МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 4. С. 578–600.

УДК 517.928, 517.929

© *О. Б. Цехан*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы управления с постоянным запаздыванием по состоянию в уравнении для медленных переменных (ЛНСВСЗ) на основе представления оператора правой части системы в кольце полиномов от оператора запаздывания, погружения ЛНСВСЗ в семейство систем в расширенном пространстве состояний и применения невырожденных преобразований разработан метод построения асимптотических аппроксимаций решений ЛНСВСЗ. Построены асимптотические аппроксимации нулевого и первого порядков решения задачи Коши для ЛНСВСЗ.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, нестационарная система, запаздывание, асимптотическая аппроксимация, решение.

DOI: 10.35634/vm250405

Введение

Сингулярно возмущенные системы (СВС) являются математическими моделями динамических систем, в которых реализуются одновременно несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами изменения переменных. Такие системы могут быть представлены в стандартной форме системами дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных (см. работы [6, 7, 10, 14, 37, 39] и ссылки в них). Наличие запаздывания отражает присущее любым реальным процессам свойство инерционности и приводит к моделям, описываемым функционально-дифференциальными уравнениями [21, 22, 33, 34, 42, 43]. Задачи управления СВС с запаздыванием возникают при управлении электродвигателями [44], ракетными двигателями [13], химическими реакторами [38], активной подвеской [48], телеоперационными системами [31], ветроэнергетическими установками [5] и др.

При решении СВС возникают проблемы, обусловленные их многотемповостью: высокая размерность, вычислительная жесткость моделей в форме дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Применение асимптотических методов и методов разделения движений (метод погранфункций [6], интегральных многообразий [4, 19, 20], невырожденной замены переменных [30, 35, 36]) позволяет решать эти проблемы и сводит исследование многотемповой системы к анализу независимых подсистем в разных масштабах времени, описывающих движения с различными скоростями. Построение асимптотических аппроксимаций решения методом погранфункций выполняется для начальной задачи дифференциально-разностных уравнений с малым запаздыванием в [6], для краевых задач СВС с уравнением только для быстрой переменной и немалым запаздыванием — в [15, 18], для начальных задач СВС с немалым (постоянным) запаздыванием только в медленной переменной — в [44, 45]. Аппроксимации 0-го и 1-го порядков решений СВС без запаздывания с использованием преобразований, порождаемых невырожденной заменой переменных, построены в [35]. Отметим, что эти аппроксимации не переносятся напрямую на СВСЗ из-за нелокального характера преобразований, выполняющих точную декомпозицию СВСЗ.

Исследования различных групп преобразований для нестационарных линейных систем выполнялись в [1–3, 9]. Преобразования для систем с запаздыванием изучались в [12,16,17,29]. Преобразования, развивающие расщепляющее преобразование СВС [30,35] на СВС с запаздыванием, использовались для решения задач управления СВС с запаздыванием в [32, 36]. СВС управления с запаздыванием исследуются в [34], однако вопросы построения решений там не рассматриваются.

Метод расщепляющего преобразования для СВС с постоянным запаздыванием развивается в работах [23, 24, 26, 28, 40, 46, 47]. Аппроксимации 0-го и 1-го порядка для линейной нестационарной СВС с запаздыванием по состоянию только в медленных переменных построены в [47], аппроксимация 0-го порядка решения линейной нестационарной СВС, содержащей запаздывание в медленной и быстрой переменных состояния в уравнении медленной переменной (ЛНСВСЗ) — в [26]. При решении задач управления для повышения точности регулирования требуется построение аппроксимаций решения ЛНСВСЗ более высокого порядка.

В настоящей работе для ЛНСВСЗ разрабатывается метод построения асимптотических аппроксимаций решения, обобщающий на ЛНСВСЗ подход [35] с применением невырожденного преобразования. Используется представление оператора правой части системы с запаздыванием в кольце полиномов от оператора запаздывания, вложение ЛНСВСЗ в семейство систем с запаздыванием в расширенном пространстве состояний и нелокальные невырожденные преобразования ЛНСВСЗ.

В работе применяются следующие обозначения:

$C(T;\mathbb{R})$ — пространство непрерывных на T вещественных функций;

$PC(T;\mathbb{R}^n)$ — пространство кусочно-непрерывных на T n-вектор функций;

$C_b(T;\mathbb{R}^n)$ — пространство ограниченных непрерывных на T n-вектор функций;

$C^1(T;\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывно-дифференцируемых на T n-вектор функций;

$R[\mu,z]$ — кольцо всех полиномов от μ, z над кольцом R;

$R[[\mu,z]]$ — кольцо формальных степенных рядов от μ, z над кольцом R;

$R_{ij}[\mu,z]$ — кольцо полиномов двух переменных — переменной μ (степени не выше i) и z (степени не выше j) над кольцом R;

E_n — единичная $n\times n$-матрица.

§ 1. Основные понятия и предварительные сведения. Постановка задачи

Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему управления с постоянным запаздыванием по состоянию (ЛНСВСЗ) следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot x(t) &= A_{10}(t)x(t)+A_{11}(t)x(t-h)+A_{20}(t)y(t)+A_{21}(t)y(t-h)+B_1(t)u(t),\\ \mu\dot y(t) &= A_3(t)x(t)+A_4(t)y(t)+B_2(t)u(t),\quad t\in T\triangleq[t_0,t_1],\end{aligned}\tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$\big\{x_0(\cdot),y_0(\cdot)\big\}=\big\{(\varphi(\theta),\,\theta\in T_h),\ (\psi(\theta),\,\theta\in T_h)\big\},\quad T_h\triangleq[t_0-h,t_0].\tag{1.2}$$

Здесь x — медленная переменная, y — быстрая переменная, $x\in\mathbb{R}^{n_1}$, $y\in\mathbb{R}^{n_2}$, μ — параметр, $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0\ll 1$, $h=\mathrm{const}>0$ — запаздывание, $A_{ij}(t)$, $i=1,2$, $j=0,1$, $A_\nu(t)$, $\nu=3,4$, $B_i(t)$, $i=1,2$, $t\in T$, — матричные функции подходящих размеров, элементы которых предполагаются достаточно гладкими (точная гладкость указана ниже), $u(\cdot)\in PC(T;\mathbb{R}^r)$ — функция управления, $\varphi(\cdot)\in PC(T_h;\mathbb{R}^{n_1}),\psi(\cdot)\in PC(T_h;\mathbb{R}^{n_2})$ — заданные функции.

