ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 4. С. 558–577.

УДК 517.977.8

© *Е. А. Колпакова*

ПОСТРОЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПОЗИЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С НЕФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ

Рассматривается дифференциальная игра двух лиц с нефиксированным моментом окончания. Особенностью игры является наличие не только целевого множества, но и линии жизни, достигая которую второй игрок получает бесконечный выигрыш. Функционал платы зависит от траектории игроков и их управлений. Частными случаями рассматриваемой дифференциальной игры являются игры поимки и быстродействия. Для рассматриваемой игры построены универсальные позиционные стратегии в предположении, что связанная с дифференциальной игрой задача Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби допускает вязкостное проксимальное решение. Построение универсальных стратегий опирается на понятие проксимального градиента и использует подход Красовского–Субботина. Универсальность позиционных стратегий заключается в том, что для любой начальной точки из некоторого компакта позиционная стратегия одинаково эффективна. Кроме того, доказаны теоремы об оценке гарантированных результатов игроков.

Ключевые слова: дифференциальная игра, универсальные позиционные стратегии, задача Дирихле, вязкостное решение.

DOI: 10.35634/vm250404

Введение

В теории дифференциальных игр было показано, что функция цены дифференциальной игры удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби, которое понимается в минимаксном/вязкостном смысле [1, 2]. В рамках этой теории возникает следующий вопрос. Пусть нам задано некоторое обобщенное решение уравнения Гамильтона–Якоби, построенное по исходной дифференциальной игре. Можно ли на основе этого решения построить стратегию, которая будет оптимальной или почти оптимальной в исходной дифференциальной игре. Данная проблема активно исследовалась ранее, см. [1, 3] и ссылки внутри них. Разработан ряд подходов к конструированию стратегий, среди которых особый интерес представляют универсальные позиционные стратегии, то есть стратегии, эффективные для любой точки из заданного множества [4–7]. Однако следует отметить, что универсальные стратегии могут быть построены лишь на некотором компакте [8].

Разработанные подходы к построению позиционных стратегий опираются на следующие ключевые направления: поиск локального минимума [3], построение квазиградиента [1]. Особого внимания заслуживает подход, восходящий к работам [10], который основан на методе проксимальных субдифференциалов. Основное преимущество данного метода заключается в использовании максимально простой конструкции построения квазиградиента (проксимального градиента), а также в замене требования существования вязкостного решения на проксимальное вязкостное решение, что существенно упрощает проверку соответствия определению. Вопрос о существовании проксимального вязкостного решения автоматически решается в рамках общей теории вязкостных решений, так как любое вязкостное решение является также проксимальным вязкостным решением. В доказательстве теоремы о единственности вязкостного решения используется определение проксимального вязкостного решения. Более подробно этот класс решений рассмотрен в монографии Ф. Кларка [9].

В настоящей работе мы рассматриваем дифференциальную игру с нефиксированным моментом окончания. Постановка рассматриваемой задачи включает динамическую систему, описывающую положение игроков; целевое множество и линию жизни, которые представляют собой замкнутые множества, определяющие момент окончания игры. Кроме того, задан интегро-терминальный функционал, который зависит от момента попадания траектории игроков на одно из заданных множеств. Отметим, что рассматриваемая постановка обобщает классические задачи быстродействия и игр преследования с линией жизни и без нее [11–14]. Ранее такая постановка рассматривалась в работе [15], где было показано, что для данной задачи существует функция цены, и она удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби.

В данной работе, развивая подход [6], предложенный для дифференциальных игр быстродействия, мы разрабатываем универсальные стратегии для дифференциальных игр с функционалом, зависящим от траектории системы, управлений игроков и момента выхода траектории на границу целевого множества или линии жизни. В работе показано, что построенные стратегии являются субоптимальными. В основе конструкции универсальных стратегий лежит аппарат проксимальных вязкостных решениий уравнения Гамильтона–Якоби. Так как задача быстродействия вкладывается в рассматриваемую задачу с нефиксированным моментом окончания, то предложенные конструкции универсальных стратегий обобщают универсальные стратегии, построенные в работах [6, 7] для задачи быстродействия.

Важно отметить, что в работах [6, 7] универсальные стратегии были построены только для первого игрока. В настоящей работе построены универсальные позиционные стратегии для обоих игроков.

Статья организована следующим образом. В параграфе 1 дана постановка задачи и основные предположения. В параграфе 2 описаны позиционные стратегии и гарантированные результаты игроков. Приведено определение функции цены дифференциальной игры. В параграфе 3 описана задача Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби, приведено определение проксимального вязкостного решения. Конструкции субоптимальных стратегий и оценка гарантированного результата даны в параграфе 4.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальную игру вида

$$\dot{x}(t) = f(x(t), p(t), q(t)), \quad x(0) = x_0. \tag{1.1}$$

Здесь $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, управление первого игрока определяется переменной $p(t) \in P$, управление второго игрока переменной $q(t) \in Q$, P, Q — метрические компакты. Рассмотрим два замкнутых множества $M_1 \subset \mathbb{R}^d$ и $M_2 \subset \mathbb{R}^d$ такие, что расстояние между ними

$$\operatorname{dist}(M_1; M_2) = \min\bigl\{\|x - y\| \colon x \in M_1, y \in M_2\bigr\} > 0,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^d$. Обозначим границы множеств M_1 и M_2 символами $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ соответственно. Обозначим символом $G = \mathbb{R}^d \setminus (M_1 \cup M_2)$ область дифференциальной игры, а символом $\partial G = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ границу области игры. На множестве ∂G определим функцию σ, которая принимает конечные значения на множестве $\mathcal{M}_1$ и $\sigma \equiv +\infty$ на множестве $\mathcal{M}_2$.

Рассмотрим функционал на множестве непрерывных функций $x(\cdot) \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$

$$\tau(x(\cdot)) = \min\bigl\{t \geqslant 0 \colon x(t) \in M_1 \cup M_2\bigr\}. \tag{1.2}$$

Если $x(t) \notin M_1 \cup M_2$ для всех $t \geqslant 0$, то $\tau(x(\cdot)) = +\infty$. Мы назовем $\tau(x(\cdot))$ моментом выхода траектории $x(\cdot)$ на границу области игры.

Первый игрок минимизирует функционал платы

$$J(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) = \int_0^{\tau(x(\cdot))} g(x(t), p(t), q(t))\,dt + \sigma\big(x(\tau(x(\cdot)))\big), \tag{1.3}$$

где $\tau(x(\cdot))$ определено (1.2), $x(\cdot)$ — решение задачи (1.1). Второй игрок стремится максимизировать этот функционал. Если $\tau(x(\cdot)) = +\infty$, тогда $J(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) = +\infty$.

Таким образом, первый игрок стремится привести систему на множество M_1, которое называется целевым множеством. Второй игрок максимизирует выигрыш двумя способами: привести траекторию системы (1.1) на множество M_2 (линию жизни), где терминальная функция σ принимает бесконечные значения, или избегать целевого множества M_1 как можно дольше.

Будем предполагать, что

(A1) функции f, g непрерывны по всем аргументам;

(A2) функции f, g липшицевы по x: для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$, $p \in P$, $q \in Q$

$$||f(x+y,p,q) - f(x,p,q)|| + |g(x+y,p,q) - g(x,p,q)| \leqslant \lambda \|y\|;$$

(A3) выполнено условие седловой точки в маленькой игре: для любых $s \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\min_{p\in P}\max_{q\in Q}[\langle s, f(x,p,q)\rangle + g(x,p,q)] = \max_{q\in Q}\min_{p\in P}[\langle s, f(x,p,q)\rangle + g(x,p,q)];$$

(A4) существует константа $b > 0$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $p \in P$, $q \in Q$, $b \leqslant g(x,p,q)$;

(A5) существует константа $\Sigma > 0$ такая, что $\sigma(x) \in [0, \Sigma]$, если $x \in \mathcal{M}_1$. Функция σ липшицева с константой L на множестве $\mathcal{M}_1$.

В предположении (A4), если мы допускаем $g(x,p,q) = 0$ в некоторых точках $x \in G$, то в этих точках связь между выигрышем игроков и временем выхода траектории на целевое множество или на линию жизни теряется. Фактически это означает, что функционал будет постоянным по времени, и первому игроку выгодно оставаться в этих точках как можно дольше. Мы можем добавить точки $x \in \mathbb{R}^d : g(x,p,q) = 0$ к множеству M_1 (целевому множеству первого игрока). Тогда придем к случаю, рассмотренному в статье.

Ограниченность функции σ на множестве M_1 следует из постановки задачи (первый игрок минимизирует свой выигрыш). Условие Липшица для терминальной функции σ является техническим. Заметим, что в классической задаче быстродействия $\sigma \equiv 0$.

