n K_{0,2,1}(r,\kappa)=\partial_r^n\big[(2r)^{-1}\kappa K_0'(\kappa r)+\ln r(2r)^{-1}\kappa I_0'(\kappa r)+(2r^2)^{-1}I_0(\kappa r)\big]=\\ =2^{-1}\sum_{m=0}^{n}C_n^m\big[(r^{-1})^{(n-m)}\kappa^{m+1}K_0^{(m+1)}(\kappa r)+(r^{-1}\ln r)^{(n-m)}\kappa^{m+1}I_0^{(m+1)}(\kappa r)+\\ +(r^{-2})^{(n-m)}\kappa^m I_0^{(m)}(\kappa r)\big]=\\ =(8\pi r)^{-1/2}\sum_{m=0}^{n}C_n^m\Big\{\pi(r^{-1})^{(n-m)}\kappa^{m+1/2}e^{-\kappa r}\big((-1)^{m+1}+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)+\end{gathered}$$

$$+ (r^{-1}\ln r)^{(n-m)}\kappa^{m+1/2}\big[e^{\kappa r}\big(1+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)+e^{-\kappa r+\pi i/2}\big((-1)^{m+1}+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)\big]+$$
$$+ (r^{-2})^{(n-m)}\kappa^{m-1/2}\big[e^{\kappa r}\big(1+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)+e^{-\kappa r+\pi i/2}\big((-1)^{m}+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)\big]\Big\}=$$
$$= (8\pi r^3)^{-1/2}\kappa^{n+1/2}\Big\{\pi e^{-\kappa r}\big((-1)^{n+1}+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)+\ln r\big[e^{\kappa r}\big(1+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)+$$
$$+ e^{-\kappa r+\pi i/2}\big((-1)^{n+1}+O\big(|\kappa|^{-1}\big)\big)\big]\Big\}\quad (n\in\mathbb{Z}_+,\quad C_n^m\equiv n!/\big((n-m)!m!\big). \tag{8.2}$$

В силу асимптотических равенств (8.2), (8.1) коэффициент $c(\kappa)$ в правой части оценки (1.3) экспоненциально увеличивается при фиксированном $\arg\kappa\in(-\pi/2,\pi/2)$ и $|\kappa|\to\infty$, а при $\arg\kappa=\pi/2$, $|\kappa|\to\infty$ возможен только степенной рост этого коэффициента. Действительно, с учетом формул (3.10), (3.7), (1.1) в оценках (7.2), (7.3) $c_i=O\big(|\kappa|^{-1/2}e^{\alpha\operatorname{Re}\kappa}\big)$ $(i=1,2)$, $c_i=O\big(|\kappa|^{1/2}e^{\alpha\operatorname{Re}\kappa}\big)$ $(i=\overline{3,5})$; в оценках (7.5)–(7.7) $c_i=O\big(|\kappa|^{5/2}e^{\alpha\operatorname{Re}\kappa}\big)$ $(i=1,2)$, $c_i=O\big(|\kappa|^{7/2}e^{\alpha\operatorname{Re}\kappa}\big)$ $(i=\overline{3,5})$, $c_6=O\big(|\kappa|^{2\gamma+1/2}e^{\alpha\operatorname{Re}\kappa}\big)$ $(\gamma\geqslant 2)$; в оценке (6.5) $C'=O\big(|\kappa|^{7/2}\big)$. Здесь $\alpha\equiv\sup\limits_{(s,\sigma,d)\in\Upsilon} r$. Следовательно,

$$c=O\big(|\kappa|^{2\gamma+1/2}e^{\alpha\operatorname{Re}\kappa}\big). \tag{8.3}$$

§ 9. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим вычисление НП ППС с плотностью $v(\varphi)=\cos\varphi$, заданной на единичной окружности. Здесь $R=1-d\geqslant 0$ и $\varphi=s$ — соответственно полярные радиус и угол с полюсом в центре единичного круга. Точные значения НП ППС $u(R,\varphi,\kappa)$ внутри круга вычисляются по формуле $u=-\kappa K_1(\kappa)\,I_1'(\kappa R)\cos\varphi$, во внешности круга $u=-\kappa I_1(\kappa)\,K_1'(\kappa R)\cos\varphi$, прямые значения НП ППС на границе круга $u\big|_{R=1}=-2^{-1}\kappa\big[K_1(\kappa)\,I_1'(\kappa)+I_1(\kappa)\,K_1'(\kappa)\big]\cos\varphi$.

Для данной геометрии $D=2/(3\pi)\approx 0.21$, $\Sigma=\arcsin(2/(3\pi))\approx 0.21$ $(s\in I_S)$. Функции $\breve{u}$, u вычисляются при фиксированных $d\in\overline{I_D}$ на множестве I_{8L}, образованном значениями $s=s_{l/4}\equiv lh/4$ $(l=\overline{-8L-4,8L+3})$. При фиксированных d получены максимумы абсолютных погрешностей приближенных функций $\breve{u}$: $\Delta\breve{u}(\kappa)\equiv\max\limits_{s\in I_{8L}}|\breve{u}-u|$.

В таблице 1 в каждой основной ячейке представлены значения $\Delta\breve{u}$ при $\kappa=2^{1/2}\pi i$, $\kappa=\pi(1+i)$, $\kappa=2^{1/2}\pi$, в соответствующем порядке сверху вниз.

Можно заметить, что полуаналитические аппроксимации $\breve{u}$ обладают кубической скоростью сходимости, сохраняющейся даже при очень малых расстояниях $|d|$ до границы $\partial\Omega$, что хорошо согласуется с утверждением следствия 7.1 об их равномерной кубической сходимости в приграничной области. При $-d\gg 1$ и $\operatorname{Re}\kappa>0$ в соответствии с оценкой (8.3) точность аппроксимаций $\breve{u}$ значительно снижается.

В таблице 2 при $d=10^{-6}$ в каждой основной ячейке представлены два значения $\Delta\breve{u}$: при $\kappa=2^{1/2}\pi ki$, $\kappa=\pi k(1+i)$, $\kappa=2^{1/2}\pi k$, в соответствующем порядке сверху вниз.

Можно заметить, что в согласии с оценкой (8.3) при увеличении $|\kappa|$ точность аппроксимаций уменьшается, причем при $\arg\kappa=0$ и $\arg\kappa=\pi/4$ значительно быстрее, чем при $\arg\kappa=\pi/2$, но кубическая скорость сходимости сохраняется в обоих случаях.

Заключение

В настоящей работе получены полуаналитические аппроксимации НП ППС для двумерного уравнения Гельмгольца, сходящиеся с кубической скоростью равномерно в замкнутой приграничной области, включающей границу. Такие аппроксимации могут быть построены для любой аналитически заданной границы класса C^5. Учитывая, что на практике часто известны координаты лишь конечного числа граничных точек, данное обстоятельство можно отнести к недостаткам метода. С другой стороны, если вопрос об аппроксимации границы с помощью достаточно гладкой аналитически заданной кривой удовлетворительно решен,

Таблица 1. Максимумы абсолютных погрешностей при $\kappa = 2^{1/2}\pi i$, $\kappa = \pi(1+i)$, $\kappa = 2^{1/2}\pi$