§ 2. Позиционные стратегии

Прежде чем приступить к описанию функции цены, опишем позиционные стратегии игроков в дифференциальной игре (1.1)–(1.3) в рамках концепции Красовского–Субботина [3]. Обозначим символом $\bar{X}(x_0)$ множество, элементами которого являются тройки $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$, где $p \in L^\infty(\mathbb{R}^+; P)$, $q \in L^\infty(\mathbb{R}^+; Q)$, $x(\cdot) \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ является абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяющей уравнению (1.1), порожденной управлениями $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, и начальному условию $x(0) = x_0$. Функция $U \colon \mathbb{R}^d \to P$ (соответственно, функция $V \colon \mathbb{R}^d \to Q$) называется стратегией по принципу обратной связи. Пусть задана начальная точка $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Пусть также первый игрок выбрал стратегию U и разбиение временной оси $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots\}$, $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Обозначим символом $X(x_0, U, \Delta)$ множество троек $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) \in \bar{X}(x_0)$ таких, что $x(\cdot)$ является пошаговым движением, порожденным управлениями $p(t) = U(x(t_i))$ и $q(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; Q)$, то есть непрерывной функцией $x(\cdot)$, на каждом интервале $[t_i, t_{i+1})$ удовлетворяющей уравнению

$$\dot{x}(t) = f(x(t), U(x(t_i)), q(t)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Пусть второй игрок выбрал позиционную стратегию $V\colon \mathbb{R}^d \to Q$ и свое разбиение Δ. Символом $X(x_0, V, \Delta)$ обозначим множество троек $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) \in \bar{X}(x_0)$ таких, что $x(\cdot)$ является пошаговым движением, порожденным управлениями $p(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; P)$ и $q(t) = V(x(t_i))$, то есть непрерывной функцией $x(\cdot)$, на каждом интервале $[t_i, t_{i+1})$ удовлетворяющей уравнению

$$\dot{x}(t) = f(x(t), p(t), V(x(t_i))), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Так как функционал платы (1.3) может быть разрывным, введем дополнительные конструкции. Обозначим символом M_i^ε ε-окрестность множества M_i:

$$M_i^\varepsilon = \{x + y\colon x \in M_i, \|y\| \leqslant \varepsilon\}, \quad i = 1, 2.$$

Без ограничения общности будем полагать, что параметр ε выбран настолько маленьким, что $M_1^\varepsilon \cap M_2^\varepsilon = \varnothing$. Определим функционал

$$\tau_\varepsilon(x(\cdot)) = \min\{t \geqslant 0\colon x(t) \in M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon\}. \tag{2.1}$$

Если $x(t) \notin M_1^\varepsilon \cup M_2^\varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$, то полагаем $\tau_\varepsilon(x(\cdot)) = +\infty$. Продолжим функцию σ, определенную на ∂G, на все множество G так, чтобы полученная функция $\hat{\sigma}$ удовлетворяла следующим условиям:

(1) $\hat{\sigma}(x) = \sigma(x)$, при $x \in \mathcal{M}_1$,

(2) $\hat{\sigma}\colon \mathbb{R}^d \setminus M_2^\varepsilon \to [0, \Sigma]$ липшицева,

(3) $\hat{\sigma}(x) = +\infty$, при $x \in M_2^\varepsilon$.

Отметим, что хотя бы одна функция, удовлетворяющая этим свойствам существует. Опишем функцию, построенную с помощью расширения по Макшейну [16]. В работе [15] показано, что функция вида

$$\hat{\sigma}(x) = \begin{cases} \max[\sup\{\sigma(y) - L\|x - y\|\colon y \in \partial G\}, 0], & x \in \mathbb{R}^d \setminus M_2^\varepsilon, \\ +\infty, & x \in M_2^\varepsilon, \end{cases}$$

удовлетворяет всем выше перечисленным условиям.

Далее введем величины

$$J_1^\varepsilon(x_0, U, \Delta) = \sup\biggl\{\int_0^{\tau_\varepsilon(x(\cdot))} g(x(t), p(t), q(t))\,dt + \hat{\sigma}(x(\tau_\varepsilon(x(\cdot))))\colon \\ (x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) \in X(x_0, U, \Delta)\biggr\}.$$

Если $\tau_\varepsilon(x(\cdot)) = +\infty$, то $J_1^\varepsilon(x_0, U, \Delta) = +\infty$. Далее, $J_1^\varepsilon(x_0, U) = \lim\limits_{\operatorname{diam}\Delta\to 0} \sup J_1^\varepsilon(x_0, U, \Delta)$,

$$J_1^\varepsilon(x_0) = \inf_U J_1^\varepsilon(x_0, U), \qquad J_1^0(x_0) = \limsup_{\varepsilon\to 0} J_1^\varepsilon(x_0).$$

Величину $J_1^0(x_0)$ назовем гарантированным результатом первого игрока в классе стратегий по принципу обратной связи.

Аналогично определим гарантированный результат для второго игрока.

$$J_2^\varepsilon(x_0, V, \Delta) = \inf\biggl\{\int_0^{\tau_\varepsilon(x(\cdot))} g(x(t), p(t), q(t))\,dt + \hat{\sigma}(x(\tau_\varepsilon(x(\cdot)))) \colon \\ (x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) \in X(x_0, V, \Delta)\biggr\}.$$

Если $\tau_\varepsilon(x(\cdot)) = +\infty$, то $J_2^\varepsilon(x_0, V, \Delta) = +\infty$. Далее, $J_2^\varepsilon(x_0, V) = \lim\limits_{\operatorname{diam}\Delta\to 0} \inf J_2^\varepsilon(x_0, V, \Delta)$,

$$J_2^\varepsilon(x_0) = \sup_V J_2^\varepsilon(x_0, V), \qquad J_2^0(x_0) = \liminf_{\varepsilon\to 0} J_2^\varepsilon(x_0).$$

Для произвольных пошаговых процедур управления (U, Δ^1) и (V, Δ^2), выбранных игроками, справедливо неравенство

$$J_2^\varepsilon(x_0, V, \Delta^2) \leqslant J_1^\varepsilon(x_0, U, \Delta^1), \qquad J_2^0(x_0) \leqslant J_1^0(x_0).$$

Если $J_2^0(x_0) = J_1^0(x_0)$, то в дифференциальной игре существует цена $\operatorname{Val}(x_0) = J_2^0(x_0) = J_1^0(x_0)$, и пара стратегий, порождающих $\operatorname{Val}(x_0)$, называются оптимальными. Субоптимальными называются стратегии $(U^\varepsilon, V^\varepsilon)$, обеспечивающие неравенства для любого $\varepsilon > 0$

$$J_1^\varepsilon(x_0, U^\varepsilon, \Delta) \leqslant J_1^0(x_0) + \varepsilon; \qquad J_2^\varepsilon(x_0, V^\varepsilon, \Delta) \geqslant J_2^0(x_0) - \varepsilon.$$

§ 3. Вязкостное решение уравнения Гамильтона–Якоби

Для построения универсальных позиционных стратегий установим связь между функцией цены и обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби.

Определим гамильтониан $\forall x \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{H}(x, s) = \min_{p\in P}\max_{q\in Q}\Bigl[\langle s, f(x,p,q)\rangle + g(x,p,q)\Bigr] = \max_{q\in Q}\min_{p\in P}\Bigl[\langle s, f(x,p,q)\rangle + g(x,p,q)\Bigr],$$

где второе равенство выполняется согласно предположению (A3).

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби

$$\mathcal{H}(x, D_x\varphi(x)) = 0, \quad x \in G; \qquad \varphi(x) = \sigma(x), \quad x \in \partial G.$$

Здесь $s = D_x\varphi(x)$. Пусть

$$a = 2\lambda/b. \tag{3.1}$$

Функция $\varphi(\cdot)$ может принимать бесконечные значения при конечных значениях аргумента. Чтобы исключить эту ситуацию, применим преобразование Кружкова:

$$u(x) = 1 - e^{-a\varphi(x)}.$$

Тогда $u(x) \in [0, 1]$ $\forall x \in G$. Преобразование Кружкова для функции $\hat{\sigma}$ имеет вид

$$\tilde{\sigma}(x) = 1 - e^{-a\hat{\sigma}(x)}.$$

Отметим, что функция $\tilde{\sigma}$ является липшицевой на границе множества M_1^{ε}.

Гамильтониан после преобразования Кружкова имеет вид

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R} \quad H(x, s, z) = \min_{p \in P} \max_{q \in Q} [\langle s, f(x, p, q) \rangle + ag(x, p, q)(1 - z)].$$

Задача Дирихле для преобразованного гамильтониана имеет вид

$$H(x, D_x\varphi(x), \varphi(x)) = 0, \quad x \in G; \qquad \varphi(x) = \tilde{\sigma}(x), \quad x \in \partial G. \tag{3.2}$$

Функция H липшицева по всем переменным (см. [1]) и не возрастает по z. Символом $\operatorname{cl} G$ обозначим замыкание области G.

Одним из основных инструментов негладкого анализа является проксимальный субградиент, который обобщает понятие классического градиента. Множество всех субградиентов называется проксимальным субдифференциалом, который вводится следующим образом [17].

Определение 3.1. Вектор $\zeta \in \mathbb{R}^d$ принадлежит проксимальному субдифференциалу $\partial_P^- \phi(x)$ функции ϕ в точке $x \in \mathbb{R}^d$, если существует $\kappa > 0$ и окрестность $N(x)$ точки x такая, что для произвольного $y \in N(x)$ выполнено

$$\phi(y) - \phi(x) + \kappa \|y - x\|^2 \geqslant \langle \zeta, y - x \rangle.$$

Проксимальный супердифференциал определяется аналогичным образом.

Определение 3.2. Вектор $\zeta \in \mathbb{R}^d$ принадлежит проксимальному супердифференциалу $\partial_P^+ \phi(x)$ функции ϕ в точке $x \in \mathbb{R}^d$, если существует $\kappa > 0$ и окрестность $N(x)$ точки x такая, что для произвольного $y \in N(x)$ выполнено следующее условие

$$\phi(y) - \phi(x) - \kappa \|y - x\|^2 \leqslant \langle \zeta, y - x \rangle.$$

Определение 3.3. Полунепрерывная снизу функция $\phi\colon \operatorname{cl} G \to [0, 1]$ называется проксимальным суперрешением задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби, если выполнены следующие условия

$$H(x, \zeta, \phi(x)) \leqslant 0 \quad \forall \zeta \in \partial_P^- \phi(x), \quad x \in G; \qquad \phi(x) = \tilde{\sigma}(x), \quad x \in \partial G.$$

Определение 3.4. Полунепрерывная сверху функция $\phi\colon \operatorname{cl} G \to [0, 1]$ называется проксимальным субрешением задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби, если ϕ непрерывна на границе ∂G и выполнены следующие условия

$$H(x, \zeta, \phi(x)) \geqslant 0, \quad \forall \zeta \in \partial_P^+ \phi(x), \quad x \in G; \qquad \phi(x) = \tilde{\sigma}(x), \quad x \in \partial G.$$

Определение 3.5. Проксимальным вязкостным решением задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби называется функция ϕ, удовлетворяющая соотношениям $\phi(x) = \lim\limits_{k \to \infty} \phi_k(x) = \lim\limits_{k \to \infty} \phi^k(x)$, где $\{\phi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность проксимальных субрешений, $\{\phi^k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность проксимальных суперрешений.

§ 4. Конструкция субоптимальных позиционных стратегий

В этом параграфе будем предполагать, что нам задано проксимальное суперрешение задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби. Опираясь на это решение, мы построим субоптимальные стратегии.

4.1. Построение субоптимальных универсальных стратегий для первого игрока

Пусть $u\colon \operatorname{cl} G \to [0,1]$ — проксимальное суперрешение задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби (3.2). Рассмотрим преобразование функции u для произвольного $\alpha > 0$

$$u_\alpha(x) = \min_{y \in \operatorname{cl} G}[u(y) + w_\alpha(x, y)], \tag{4.1}$$

где

$$w_\alpha(x, y) = \frac{\|x - y\|^2}{2\alpha^2}. \tag{4.2}$$

Функция $y \to u(y) + w_\alpha(x, y)$ полунепрерывна снизу, таким образом минимум в выражении (4.1) достигается в точке y_α, причем $\|x - y_\alpha\| \leqslant 1$. Из работы [1, с. 246] следует, что $\|x - y_\alpha\| \leqslant 2\alpha$.

Пусть $\zeta_\alpha(x) = (x - y_\alpha(x))/\alpha^2$. Отметим, что $\zeta_\alpha(x) \in \partial u_P^-(y_\alpha(x))$ [6]. Определим следующие функции согласно правилу экстремального сдвига [3]:

$$\begin{aligned} p_0(x, s, z) &\in \arg\min_{p \in P}\Big\{\max_{q \in Q}\langle s, f(x, p, q)\rangle + ag(x, p, q)(1 - z)\Big\}, \\ q_0(x, s, z) &\in \arg\max_{q \in Q}\Big\{\min_{p \in P}\langle s, f(x, p, q)\rangle + ag(x, p, q)(1 - z)\Big\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Определим позиционную стратегию первого игрока $U_\alpha^p\colon \mathbb{R}^d \to P$ по правилу

$$U_\alpha^p(x) = p_0(x, \zeta_\alpha(x), u_\alpha(x)), \tag{4.4}$$

где p_0 определяется (4.3), функция u_α определяется (4.1), $y_\alpha(x) \in \arg\min_{y \in \operatorname{cl} G}[u(y) + w_\alpha(x, y)]$. Пусть компакт $D_1 \subset \operatorname{cl} G$ лежит во множестве Лебега функции $-\ln(1 - u(\cdot))$, T_0 — верхняя граница функции $-\ln(1 - u(\cdot))/(ab)$ на множестве D_1, где u — проксимальное суперрешение.

Для точки $x_0 \in D_1$ определим момент

$$\theta = \Big(-\ln(1 - u(x_0)) + \varepsilon\Big)/(ab),$$

множество

$$K = \cup_{x_0 \in D_1}\{x(t) \in \mathbb{R}^d\colon x(\cdot) \in \bar{X}(x_0), t \in [0, T_0 + 1]\}; \tag{4.5}$$

и величины

$$\begin{aligned} m &= \sup\{\|f(x + h, p, q)\|, x \in K, p \in P, q \in Q, \|h\| \leqslant 1\}; \\ r &= \sup\{|g(x + h, p, q)|, x \in K, p \in P, q \in Q, \|h\| \leqslant 1\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Прежде чем приступить к доказательству оценки гарантированного результата, докажем следующую лемму об одном шаге.

Лемма 4.1. *Пусть для произвольной тройки* $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) \in X(x_0, U_\alpha^p, \Delta)$, $t_i \in \Delta$, $t_i < \theta$ *и* $\operatorname{dist}(x(t_i); \partial G) > 3\alpha$. *Тогда для любого* $t \in [t_i, t_{i+1}] \cap [0; \theta]$ *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} u_\alpha(x(t)) \leqslant 1 + \exp\Big(a\int_{t_i}^t g(x(t), U_\alpha^p(x(t_i)), q(t))\,dt\Big)(u_\alpha(x(t_i)) - 1) + \\ + (t - t_i)\exp\Big(a\int_{t_i}^t g(x(t), U_\alpha^p(x(t_i)), q(t))\,dt\Big)h(\alpha, \delta), \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $h(\alpha, \delta) \geqslant 0$, *не зависит от* x_0 *и тройки* $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$, $\lim\limits_{\alpha \to 0}\lim\limits_{\delta \to 0} h(\alpha, \delta) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$\xi = x(t_i), \quad \zeta_\alpha = \zeta_\alpha(\xi), \quad \eta_\alpha = y_\alpha(x(t_i)), \quad p^* = U^p_\alpha(\xi), \quad \mu = t - t_i.$$

Для фиксированного номера i определим вектор f^* по правилу

$$f^* = \frac{1}{t}\int_{t_i}^{t} \dot x(s)\,ds, \ \text{ где } \ \dot x(t) \in \operatorname{co}\bigl\{f(x(t), U^p_\alpha(x(t_i)), q)\colon q \in Q\bigr\}, \quad x(t_i) = \xi.$$

Заметим, что $\|f^*\| \leqslant m$. Напомним, что $\zeta_\alpha = (\xi - \eta_\alpha)/\alpha^2$, тогда $u_\alpha(x(t)) = u_\alpha(\xi + \mu f^*)$. Из определений u_α, η_α имеем, что

$$\begin{aligned} u_\alpha(\xi + \mu f^*) &\leqslant u(\eta_\alpha) + \frac{\|\xi + \mu f^* - \eta_\alpha\|^2}{2\alpha^2} = \\ &= u(\eta_\alpha) + \frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{2\alpha^2} + \frac{\langle \xi - \eta_\alpha, \mu f^*\rangle}{\alpha^2} + \frac{\mu^2\|f^*\|^2}{2\alpha^2} = u_\alpha(\xi) + \mu\langle\zeta_\alpha, f^*\rangle + \frac{\mu^2\|f^*\|^2}{2\alpha^2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

По определению гамильтониана имеем

$$\begin{aligned} H(\xi, \zeta_\alpha, u_\alpha(\xi)) &= \max_{q\in Q}[\langle\zeta_\alpha, f(\xi, p^*, q)\rangle + (1 - u_\alpha(\xi)) a g(\xi, p^*, q)] = \\ &= \min_{p\in P}\max_{q\in Q}[\langle\zeta_\alpha, f(\xi, p, q)\rangle + (1 - u_\alpha(\xi)) a g(\xi, p, q)]. \end{aligned}$$

Тогда для любых $f \in \operatorname{co}\{f(\xi, U^p_\alpha(\xi), q)\colon q \in Q\}$, $g \in \operatorname{co}\{g(\xi, U^p_\alpha(\xi), q)\colon q \in Q\}$ выполнено

$$\langle\zeta_\alpha, f\rangle + (1 - u_\alpha(\xi)) a g \leqslant H(\xi, \zeta_\alpha, u_\alpha(\xi)). \tag{4.9}$$