d	$h=\pi/15$	$h=\pi/31$	$h=\pi/63$	$h=\pi/127$	$h=\pi/255$	$h=\pi/511$
0.9	$4.9\cdot10^{-4}$ $3.9\cdot10^{-5}$ $3.0\cdot10^{-5}$	$5.6\cdot10^{-5}$ $3.7\cdot10^{-6}$ $1.5\cdot10^{-6}$	$6.6\cdot10^{-6}$ $4.3\cdot10^{-7}$ $1.6\cdot10^{-7}$	$8.1\cdot10^{-7}$ $5.3\cdot10^{-8}$ $1.8\cdot10^{-8}$	$1.0\cdot10^{-7}$ $6.5\cdot10^{-9}$ $2.1\cdot10^{-9}$	$1.2\cdot10^{-8}$ $8.1\cdot10^{-10}$ $3.1\cdot10^{-10}$
10^{-4}	$4.1\cdot10^{-4}$ $2.7\cdot10^{-4}$ $2.7\cdot10^{-4}$	$4.6\cdot10^{-5}$ $3.0\cdot10^{-5}$ $2.9\cdot10^{-5}$	$5.4\cdot10^{-6}$ $3.6\cdot10^{-6}$ $3.5\cdot10^{-6}$	$6.6\cdot10^{-7}$ $4.3\cdot10^{-7}$ $4.2\cdot10^{-7}$	$8.2\cdot10^{-8}$ $5.4\cdot10^{-8}$ $5.2\cdot10^{-8}$	$1.0\cdot10^{-8}$ $6.7\cdot10^{-9}$ $6.5\cdot10^{-9}$
10^{-13}	$4.1\cdot10^{-4}$ $2.7\cdot10^{-4}$ $2.7\cdot10^{-4}$	$4.6\cdot10^{-5}$ $3.0\cdot10^{-5}$ $2.9\cdot10^{-5}$	$5.4\cdot10^{-6}$ $3.6\cdot10^{-6}$ $3.5\cdot10^{-6}$	$6.6\cdot10^{-7}$ $4.3\cdot10^{-7}$ $4.2\cdot10^{-7}$	$8.2\cdot10^{-8}$ $5.4\cdot10^{-8}$ $5.2\cdot10^{-8}$	$1.0\cdot10^{-8}$ $6.7\cdot10^{-9}$ $6.5\cdot10^{-9}$
0	$1.2\cdot10^{-4}$ $1.0\cdot10^{-4}$ $6.8\cdot10^{-5}$	$1.3\cdot10^{-5}$ $4.0\cdot10^{-6}$ $3.8\cdot10^{-6}$	$1.6\cdot10^{-6}$ $4.3\cdot10^{-7}$ $4.3\cdot10^{-7}$	$1.9\cdot10^{-7}$ $4.5\cdot10^{-8}$ $5.1\cdot10^{-8}$	$2.3\cdot10^{-8}$ $5.1\cdot10^{-9}$ $6.2\cdot10^{-9}$	$2.9\cdot10^{-9}$ $6.2\cdot10^{-10}$ $7.7\cdot10^{-10}$
-10^{-13}	$1.7\cdot10^{-4}$ $3.3\cdot10^{-4}$ $3.2\cdot10^{-4}$	$2.0\cdot10^{-5}$ $3.5\cdot10^{-5}$ $3.6\cdot10^{-5}$	$2.3\cdot10^{-6}$ $4.2\cdot10^{-6}$ $4.3\cdot10^{-6}$	$2.9\cdot10^{-7}$ $5.1\cdot10^{-7}$ $5.2\cdot10^{-7}$	$3.5\cdot10^{-8}$ $6.3\cdot10^{-8}$ $6.5\cdot10^{-8}$	$4.4\cdot10^{-9}$ $7.9\cdot10^{-9}$ $8.0\cdot10^{-9}$
-10^{-4}	$1.7\cdot10^{-4}$ $3.3\cdot10^{-4}$ $3.2\cdot10^{-4}$	$2.0\cdot10^{-5}$ $3.6\cdot10^{-5}$ $3.6\cdot10^{-5}$	$2.3\cdot10^{-6}$ $4.2\cdot10^{-6}$ $4.3\cdot10^{-6}$	$2.8\cdot10^{-7}$ $5.1\cdot10^{-7}$ $5.2\cdot10^{-7}$	$3.5\cdot10^{-8}$ $6.3\cdot10^{-8}$ $6.5\cdot10^{-8}$	$4.4\cdot10^{-9}$ $7.9\cdot10^{-9}$ $8.0\cdot10^{-9}$
-1	$1.6\cdot10^{-4}$ $5.6\cdot10^{-4}$ $3.1\cdot10^{-3}$	$1.8\cdot10^{-5}$ $1.6\cdot10^{-5}$ $9.2\cdot10^{-5}$	$2.1\cdot10^{-6}$ $1.8\cdot10^{-6}$ $8.2\cdot10^{-6}$	$2.5\cdot10^{-7}$ $1.5\cdot10^{-7}$ $6.2\cdot10^{-7}$	$3.1\cdot10^{-8}$ $1.1\cdot10^{-8}$ $4.2\cdot10^{-8}$	$3.9\cdot10^{-9}$ $7.0\cdot10^{-10}$ $2.6\cdot10^{-9}$
-5	$9.9\cdot10^{-5}$ $2.4\cdot10^{2}$ $1.5\cdot10^{5}$	$1.1\cdot10^{-5}$ $7.0\cdot10^{0}$ $4.4\cdot10^{3}$	$1.3\cdot10^{-6}$ $6.3\cdot10^{-1}$ $3.9\cdot10^{2}$	$1.6\cdot10^{-7}$ $4.8\cdot10^{-2}$ $2.9\cdot10^{1}$	$2.0\cdot10^{-8}$ $3.3\cdot10^{-3}$ $1.9\cdot10^{0}$	$2.5\cdot10^{-9}$ $2.1\cdot10^{-4}$ $1.2\cdot10^{-1}$