Напомним, что $\|\xi - \eta_\alpha\| \leqslant 2\alpha$ и $\|\zeta_\alpha\| \leqslant 2/\alpha$. Оценим разность

$$\begin{aligned} &H(\xi, \zeta_\alpha, u_\alpha(\xi)) - H(\eta_\alpha, \zeta_\alpha, u(\eta_\alpha)) = \\ &\qquad = H(\xi, \zeta_\alpha, u_\alpha(\xi)) - H(\xi, \zeta_\alpha, u(\eta_\alpha)) + H(\xi, \zeta_\alpha, u(\eta_\alpha)) - H(\eta_\alpha, \zeta_\alpha, u(\eta_\alpha)). \end{aligned}$$

Из свойства липшицевости гамильтониана по x имеем

$$H(\xi, \zeta_\alpha, u(\eta_\alpha)) - H(\eta_\alpha, \zeta_\alpha, u(\eta_\alpha)) \leqslant \lambda\|\xi - \eta_\alpha\|\cdot\|\zeta_\alpha\| \leqslant \lambda\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{\alpha^2}.$$

Выберем управления $\tilde p$, $\tilde q$ из условий

$$\begin{aligned} H(\xi, \zeta_\alpha, u(\eta_\alpha)) &= \max_{q\in Q}\langle\zeta_\alpha, f(\xi, \tilde p, q)\rangle + (1 - u(\eta_\alpha)) g(\xi, \tilde p, q), \\ H(\xi, \zeta_\alpha, u_\alpha(\xi)) &= \min_{p\in P}\langle\zeta_\alpha, f(\xi, p, \tilde q)\rangle + (1 - u_\alpha(\xi)) g(\xi, p, \tilde q). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H(\xi, \zeta_\alpha, u_\alpha(\xi)) - H(\xi, \zeta_\alpha, u(\eta_\alpha)) \leqslant a g(\xi, \tilde p, \tilde q)(u(\eta_\alpha) - u_\alpha(\xi)).$$

Так как $u(\eta_\alpha) < u_\alpha(\xi)$ по определению u_α, то справедлива оценка

$$H(\xi, \zeta_\alpha, u_\alpha(\xi)) \leqslant H(\eta_\alpha, \zeta_\alpha, u(\eta_\alpha)) + \lambda\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{\alpha^2} + a g(\xi, \tilde p, \tilde q)(u(\eta_\alpha) - u_\alpha(\xi)). \tag{4.10}$$

Построим $\tilde f \in \operatorname{co}\{f(\xi, U^p_\alpha(\xi), q)\colon q \in Q\}$ такой, что $\|\tilde f - f^*\| \leqslant \gamma(\mu)$, где $\gamma(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. Поскольку

$$f^* = \frac{1}{t}\int_{t_i}^{t} \dot x(s)\,ds, \ \text{ где } \ \dot x(t) \in \operatorname{co}\bigl\{f(x(t), U^p_\alpha(x(t_i)), q)\colon q \in Q\bigr\},$$

то существует мерозначная функция $\chi(t, dq)$ такая, что

$$\dot{x} = \int_Q f(x(s), U^p_\alpha(\xi), q)\chi(s, dq).$$

Далее положим

$$\tilde{f} = \frac{1}{t}\int_{t_i}^{t}\int_Q f(\xi, U^p_\alpha(\xi), q)\chi(s, dq)\, ds.$$

По построению получаем, что

$$\|f^* - \tilde{f}\| \leqslant C(t - t_i).$$

Отсюда следует, что

$$\langle \zeta_\alpha, f^*\rangle \leqslant \langle \zeta_\alpha, \tilde{f}\rangle + \tilde{h}(\alpha, \mu),$$

где $\tilde{h}(\alpha, \mu) = 2\gamma(\mu)/\alpha$. Так как расстояние $\operatorname{dist}(\xi; \partial G) > 3\alpha$ и $\|\xi - \eta_\alpha\| \leqslant 2\alpha$, то $\eta_\alpha \in G$. Тогда $\zeta_\alpha \in \partial^-_P u(\eta_\alpha)$. Из оценки гамильтониана (4.10), определения проксимального суперрешения и предыдущего неравенства заключаем, что

$$\begin{aligned} H(\xi, \zeta_\alpha, u_\alpha(\xi)) \leqslant H(\eta_\alpha, \zeta_\alpha, u(\eta_\alpha)) + \lambda\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{\alpha^2} + ag(\xi, \tilde{p}, \tilde{q})(u(\eta_\alpha) - u_\alpha(\xi)) \leqslant \\ \leqslant \lambda\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{\alpha^2} + ag(\xi, \tilde{p}, \tilde{q})(u(\eta_\alpha) - u_\alpha(\xi)). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Из оценок (4.9) и (4.11) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \zeta_\alpha, f^*\rangle \leqslant \lambda\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{\alpha^2} + \tilde{h}(\alpha, \mu) - (1 - u_\alpha(\xi))ag(\xi, p^*, q) + ag(\xi, \tilde{p}, \tilde{q})(u(\eta_\alpha) - u_\alpha(\xi)) \leqslant \\ \leqslant \lambda\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{\alpha^2} + \tilde{h}(\alpha, \mu) - (1 - u_\alpha(\xi))ag(\xi, p^*, q) + ag(\xi, \tilde{p}, \tilde{q})(u(\eta_\alpha) - u_\alpha(\xi)) + \\ + ag(\xi, p^*, q)u(\eta_\alpha) - ag(\xi, p^*, q)u(\eta_\alpha) \leqslant \\ \leqslant \lambda\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{\alpha^2} + ag(\xi, p^*, q)(u(\eta_\alpha) - 1) + \tilde{h}(\alpha, \mu) + a(g(\xi, p^*, q) - g(\xi, \tilde{p}, \tilde{q}))(u_\alpha(\xi) - u(\eta_\alpha)). \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в неравенство (4.8), получаем

$$\begin{aligned} u_\alpha(\xi + \mu f^*) \leqslant u_\alpha(\xi) + \mu\Big[\lambda\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{\alpha^2} + ag(\xi, p^*, q)(u(\eta_\alpha) - 1)\Big] + \\ + \mu\Big[\tilde{h}(\alpha, \mu) + a(g(\xi, p^*, q) - g(\xi, \tilde{p}, \tilde{q}))\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{2\alpha^2}\Big] \leqslant \\ \leqslant 1 + e^{ag(\xi, p^*, q)\mu}(u_\alpha(\xi) - 1) + \mu(2\lambda - 2ag(\xi, p^*, q)) + \\ + a\mu\Big(g(\xi, p^*, q) - g(\xi, \tilde{p}, \tilde{q})\Big)\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{2\alpha^2} + \mu e^{ag(\xi, p^*, q)\mu}h(\alpha, \mu) = \\ = 1 + e^{ag(\xi, p^*, q)\mu}(u_\alpha(\xi) - 1) + \mu\Big(2\lambda - ag(\xi, p^*, q) - ag(\xi, \tilde{p}, \tilde{q})\Big)\frac{\|\xi - \eta_\alpha\|^2}{2\alpha^2} + \\ + \mu e^{ag(\xi, p^*, q)\mu}h(\alpha, \mu) \leqslant 1 + e^{ag(\xi, p^*, q)\mu}(u_\alpha(\xi) - 1) + \mu e^{ag(\xi, p^*, q)\mu}h(\alpha, \mu), \end{aligned}$$

где $h(\alpha, \mu) = e^{-ag(\xi, p^*, q)\mu}\Big(\tilde{h}(\alpha, \mu) + \frac{\mu^2 m^2}{2\alpha^2} - 2\lambda + \frac{e^{2\lambda\mu} - 1}{\mu}\Big)$. Отметим, что из определения a (3.1) и условия (A4) следует, что

$$2\lambda - ag(\xi, p^*, q) - ag(\xi, \tilde{p}, \tilde{q})) = 2\lambda\Big(1 - \frac{g(\xi, p^*, q) + g(\xi, \tilde{p}, \tilde{q})}{b}\Big) \leqslant 0.$$

Тогда

$$u_\alpha(\xi+\mu f^*) \leqslant 1+\exp\left(a\int_0^\mu g(x(t),U_\alpha^p(x(t_i)),q(t))\,dt\right)(u_\alpha(\xi)-1)+ \\ +\mu\exp\left(a\int_0^\mu g(x(t),U_\alpha^p(x(t_i)),q(t))\,dt\right)h(\alpha,\mu). \quad \square$$

Далее покажем, что построенная проксимальная стратегия U_α^p (4.4) дает ε-оптимальный результат для первого игрока.