Таблица 2. Максимумы абсолютных погрешностей при $d = 10^{-6}$ и $\kappa = 2^{1/2}\pi ki$, $\kappa = \pi k(1+i)$, $\kappa = 2^{1/2}\pi k$

k	$h=\pi/15$	$h=\pi/31$	$h=\pi/63$	$h=\pi/127$	$h=\pi/255$	$h=\pi/511$
2	$3.7\cdot10^{-4}$ $2.8\cdot10^{-4}$ $7.2\cdot10^{-4}$	$3.9\cdot10^{-5}$ $3.1\cdot10^{-5}$ $3.8\cdot10^{-5}$	$4.7\cdot10^{-6}$ $4.2\cdot10^{-6}$ $5.5\cdot10^{-6}$	$5.7\cdot10^{-7}$ $5.1\cdot10^{-7}$ $5.9\cdot10^{-7}$	$7.0\cdot10^{-8}$ $5.9\cdot10^{-8}$ $6.2\cdot10^{-8}$	$8.7\cdot10^{-9}$ $7.1\cdot10^{-9}$ $7.1\cdot10^{-9}$
4	$1.1\cdot10^{-3}$ $1.6\cdot10^{-3}$ $8.4\cdot10^{-2}$	$5.3\cdot10^{-5}$ $3.2\cdot10^{-4}$ $3.2\cdot10^{-3}$	$1.6\cdot10^{-5}$ $2.0\cdot10^{-4}$ $6.0\cdot10^{-4}$	$1.6\cdot10^{-6}$ $2.6\cdot10^{-5}$ $6.6\cdot10^{-5}$	$1.3\cdot10^{-7}$ $2.2\cdot10^{-6}$ $5.4\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-8}$ $1.4\cdot10^{-7}$ $3.4\cdot10^{-7}$
6	$7.3\cdot10^{-4}$ $3.1\cdot10^{-1}$ $1.4\cdot10^{0}$	$4.7\cdot10^{-4}$ $1.3\cdot10^{-2}$ $7.6\cdot10^{-2}$	$1.5\cdot10^{-4}$ $4.0\cdot10^{-3}$ $1.5\cdot10^{-2}$	$1.1\cdot10^{-5}$ $4.4\cdot10^{-4}$ $2.0\cdot10^{-3}$	$7.4\cdot10^{-7}$ $3.3\cdot10^{-5}$ $1.7\cdot10^{-4}$	$4.6\cdot10^{-8}$ $2.0\cdot10^{-6}$ $1.1\cdot10^{-5}$
8	$1.9\cdot10^{-2}$ $2.8\cdot10^{0}$ $1.4\cdot10^{1}$	$2.3\cdot10^{-3}$ $4.1\cdot10^{-3}$ $1.2\cdot10^{0}$	$5.4\cdot10^{-4}$ $1.5\cdot10^{-2}$ $2.2\cdot10^{-1}$	$2.5\cdot10^{-5}$ $1.6\cdot10^{-4}$ $3.5\cdot10^{-2}$	$1.1\cdot10^{-6}$ $1.1\cdot10^{-4}$ $3.3\cdot10^{-3}$	$7.0\cdot10^{-8}$ $8.1\cdot10^{-6}$ $2.1\cdot10^{-4}$
10	$2.8\cdot10^{-1}$ $7.3\cdot10^{0}$ $1.2\cdot10^{2}$	$7.1\cdot10^{-3}$ $1.3\cdot10^{0}$ $1.5\cdot10^{1}$	$9.0\cdot10^{-4}$ $9.3\cdot10^{-2}$ $2.7\cdot10^{0}$	$6.1\cdot10^{-6}$ $3.2\cdot10^{-2}$ $4.8\cdot10^{-1}$	$1.1\cdot10^{-6}$ $3.5\cdot10^{-3}$ $4.8\cdot10^{-2}$	$6.8\cdot10^{-8}$ $2.2\cdot10^{-4}$ $3.2\cdot10^{-3}$

то точное интегрирование в рамках предлагаемого метода всегда может быть осуществлено, независимо от сложности задания кривой. Такой двухступенчатый подход позволяет предотвратить эффект «ложной границы» [28].

Отметим, что для построения аппроксимаций требуется лишь конечное число значений функции плотности, заданных в узловых граничных точках.

Также недостатком таких аппроксимаций является значительное уменьшение точности при $\operatorname{Re}\kappa \gg 1$, в условиях сильной диссипации. Это связано с тем, что производные подынтегральных функций, заменяемых приближенными в рамках аддитивно-мультипликативной аппроксимации, экспоненциально увеличиваются по модулю при $\operatorname{Re}\kappa \to +\infty$. В то же время кубическая скорость сходимости при этом сохраняется, поэтому при небольших $\operatorname{Re}\kappa$ аппроксимации могут использоваться на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
2. Мазья В. Г. Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». 1988. Т. 27. С. 131–228. https://www.mathnet.ru/rus/intf107
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
4. Gao X. W., Yang Kai, Wang Jing. An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2008. Vol. 32. Issue 8. P. 692–696. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.12.004
5. Zhang Yao-Ming, Gu Yan, Chen Jeng-Tzong. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities // Computational Mechanics. 2011. Vol. 47. Issue 5. P. 493–504. https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0
6. Gu Yan, Chen Wen, Zhang Bo, Qu Wenzhen. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method // Computational Mechanics. 2014. Vol. 53. Issue 6. P. 1223–1234. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1
7. Niu Zhongrong, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin, Hu Zongjun. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2007. Vol. 31. Issue 12. P. 949–964. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001
8. Niu Zhongrong, Hu Zongjun, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. Vol. 61. P. 42–51. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007
9. Hu Zongjun, Niu Zhongrong, Cheng Changzheng. A new semi-analytic algorithm of nearly singular integrals on higher order element in 3D potential BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2016. Vol. 63. P. 30–39. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.11.001
10. Cheng Changzheng, Pan Dong, Han Zhilin, Wu Meng, Niu Zhongrong. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals // Acta Mechanica Solida Sinica. 2018. Vol. 31. No. 4. P. 433–444. https://doi.org/10.1007/s10338-018-0040-8
11. Han Zhilin, Cheng Changzheng, Hu Zongjun, Niu Zhongrong. The semi-analytical evaluation for nearly singular integrals in isogeometric elasticity boundary element method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2018. Vol. 95. P. 286–296. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.07.016
12. Han Zhilin, Huang Yifan, Cheng Changzheng, Liang Yongcheng, Hu Zongjun, Niu Zhongrong. The semianalytical analysis of nearly singular integrals in 2D potential problem by isogeometric boundary element method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2020. Vol. 121. Issue 16. P. 3560–3583. https://doi.org/10.1002/nme.6370
13. Han Zhilin, Pan Wei, Cheng Changzheng, Hu Zongjun, Niu Zhongrong. A semi-analytical treatment for nearly singular integrals arising in the isogeometric boundary element method-based solutions of 3D potential problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2022. Vol. 398. 115179. https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115179