Теорема 4.1. *Пусть* $u\colon \mathrm{cl}\,G\to[0,1]$ — *проксимальное суперрешение задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби* (3.2). *Пусть* $D_1\subset \mathrm{cl}\,G$ — *непустое компактное подмножество, на котором функция* $-\ln(1-u(\cdot))$ *ограничена. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существуют* $\alpha>0$ *и* $\delta>0$ *такие, что если* $\mathrm{diam}\,\Delta<\delta$, *то для любого* $x_0\in D_1$ $J_1^\varepsilon(x_0,U_\alpha^p,\Delta)\leqslant -\ln(1-u(x_0))/a+\varepsilon$.

Доказательство. Напомним, что $\bar X(x_0)$ — это множество решений дифференциального включения

$$\dot x(t)\in \mathrm{co}\left\{f(x(t),p,q)\colon p\in P, q\in Q\right\},\quad x(0)=x_0.$$

Пусть $T_0>0$ — верхняя граница функции $-\ln(1-u(\cdot))/(ab)$ на D_1.

Отметим, что множество K, определенное в (4.5) ограничено, $m<\infty$ и $r<\infty$ в формуле (4.6). Выберем параметр регуляризации α и диаметр разбиения δ_0, удовлетворяющие условиям

$$3\alpha\leqslant\varepsilon,\quad \delta_0 m\leqslant\alpha,\quad \delta_0<\alpha^2,\quad \alpha\in(0;1/2). \tag{4.12}$$

Выберем $x_0\in D_1$ и $\theta=(-\ln(1-u(x_0))+\varepsilon)/(ab)$. Без ограничения общности будем полагать $\varepsilon\leqslant 1$, следовательно $\theta\leqslant T_0+1$. Сначала введем несколько вспомогательных величин. Обозначим символом $\nu(\cdot)$ модуль непрерывности функции $\tilde\sigma$ и рассмотрим функцию

$$l(\alpha,\delta)=-\ln\left(1-[\nu(2\alpha)+h(\alpha,\delta)(T_0+1)]e^{abT_0}\right). \tag{4.13}$$

Дополнительно будем предполагать, что относительно α и δ выполняются неравенства

$$(T_0+1)h(\alpha,\delta)e^{ar(T_0+1)}<e^{2\lambda\varepsilon}-1;\quad l(\alpha,\delta)<\varepsilon a;\quad \nu(2\alpha)+h(\alpha,\delta)T_0<1-u(x_0). \tag{4.14}$$

Здесь r определяется формулой (4.6).

Из свойств функций $\nu(\cdot)$ и $h(\alpha,\delta)$ следует, что

$$\lim_{\alpha\to0}\nu(2\alpha)=0,\quad \lim_{\alpha\to0}\lim_{\delta\to0}h(\alpha,\delta)=0,\quad \lim_{\alpha\to0}\lim_{\delta\to0}l(\alpha,\delta)=0.$$

Из этих равенств следует, что существуют α_1,δ_1 такие, что

$$(T_0+1)h(\alpha_1,\delta_1)e^{ar(T_0+1)}<e^{2\lambda\varepsilon}-1,$$

существуют α_2,δ_2 такие, что $l(\alpha_2,\delta_2)<\varepsilon a$, и $\alpha_3\colon \nu(2\alpha_3)+h(\alpha_2,\delta_2)T_0<1-u(x_0)$. Выберем $\alpha_0=\min_{i=1,2,3}\{\alpha_i\}$, $\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда для всех $\alpha<\alpha_0$, $\delta<\delta_0$ выполнены неравенства (4.14).

Определим следующие моменты времени:

$$\begin{aligned}\hat t_1&=\inf\{t\in[0,\theta]\colon \mathrm{dist}\,(x(t);\mathcal M_1)\leqslant\varepsilon\};\\ \hat t_2&=\inf\{t\in[0,\theta]\colon \mathrm{dist}\,(x(t);\mathcal M_2)\leqslant\varepsilon\}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Возможны три случая:

(1) $\hat{t}_1 = \hat{t}_2 = +\infty$.

(2) $\hat{t}_1 < \hat{t}_2$.

(3) $\hat{t}_1 > \hat{t}_2$.

Далее будем опускать аргумент $x(\cdot)$ в τ_ε. Обозначим символом $p_*(\cdot)$ кусочно постоянное управление первого игрока, сформированное стратегией U^p_α, движение $x(\cdot)$ порождено управлением $p_*(\cdot)$ и измеримой реализацией второго игрока $q(\cdot)$.

Случай 1. В этом случае движение $x(\cdot)$ избегает M_1^ε и M_2^ε для всех $t \geqslant 0$. Рассмотрим (4.7) на отрезке $[0, \theta]$. Применяя неравенство $u_\alpha(x) \leqslant u(x)$, получим

$$\begin{aligned} u_\alpha(x(\theta)) \leqslant 1 - (1 - u_\alpha(x_0)) \exp\Big(a \int_0^\theta g(x(t), p_*(t), q(t))\, dt\Big) + \\ + \theta \exp\Big(a \int_0^\theta g(x(t), p_*(t), q(t))\, dt\Big) h(\alpha, \delta) \leqslant \\ \leqslant 1 - (1 - u(x_0)) \exp\Big(\int_0^\theta a g(x(t), p_*(t), q(t))\, dt\Big) + \\ + \theta \exp\Big(\int_0^\theta a g(x(t), p_*(t), q(t))\, dt\Big) h(\alpha, \delta) < \\ < 1 - e^{\ln(1 - u(x_0)) + ab\theta} + \theta h(\alpha, \delta) e^{ar\theta} < 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо в силу выбора параметров α и δ (4.12), (4.14). Отсюда получаем противоречие с $u_\alpha(x(\theta)) > 0$.

Случай 2. По определению 2.1 имеем, что $\tau_\varepsilon = \hat{t}_1$. В этом случае движение $x(\cdot)$ попадает на множество M_1^ε. Применим лемму 4.1 на интервале $[0, \tau_\varepsilon]$:

$$1 - u_\alpha(x_0) \leqslant \exp\Big(-a \int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t), p_*(t), q(t))\, dt\Big)(1 - u_\alpha(x(\tau_\varepsilon))) + h(\alpha, \delta)\tau_\varepsilon.$$

Из [15, Proposition 4] следует, что

$$u(x) \geqslant \tilde{\sigma}(x). \tag{4.16}$$

Тогда из неравенств (4.16), $\|x(\tau_\varepsilon) - y_\alpha(x(\tau_\varepsilon))\| \leqslant 2\alpha,\ u_\alpha(x(\tau_\varepsilon)) \geqslant \tilde{\sigma}(y_\alpha(x(\tau_\varepsilon)))$, для всех $x \in G \setminus M_2^\varepsilon$ приходим к неравенствам

$$u_\alpha(x(\tau_\varepsilon)) > \tilde{\sigma}(y_\alpha(x(\tau_\varepsilon))) - \tilde{\sigma}(x(\tau_\varepsilon)) + \tilde{\sigma}(x(\tau_\varepsilon)) > -\nu(2\alpha) + \tilde{\sigma}(x(\tau_\varepsilon)). \tag{4.17}$$

Подставляя (4.17) в неравенство (4.7), получим

$$\begin{aligned} \Big(1 - u(x_0) - \nu(2\alpha) \exp\Big(-a \int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t), p_*(t), q(t))\, dt\Big)\Big) \exp\Big(a \int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t), p_*(t), q(t))\, dt\Big) - \\ - h(\alpha, \delta)\tau_\varepsilon \exp\Big(a \int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t), p_*(t), q(t))\, dt\Big) \leqslant 1 - \tilde{\sigma}(x(\tau_\varepsilon)). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Прологарифмируем обе части неравенства (4.18):

$$\ln(1-u(x_0)) + a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p_*(t),q(t))\,dt \leqslant \ln(1-\tilde\sigma(x(\tau_\varepsilon))) -$$
$$- \ln\left(1 - \frac{\nu(2\alpha)\exp\Bigl(-a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p_*(t),q(t))\,dt\Bigr) + h(\alpha,\delta)\theta}{1-u(x_0)}\right). \quad (4.19)$$

Воспользовавшись неравенством $1-u(x_0)\geqslant e^{-abT_0}$, $\theta < T_0+1$, оценим величину:

$$-\ln\left(1 - \frac{\nu(2\alpha)\exp\Bigl(-a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p_*(t),q(t))\,dt\Bigr) + h(\alpha,\delta)\theta}{1-u(x_0)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant -\ln\Bigl(1 - \bigl[\nu(2\alpha) + h(\alpha,\delta)(T_0+1)\bigr]e^{abT_0}\Bigr) = l(\alpha,\delta),$$

где $l(\alpha,\delta)$ определено (4.13). Напомним, что $1 > \tilde\sigma(x(\tau_\varepsilon))$, если $x(\tau_\varepsilon)\in M_1^\varepsilon$. Тогда неравенство (4.19) имеет вид

$$\ln(1-u(x_0)) + a\int_0^{\tau_\varepsilon} ag(x(t),p_*(t),q(t))\,dt \leqslant \ln(1-\tilde\sigma(x(\tau_\varepsilon)) + l(\alpha,\delta),$$
$$a\hat\sigma(x(\tau_\varepsilon)) + a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p_*(t),q(t))\,dt \leqslant -\ln(1-u(x_0)) + l(\alpha,\delta).$$

Случай 3. В этом случае движение $x(\cdot)$ попадает на множество M_2^ε. По определению 2.1 $\tau_\varepsilon = \hat t_2$. Рассмотрим неравенство (4.7) на интервале $[0,\tau_\varepsilon]$. Как следует из (4.7)

$$1-u_\alpha(x_0) \leqslant \exp\left(-a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p_*(t),q(t))\,dt\right)(1-u_\alpha(x(\tau_\varepsilon))) + h(\alpha,\delta)\tau_\varepsilon.$$

Воспользовавшись неравенством (4.17), приходим к неравенству

$$(1-u(x_0))\exp\left(a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p_*(t),q(t))\,dt\right) \leqslant 1-\tilde\sigma(x(\tau_\varepsilon)) + \nu(2\alpha) +$$
$$+ h(\alpha,\delta)\tau_\varepsilon\exp\left(a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p_*(t),q(t))\,dt\right). \quad (4.20)$$

В рассматриваемом случае $1-\tilde\sigma(x(\tau_\varepsilon)) = 0$, так как $x(\tau_\varepsilon)\in M_2^\varepsilon$. Из неравенства (4.20) следует, что

$$(1-u(x_0)) \leqslant \nu(2\alpha)\exp\left(-\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p_*(t),q(t))\,dt\right) + h(\alpha,\delta)\theta \leqslant \nu(2\alpha) + h(\alpha,\delta)\theta. \quad (4.21)$$

В силу выбора параметров α, δ (4.12), (4.14) выполняется неравенство

$$(1-u(x_0)) > \nu(2\alpha) + h(\alpha,\delta)\theta.$$

Это противоречит неравенствам (4.21) и $u(x_0) < 1$.

Из рассмотренных случаев следует, что

$$J_1^\varepsilon(x_0, U_\alpha^p, \Delta) \leqslant -\ln(1-u(x_0))/a + \varepsilon. \qquad \square$$

Отметим, что полученная оценка справедлива для любого верхнего проксимального решения задачи Дирихле. Выбирая минимальное верхнее проксимальное решение, получим оценку гарантированного результата первого игрока в классе универсальных позиционных стратегий.

4.2. Построение субоптимальных универсальных стратегий для второго игрока

Пусть $x_0 \in G$, u — проксимальное вязкостное решение задачи (3.2) и $u_\natural(\cdot)$ — проксимальное субрешение задачи (3.2) такое, что $u(x_0) - u_\natural(x_0) < \varepsilon$. Рассмотрим преобразование функции $u_\natural(\cdot)$

$$v_\alpha(x) = \max_{y \in \mathrm{cl}\, G}[u_\natural(y) - w_\alpha(x,y)], \tag{4.22}$$

где w_α удовлетворяет (4.2). Функция $y \to u_\natural(y) - w_\alpha(x,y)$ полунепрерывна сверху, следовательно максимум в выражении (4.22) достигается в точке y_α такой, что $\|x - y_\alpha\| \leqslant 1$.

Выберем непустой компакт

$$D_2 \subset \bigl\{x \in \mathrm{cl}\,(G \setminus D_1)\bigr\}. \tag{4.23}$$

Построим

$$T_0 = \min_{x \in D_2}\bigl[-\ln(1 - u_\natural(x))\bigr]/(ab). \tag{4.24}$$

Величина $\ln(1 - u_\natural(x))$ для любого $x \in D_2$ определена корректно, так как нижнее решение выбиралось из условия $u(x_0) - u_\natural(x_0) < \varepsilon$. Даже если $u(x_0) = 1$, нижнее решение будет меньше 1, а значит величина $\ln(1 - u_\natural(x_0))$ будет большой, но конечной.

Для произвольной точки $x_0 \in D_2$ построим $\theta = -(\ln(1 - u_\natural(x_0)) + \varepsilon)/(ab)$.

Определим следующие множество и величины

$$\begin{aligned} &K = \cup_{x_0 \in D_2}\{x(t) \in \mathbb{R}^d \colon x(\cdot) \in \bar{X}(x_0), t \in [0, T_0 + 1]\};\\ &m = \sup\{\|f(x+h,p,q)\|, x \in K, p \in P, q \in Q, \|h\| \leqslant 1\};\\ &r = \sup\{|g(x+h,p,q)|, x \in K, p \in P, q \in Q, \|h\| \leqslant 1\}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Так как расстояние $\mathrm{dist}\,(M_1; M_2)$ между множествами M_1 и M_2 больше нуля (нет асимптотического приближения между множествами), то всегда найдется ε_1, удовлетворяющее неравенствам $0 < \varepsilon_1 < \mathrm{dist}\,(M_1; M_2)$. По определению нижнее решение $u_\natural(\cdot)$ непрерывно на границе $\mathcal{M}_1$. Это значит, что существует такая окрестность границы $\mathcal{M}_1$ радиусом ε_2, что внутри этой окрестности нижнее решение непрерывно. В качестве ε_0 выберем $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тогда нижнее решение $u_\natural(\cdot)$ непрерывно на множестве $M = M_1^{\varepsilon_0} \cap K$, где K определено (4.25).

Введем модуль непрерывности на множестве M по правилу:

$$\omega_M(\varepsilon) = \sup\bigl\{|u_\natural(x_1) - u_\natural(x_2)| \colon x_1, x_2 \in M,\ \|x_1 - x_2\| \leqslant \varepsilon\bigr\}.$$

Лемма 4.2. *Пусть для произвольной тройки* $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) \in X(x_0, V_\alpha^p, \Delta)$, $x_0 \in D_2$, $t_i \in \Delta$, $t_i < \theta$ *и* $\mathrm{dist}\,(x(t_i); \partial G) > 3\alpha$. *Тогда для любого* $t \in [t_i, t_{i+1}] \cap [0; \theta]$ *справедливо неравенство*

$$1 - v_\alpha(x(t_i)) \geqslant \exp\biggl(-a\int_{t_i}^{t} g(x(t), p(t), V_\alpha^p(x(t_i)))\,dt\biggr)(1 - v_\alpha(x(t))) - (t - t_i)h(\alpha,\delta), \tag{4.26}$$

где $h(\alpha,\delta) \geqslant 0$ *не зависит от* x_0 *и тройки* $(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\lim\limits_{\delta\to 0} h(\alpha,\delta) = 0$.

Доказательство леммы 4.2 аналогично доказательству леммы 4.1 и приводиться в статье не будет.

Теорема 4.2. *Пусть* $u_\natural \colon \mathrm{cl}\, G \to [0,1]$ — *проксимальное субрешение задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби* (3.2). *Пусть* $D_2 \subset \mathrm{cl}\, G$ — *непустое компактное подмножество,* *удовлетворяющее* (4.23). *Тогда существуют* $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ *и* $\delta > 0$ *такие, что для произвольного разбиения* Δ *с диаметром* $\operatorname{diam}\Delta < \delta$, *для любого* $x_0 \in D_2$ *справедлива оценка*

$$J_2^{\varepsilon}(x_0, V_{\alpha}^{p}, \Delta) > -\ln(1 - u_{\natural}(x_0)) + l(\alpha, \delta, \varepsilon),$$

где $V_{\alpha}^{p}(x) = q_0(x, \zeta(x), v_{\alpha}(x))$ — *проксимальная позиционнная стратегия второго игрока,* q_0 *определено формулой* (4.3), $\lim\limits_{\alpha,\delta,\varepsilon\to 0} l(\alpha, \delta, \varepsilon) = 0$.

Доказательство. Выберем разбиение Δ такое, что $\operatorname{diam}\Delta = \delta < \delta_0$. Оно порождает множество пошаговых движений $X(x_0, V_{\alpha}^{p}, \Delta)$. Рассмотрим тройку $(x(\cdot), p(\cdot), q_*(\cdot)) \in X(x_0, V_{\alpha}^{p}, \Delta)$, где q_* — кусочно постоянное управление второго игрока, сформированное стратегией V_{α}^{p}.

Пусть

$$l(\alpha, \delta, \varepsilon) = \ln\Big(1 - \big[\nu(2\alpha) + h(\alpha, \delta) T_0 e^{arT_0} + \omega_{M^{\varepsilon_0}}(\varepsilon) + \lambda_{\tilde{\sigma}}\varepsilon\big] e^{a\Sigma}\Big),$$

где $\lambda_{\tilde{\sigma}}$ константа Липшица для функции $\tilde{\sigma}$ на множестве M^{ε_0}, r — константа в (4.25), Σ — константа из (A5), T_0 определено (4.24). Отметим, что

$$\lim_{\alpha,\delta,\varepsilon\to 0} l(\alpha, \delta, \varepsilon) = 0.$$

Выберем параметры $\alpha, \delta, \varepsilon$ таким образом, чтобы

$$\forall\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \quad \big[\nu(2\alpha) + (\varepsilon + h(\alpha, \delta)) T_0 e^{arT_0} + \omega_{M^{\varepsilon_0}}(\varepsilon) + \lambda_{\tilde{\sigma}}\varepsilon\big] < e^{-a\Sigma}.$$

Далее для упрощения записи будем опускать аргумент в τ_{ε}.