14. Крутицкий П. А., Федотова А. Д., Колыбасова В. В. Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1269–1284. https://doi.org/10.1134/S0374064119090103
15. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С. 1121–1131. https://doi.org/10.31857/S037406412208012X
16. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя в случае уравнения Гельмгольца // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 3. С. 421–436. https://doi.org/10.31857/S0044466922030097
17. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Улучшенная квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64. № 2. С. 200–219. https://doi.org/10.31857/S0044466924020021
18. Иванов Д. Ю. О равномерной сходимости полуаналитического решения задачи Дирихле для диссипативного уравнения Гельмгольца вблизи границы двумерной области // Уфимский математический журнал. 2023. Т. 15. Вып. 4. С. 75–98. https://www.mathnet.ru/rus/ufa677
19. Иванов Д. Ю. О равномерной сходимости аппроксимаций потенциала двойного слоя вблизи границы двумерной области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 26–43. https://doi.org/10.35634/vm220103
20. Иванов Д. Ю. Об одной полуаналитической аппроксимации нормальной производной потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 434–451. https://doi.org/10.35634/vm230304
21. Иванов Д. Ю. О равномерной сходимости аппроксимаций касательной и нормальной производных потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64. № 7. С. 1233–1252. https://doi.org/10.31857/S0044466924070094
22. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981.
23. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.
24. Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968.
25. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 2003.
26. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
27. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
28. Gong Yanpeng, Dong Chunying, Bai Yang. Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2017. Vol. 75. P. 21–35. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.11.005

Поступила в редакцию 21.04.2025
Принята к публикации 25.10.2025

Иванов Дмитрий Юрьевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра «Высшая математика», Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), 127994, Россия, г. Москва, ГСП-4, ул. Образцова, 9.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4551-469X
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Цитирование: Д. Ю. Иванов. Полуаналитическая аппроксимация нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца вблизи и на границе двумерной области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 4. С. 537–557.

MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 4. Pp. 537–557.

D. Yu. Ivanov

Semi-analytical approximation of the normal derivative of the simple layer potential for the Helmholtz equation near and on the boundary of a two-dimensional domain

Keywords: quadrature formula, normal derivative of simple layer potential, Helmholtz equation, nearly singular integrals, uniform convergence.

MSC2020: 31-08, 31A10

DOI: 10.35634/vm250403

Approximations of the normal derivative of the simple layer potential for the two-dimensional Helmholtz equation in a near-boundary region including the boundary are obtained. Such approximations are feasible for any analytically specified boundary of class C^5. To obtain them, analytical integration over the smooth component of the distance function, an additive-multiplicative method for extracting a singularity, and piecewise-quadratic interpolation of slowly varying functions are used. It is proved that such approximations converge uniformly with a cubic rate with respect to the distance to the boundary. It is also proved that semi-analytical approximations, by analogy with the exact function, suffer a discontinuity at the boundary, the magnitude of which is proportional to the values of the interpolated density function. The theoretical conclusions are confirmed by the results of calculations of the normal derivative of the simple layer potential near and on the boundary of a circular domain.

REFERENCES

1. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques: Theory and applications in engineering*, Berlin: Springer, 1984. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3
2. Maz'ya V. G. Boundary integral equations, *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennye Problemy Matematiki. Fundamental'nye Napravleniya"*, 1988, vol. 27, pp. 131–228 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/intf107
3. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Metody vychislenii. Tom 1* (Methods of computations. Vol. 1), Moscow: Fizmatgiz, 1962.
4. Gao X. W., Yang Kai, Wang Jing. An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, vol. 32, issue 8, pp. 692–696. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.12.004
5. Zhang Yao-Ming, Gu Yan, Chen Jeng-Tzong. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities, *Computational Mechanics*, 2011, vol. 47, issue 5, pp. 493–504. https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0
6. Gu Yan, Chen Wen, Zhang Bo, Qu Wenzhen. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method, *Computational Mechanics*, 2014, vol. 53, issue 6, pp. 1223–1234. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1
7. Niu Zhongrong, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin, Hu Zongjun. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, vol. 31, issue 12, pp. 949–964. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001
8. Niu Zhongrong, Hu Zongjun, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, vol. 61, pp. 42–51. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007
9. Hu Zongjun, Niu Zhongrong, Cheng Changzheng. A new semi-analytic algorithm of nearly singular integrals on higher order element in 3D potential BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2016, vol. 63, pp. 30–39. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.11.001
10. Cheng Changzheng, Pan Dong, Han Zhilin, Wu Meng, Niu Zhongrong. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2018, vol. 31, no. 4, pp. 433–444. https://doi.org/10.1007/s10338-018-0040-8