Рассмотрим следующие случаи поведения пошаговой траектории $x(\cdot)$, которые определяются моментами $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$, определенными (4.15):

(1) $\hat{t}_1 = \hat{t}_2 = +\infty$; движение $x(\cdot)$ избегает множеств M_1^{ε} и M_2^{ε} для всех $t \geqslant 0$;

(2) $\hat{t}_1 > \hat{t}_2$; движение $x(\cdot)$ попадает на множество M_2^{ε} в момент $\hat{t}_2$ и избегает множества M_1^{ε} на интервале $[0, \hat{t}_2]$;

(3) $\hat{t}_1 < \hat{t}_2$; движение $x(\cdot)$ попадает на множество M_1^{ε} в момент $\hat{t}_1$ и избегает множества M_2^{ε} на интервале $[0, \hat{t}_1]$.

Случай 1. Поскольку $\tau_{\varepsilon} = +\infty$, то $\tau_{\varepsilon} > \theta$. Отсюда справедливо неравенство

$$\int_0^{\tau_{\varepsilon}} g(x(t), p(t), q_*(t)))\, dt > \int_0^{\theta} b dt = \theta b = -(\ln(1 - u_{\natural}(x_0)) + \varepsilon)/a,$$

в силу выбора θ. Напомним, что $\hat{\sigma}(x(\tau_{\varepsilon})) \geqslant 0$, следовательно,

$$\hat{\sigma}(x(\tau_{\varepsilon})) + \int_0^{\tau_{\varepsilon}} g(x(t), p(t), q_*(t)))\, dt \geqslant -(\ln(1 - u_{\natural}(x_0)) + \varepsilon)/a.$$

Случай 2. Второй игрок попадает на множество M_2^{ε}, но избегает множество M_1^{ε}. Таким образом, $\tau_{\varepsilon} = \hat{t}_2$, $\hat{\sigma}(x(\tau_{\varepsilon})) = +\infty$ и

$$\hat{\sigma}(x(\tau_{\varepsilon})) + \int_0^{\tau_{\varepsilon}} g(x(t), p(t), q_*(t))\, dt = +\infty > -(\ln(1 - u_{\natural}(x_0)) + \varepsilon)/a.$$

Случай 3. В этом случае $\tau_\varepsilon = \hat{t}_1$.

Из (4.22) следует, что
$$v_\alpha(x_0) \geqslant u_\natural(x_0). \tag{4.27}$$
Из определений v_α и y_α следует
$$v_\alpha(x(\tau_\varepsilon)) = u_\natural(y_\alpha(x(\tau_\varepsilon))) - w_\alpha(y_\alpha(x(\tau_\varepsilon)), x(\tau_\varepsilon)).$$
Из полунепрерывности сверху субрешения $u_\natural$ и оценки $\|y_\alpha(x) - x\| \leqslant 2\alpha$ [1] получаем, что для произвольного компактного множества $N \subset G$, существует число $\nu(\alpha)$ такое, что
$$\forall x \in N \; u_\natural(y_\alpha(x)) \leqslant u_\natural(x) + \nu(2\alpha), \quad \lim_{\alpha\to 0} \nu(\alpha) = 0. \tag{4.28}$$

Из определения v_α следует, что $u_\natural(y_\alpha(x)) \geqslant v_\alpha(x)$. Применяя это неравенство и (4.28), получаем
$$v_\alpha(x(\tau_\varepsilon)) < u_\natural(x(\tau_\varepsilon)) + \nu(2\alpha). \tag{4.29}$$

Обозначим символом A следующую величину:
$$A = \left(1 - u_\natural(x_0) + h(\alpha,\delta)\tau_\varepsilon + \nu(2\alpha)\exp\left(-a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t), p(t), q_*)\,dt\right)\right).$$
Подставим неравенства (4.27), (4.29) в (4.26) на интервале $[0, \tau_\varepsilon]$:
$$A\exp\left(a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t), p(t), q_*(t))\,dt\right) \geqslant 1 - u_\natural(x(\tau_\varepsilon)).$$
Найдем точку $x^* \in \mathcal{M}_1$ такую, что
$$\|x(\tau_\varepsilon) - x^*\| = \operatorname{dist}(x(\tau_\varepsilon); \mathcal{M}_1) = \varepsilon.$$

Субрешение $u_\natural$ равномерно непрерывно на $M_1^{\varepsilon_0}$, так как оно непрерывно на компактном множестве M. Следовательно можно воспользоваться модулем непрерывности функции $u_\natural$ и получить оценку
$$|u_\natural(x(\tau_\varepsilon)) - \tilde{\sigma}(x^*)| \leqslant \omega_{M_1^{\varepsilon_0}}(\varepsilon).$$
Из липшицевости функции $\tilde{\sigma}(\cdot)$ на компакте следует, что
$$|\tilde{\sigma}(x^*) - \tilde{\sigma}(x(\tau_\varepsilon))| \leqslant \lambda_{\tilde{\sigma}}\|x^* - x(\tau_\varepsilon)\| = \lambda_{\tilde{\sigma}}\varepsilon.$$

Подставим полученную оценку в неравенство
$$1 - u_\natural(x(\tau_\varepsilon)) + \tilde{\sigma}(x^*) + (\tilde{\sigma}(x(\tau_\varepsilon)) - \tilde{\sigma}(x^*)) - \tilde{\sigma}(x(\tau_\varepsilon)) > 1 - \omega_{M^{\varepsilon_0}}(\varepsilon) - \lambda_{\tilde{\sigma}}\varepsilon - \tilde{\sigma}(x(\tau_\varepsilon)). \tag{4.30}$$
Подставляя (4.30) в формулу (4.26), приходим к неравенству
$$(1 - u_\natural(x_0) + h(\alpha,\delta)\tau_\varepsilon)\exp\left(a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t), p(t), q_*(t))\,dt\right) + \left[\nu(2\alpha) + \omega_{M^{\varepsilon_0}}(\varepsilon) + \lambda_{\tilde{\sigma}}\varepsilon\right] \geqslant 1 - \tilde{\sigma}(x(\tau_\varepsilon)). \tag{4.31}$$

Отметим, что если $1 - u_\natural(x_0) < \varepsilon$, то случай 3 невозможен. Действительно, в этом случае неравенство (4.31) имеет вид
$$(\varepsilon + h(\alpha,\delta)\tau_\varepsilon)\exp\left(a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t), p(t), q_*(t))\,dt\right) + \left[\nu(2\alpha) + \omega_{M^{\varepsilon_0}}(\varepsilon) + \lambda_{\tilde{\sigma}}\varepsilon\right] \geqslant 1 - \tilde{\sigma}(x(\tau_\varepsilon)).$$

В силу выбора параметров $\alpha, \delta, \varepsilon$, справедливо неравенство

$$\big(\varepsilon + h(\alpha,\delta)\tau_\varepsilon\big)\exp\left(a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p(t),q_*(t))\,dt\right) + \big[\nu(\alpha)+\omega_{M^{\varepsilon_0}}(\varepsilon)+\lambda_{\tilde\sigma}\varepsilon\big] < 1-\tilde\sigma(x(\tau_\varepsilon)).$$

Приходим к противоречию с (4.26).