11. Han Zhilin, Cheng Changzheng, Hu Zongjun, Niu Zhongrong. The semi-analytical evaluation for nearly singular integrals in isogeometric elasticity boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2018, vol. 95, pp. 286–296. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.07.016
12. Han Zhilin, Huang Yifan, Cheng Changzheng, Liang Yongcheng, Hu Zongjun, Niu Zhongrong. The semianalytical analysis of nearly singular integrals in 2D potential problem by isogeometric boundary element method, *International Journal for Numerical Methods Engineering*, 2020, vol. 121, issue 16, pp. 3560–3583. https://doi.org/10.1002/nme.6370
13. Han Zhilin, Pan Wei, Cheng Changzheng, Hu Zongjun, Niu Zhongrong. A semi-analytical treatment for nearly singular integrals arising in the isogeometric boundary element method-based solutions of 3D potential problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, vol. 398, 115179. https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115179
14. Krutitskii P. A., Fedotova A. D., Kolybasova V. V. Quadrature formula for the simple layer potential, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 9, pp. 1226–1241. https://doi.org/10.1134/S0012266119090106
15. Krutitskii P. A., Reznichenko I. O. Quadrature formula for the double layer potential with differentiable density, *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 8, pp. 1114–1125. https://doi.org/10.1134/s0012266122080122
16. Krutitskii P. A., Reznichenko I. O. Quadrature formula for a double layer potential in the case of the Helmholtz equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, no. 3, pp. 411–426. https://doi.org/10.1134/S0965542522030095
17. Krutitskii P. A., Reznichenko I. O. Improved quadrature formulas for the direct value of the normal derivative of a single-layer potential, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2024, vol. 64, no. 2, pp. 188–205. https://doi.org/10.1134/S0965542524020076
18. Ivanov D. Yu. On uniform convergence of semi-analytic solution of Dirichlet problem for dissipative Helmholtz equation in vicinity of boundary of two-dimensional domain, *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, issue 4, pp. 76–99. https://doi.org/10.13108/2023-15-4-76
19. Ivanov D. Yu. On uniform convergence of approximations of the double layer potential near the boundary of a two-dimensional domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'uternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 1, pp. 26–43 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220103
20. Ivanov D. Yu. On one semi-analytical approximation of the normal derivative of the simple layer potential near the boundary of a two-dimensional domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'uternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 434–451 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm230304
21. Ivanov D. Yu. On the uniform convergence of approximations to the tangential and normal derivatives of the single-layer potential near the boundary of a two-dimensional domain, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2024, vol. 64, no. 7, pp. 1504–1522. https://doi.org/10.1134/S0965542524700623
22. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki. Tom 4. Chast' 2* (A course of higher mathematics. Vol. 4. Part 2), Moscow: Nauka, 1981.
23. Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge: Cambridge University Press, 1944.
24. Mikhlin S. G. *Mathematical physics: an advanced course*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1970.
25. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 2* (Differential and integral calculus course. Vol. 2), Moscow: Fizmatlit, 2003.
26. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 1* (Differential and integral calculus course. Vol. 1), Moscow: Fizmatlit, 2003.
27. Colton D., Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*, New York: John Wiley and Sons, 1983. https://doi.org/10.1002/zamm.19850650104

28. Gong Yanpeng, Dong Chunying, Bai Yang. Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017, vol. 75, pp. 21–35. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.11.005

Received 21.04.2025
Accepted 25.10.2025

Dmitrii Yurievich Ivanov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Russian University of Transport (MIIT), ul. Obraztsova, 9, GSP-4, Moscow, 127994, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4551-469X
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Citation: D. Yu. Ivanov. Semi-analytical approximation of the normal derivative of the simple layer potential for the Helmholtz equation near and on the boundary of a two-dimensional domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 4, pp. 537–557.