Далее рассмотрим случай, когда $1-u_\natural(x_0) > \varepsilon$. Обозначим символом B следующее выражение

$$B = h(\alpha,\delta)\tau_\varepsilon \exp\left(a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p(t),q_*(t))\,dt\right) + \nu(2\alpha)+\omega_{M^{\varepsilon_0}}(\varepsilon)+\lambda_{\tilde\sigma}\varepsilon.$$

Неравенство (4.31) эквивалентно следующему неравенству

$$\exp\big(\ln(1-u_\natural(x_0))\big)\exp\left(a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p(t),q_*(t))\,dt\right) \geqslant e^{-a\hat\sigma(x(\tau_\varepsilon))}\Big(1-Be^{a\hat\sigma(x(\tau_\varepsilon))}\Big). \quad (4.32)$$

Справедливо

$$1-Be^{a\hat\sigma(x(\tau_\varepsilon))} \geqslant 1-\big[h(\alpha,\delta)T_0e^{arT_0}+\nu(2\alpha)+\omega_{M^{\varepsilon_0}}(\varepsilon)+\lambda_{\tilde\sigma}\varepsilon\big]e^{a\Sigma}.$$

Следовательно,

$$\ln\Big(1-Be^{a\hat\sigma(x(\tau_\varepsilon))}\Big) \geqslant \ln\Big(1-\big[h(\alpha,\delta)T_0e^{arT_0}+\nu(2\alpha)+\omega_{M^{\varepsilon_0}}(\varepsilon)+\lambda_{\tilde\sigma}\varepsilon\big]e^{a\Sigma}\Big).$$

Прологарифмируем (4.32), подставляя полученные неравенства:

$$\begin{aligned}&\ln(1-u_\natural(x_0)) + a\int_0^{\tau_\varepsilon} g(x(t),p(t),q_*(t))\,dt \geqslant\\ &\quad\geqslant -a\hat\sigma(x(\tau_\varepsilon)) + \ln\Big(1-\big[h(\alpha,\delta)T_0e^{arT_0}+\nu(2\alpha)+\omega_{M^{\varepsilon_0}}(\varepsilon)+\lambda_{\tilde\sigma}\varepsilon\big]e^{a\Sigma}\Big) =\\ &\qquad\qquad = -a\hat\sigma(x(\tau_\varepsilon)) + l(\alpha,\delta,\varepsilon).\end{aligned}$$

Комбинируя все предыдущие случаи, приходим к выводу

$$J_2^\varepsilon(x_0, V_\alpha^p, \Delta) > -\ln(1-u_\natural(x_0)) - l(\alpha,\delta,\varepsilon). \qquad \square$$

Пусть $\{u_\natural^n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность нижних проксимальных решений задачи Дирихле такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_\natural^n(x_0) = u(x_0)$, где $u(\cdot)$ — проксимальное вязкостное решение задачи Дирихле. Для каждого n справедлива оценка

$$J_2^\varepsilon(x_0, V_\alpha^p, \Delta) > -\ln(1-u_\natural^n(x_0)) - l_n(\alpha,\delta,\varepsilon).$$

Согласно свойству функции l_n имеем, что $\lim\limits_{\alpha,\delta,\varepsilon\to 0} l_n(\alpha,\delta,\varepsilon) = 0$. Тогда, переходя к пределу при $\alpha,\delta,\varepsilon\to 0$, получим

$$J_2^0(x_0) \geqslant -\ln(1-u_\natural^n(x_0)).$$

Переходя к поточечному пределу при $n\to\infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} J_2^0(x_0) \geqslant \lim_{n\to\infty} -\ln(1-u_\natural^n(x_0)) = -\ln(1-u(x_0)).$$

В частности, если $u(x_0)=1$, то имеем неравенство $J_2^0(x_0) = +\infty = -\ln(1-u(x_0))$.

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2025-1549).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
2. Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 277. No. 1. P. 1–42. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. https://zbmath.org/0298.90067
4. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. https://zbmath.org/0246.90060
5. Красовский Н. Н. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Математический сборник (новая серия). 1978. Т. 107 (149). № 4 (12). С. 541–571. https://www.mathnet.ru/rus/sm2694
6. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Subbotin A. I. The synthesis of universal feedback pursuit strategies in differential games // SIAM Journal on Control and Optimization. 1997. Vol. 35. Issue 2. P. 552–561. https://doi.org/10.1137/S0363012995283972
7. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey // Journal of Dynamical and Control Systems. 1995. Vol. 1. No. 1. P. 1–48. https://doi.org/10.1007/BF02254655
8. Субботина Н. Н. Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1890–1896. https://www.mathnet.ru/rus/de5008
9. Clarke F. Functional analysis, calculus of variations and optimal control. London: Springer, 2013. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4820-3
10. Кларк Ф., Ледяев Ю. С., Субботин А. И. Универсальное позиционное управление и проксимальное прицеливание в задачах управления в условиях возмущения и дифференциальных играх // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 165–186. https://www.mathnet.ru/rus/tm698
11. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. https://zbmath.org/0152.38407
12. Мунц Н. В., Кумков С. С. О совпадении минимаксного решения и функции цены игры быстродействия с линией жизни // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 2. С. 200–214. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-200-214
13. Пацко В. С., Турова В. Л. Игра «шофер-убийца» и ее модификации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 105–110. https://doi.org/10.20537/vm080235
14. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Some algorithms for differential games with two players and one target // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 1994. Vol. 28. Issue 4. P. 441–461. https://doi.org/10.1051/m2an/1994280404411
15. Kolpakova E. A zero-sum differential game with exit time // Dynamic Games and Applications. 2025. Vol. 15. No. 5. P. 1685–1710. https://doi.org/10.1007/s13235-025-00623-9
16. Petrakis I. McShane-Whitney extensions in constructive analysis // Logical Methods in Computer Science. 2020. Vol. 16. Issue 1. https://doi.org/10.23638/LMCS-16(1:18)2020
17. Clarke F. H. Optimization and nonsmooth analysis. New York: Wiley, 1983. https://doi.org/10.1137/1.9781611971309

Поступила в редакцию 30.06.2025
Принята к публикации 07.10.2025

Колпакова Екатерина Алексеевна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620077, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5394-6516
E-mail: eakolpakova@gmail.com

Цитирование: Е. А. Колпакова. Построение универсальных позиционных стратегий в дифференциальной игре с нефиксированным моментом окончания // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 4. С. 558–577.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 4. Pp. 558–577.

E. A. Kolpakova

The synthesis of feedback strategies in differential game with exit time

Keywords: differential game, universal feedback strategies, Dirichlet problem, viscosity solution.

MSC2020: 91A23, 49N70

DOI: 10.35634/vm250404

A two-player differential game with an unfixed endpoint is considered. A special feature of the game is the presence of not only a target set but also a lifeline. If the second player steers the lifeline, then the payoff equals infinity. The payoff functional depends on the trajectory of the players and their controls. Special cases of the differential game under consideration are the pursuit–evasion game and time-optimal game. Universal positional strategies are constructed for the game under consideration under the assumption that the Dirichlet problem for the Hamilton–Jacobi equation, related to the differential game, admits a viscosity proximal solution. The construction of universal strategies is based on the concept of a proximal gradient and utilizes the Krasovsky–Subbotin approach. The universality of positional strategies means that for any initial point from a compact set, the feedback strategy is equally effective. In addition, theorems on the evaluation of the guaranteed result of the players are proved.

Funding. The work was performed as part of research conducted at the Ural Mathematical Center with the financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement number 075-02-2025-1549).

REFERENCES

1. Subbotin A. I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhäuser, 1995.
2. Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8
3. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988. https://www.springer.com/gp/book/9781461283188
4. Krasovskii N. N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on the encounter of motions), Moscow: Nauka, 1970. https://zbmath.org/0246.90060
5. Krasovskii N. N. Differential games. Approximation and formal models, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1979, vol. 35, issue 6, pp. 795–822. https://doi.org/10.1070/SM1979v035n06ABEH001625
6. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Subbotin A. I. The synthesis of universal feedback pursuit strategies in differential games, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1997, vol. 35, issue 2, pp. 552–561. https://doi.org/10.1137/S0363012995283972
7. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 1995, vol. 1, no. 1, pp. 1–48. https://doi.org/10.1007/BF02254655
8. Subbotina N. N. Universal optimal strategies in positional differential games, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1983, vol. 19, no. 11, pp. 1890–1896 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de5008
9. Clarke F. *Functional analysis, calculus of variations and optimal control*, London: Springer, 2013. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4820-3
10. Clarke F., Ledyaev Yu. S., Subbotin A. I. Universal feedback control via proximal aiming in problems of control under disturbance and differential games, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1999, vol. 224, pp. 149–168. https://zbmath.org/0965.49022
11. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965. https://zbmath.org/0125.38001
12. Munts N. V., Kumkov S. S. On the coincidence of the minimax solution and the value function in a time-optimal game with a lifeline, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2019, vol. 305, suppl. 1, pp. S125–S139. https://doi.org/10.1134/S0081543819040138

13. Patsko V. S., Turova V. L. Homicidal chauffeur game and its modifications, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2008, issue 2, pp. 105–110 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm080235
14. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Some algorithms for differential games with two players and one target, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1994, vol. 28, issue 4, pp. 441–461. https://doi.org/10.1051/m2an/1994280404411
15. Kolpakova E. A zero-sum differential game with exit time, *Dynamic Games and Applications*, 2025, vol. 15, no. 5, pp. 1685–1710. https://doi.org/10.1007/s13235-025-00623-9
16. Petrakis I. McShane-Whitney extensions in constructive analysis, *Logical Methods in Computer Science*, 2020, vol. 16, issue 1. https://doi.org/10.23638/LMCS-16(1:18)2020
17. Clarke F. H. *Optimization and nonsmooth analysis*, New York: Wiley, 1983. https://doi.org/10.1137/1.9781611971309

Received 30.06.2025
Accepted 07.10.2025

Ekaterina Alekseevna Kolpakova, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620077, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5394-6516
E-mail: eakolpakova@gmail.com

Citation: E. A. Kolpakova. The synthesis of feedback strategies in differential game with exit time, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 4, pp. 558–577.