Здесь и далее запись $f(\cdot)$ означает реализацию функции $f(t)$, $(t\in T)$, рассматриваемую как элемент некоторого пространства функций.

Обозначим $n = n_1 + n_2$, $z' = (x', y')$, $\chi(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} (\varphi'(\cdot), \psi'(\cdot))'$, $'$ — символ транспонирования.

При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ под *состоянием ЛНСВСЗ* (1.1) *в момент времени* $t \in T$ понимаем n-вектор функцию $(z(t+\theta, \mu),\ \theta \in [-h, 0]) \in PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$.

Следуя [22, с. 50], введем следующее определение.

Определение 1.1. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ и заданной $u(t)$, $(t \in T)$, *решением ЛНСВСЗ* (1.1) *с начальными условиями* (1.2) называется непрерывная на T n-вектор-функция $z(t, \mu) = (x'(t, \mu), y'(t, \mu))'$, $z\colon T_h \cup T \to \mathbb{R}^n$, для которой верно $z(\theta, \mu) = \chi(\theta)$, $\theta \in T_h$, и компоненты $x(t, \mu), y(t, \mu)$, $t \in T$, удовлетворяют системе (1.1).

Для любых заданных $\mu > 0$ и $u(t)$, $(t \in T)$, начальная задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение [8, с. 32], которое непрерывно зависит от начальных данных. Последнее следует из представления решения в форме Коши [8, с. 34] и вытекающей отсюда линейной зависимости его от начальных данных (1.2). Решение ЛНСВСЗ (1.1), порожденное фиксированным $\mu \in (0, \mu^0]$, начальным условием $\chi(\cdot) \in \Phi_0 \stackrel{\Delta}{=} PC(T_h; \mathbb{R}^n)$ (1.2) и управлением $u(\cdot)$, будем обозначать $z(t, \mu, \chi(\cdot), u(\cdot))$, $(t \in T_h \cup T)$.

Предположение 1.1. Корни $\lambda(A_4(t))$ характеристического уравнения матрицы $A_4(t)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda(A_4(t)) < -2\gamma < 0\ \forall t \in T$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$.

Лемма 1.1 (см. [26]). *Пусть* $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, *непрерывно дифференцируемы на* T, *на* $T_h \cup T$ *функции* $A_\nu(t)$, $\nu = 3, 4$, *определены, непрерывно дифференцируемы и выполнено предположение* 1.1; $B_i(t)$, $i = 1, 2$, $u(t)$, $t \in T$, $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$, $\theta \in T_h$, — *интегрируемые с квадратом функции. Тогда существует* $\mu^* > 0$ *такое, что для всех* $\mu \in (0, \mu^*]$ *решение* $z(t, \mu)$ *равномерно ограничено на* T.

С ЛНСВСЗ (1.1) связаны не зависящие от параметра μ вырожденная система (ВС) и присоединенная система (ПС), которые формально получаются из СВС, если рассмотреть ее отдельно в «медленной» и «быстрой» временных шкалах при $\mu = 0$.

В условиях предположения 1.1 верно $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$, то есть имеет место случай СВС в стандартной форме (см. [6, 39] и ссылки там). Тогда ВС (быстрая система) имеет вид [26]:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_s(t) = A_{s0}(t)x_s(t) + B_{s0}(t)u_s(t) + A_{11}(t)x_s(t-h) + A_{21}(t)\psi(t-h), \quad t \in [t_0, t_0+h), \\
\dot{x}_s(t) = A_{s0}(t)x_s(t) + A_{s1}(t)x_s(t-h) + B_{s0}(t)u_s(t) + B_{s1}(t)u_s(t-h), \quad t \in [t_0+h, t_1], \\
x_s(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in T_h, \quad x_s \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad u_s \in \mathbb{R}^r, \qquad (1.3) \\
A_{sj}(t) \stackrel{\Delta}{=} A_{1j}(t) - A_{2j}(t)A_4^{-1}(t-jh)A_3(t-jh), \quad j = 0, 1, \\
B_{s0}(t) \stackrel{\Delta}{=} B_1(t) - A_{20}(t)A_4^{-1}(t)B_2(t), \quad B_{s1}(t) \stackrel{\Delta}{=} -A_{21}(t)A_4^{-1}(t-h)B_2(t-h).
\end{gathered}$$

Здесь $x_s(t)$ — переменная ВС, $x_s \in \mathbb{R}^{n_1}$, $u_s(\cdot) \in PC(T; \mathbb{R}^r)$ — функция управления для ВС. ВС является n_1-мерной нестационарной системой с запаздыванием в состоянии и управлении.

Присоединенная (быстрая) система, соответствующая (1.1), может быть формально получена [34, с. 88], если рассмотреть ЛНСВСЗ (1.1) в «растянутой» шкале времени: $\tau = \frac{t-t_0}{\mu}$, исключить переменную $x(t)$ и положить $\mu = 0$:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{d\tau}y_f(\tau) = A_4(t_0)y_f(\tau) + B_2(t_0)u_f(\tau), \quad \tau \in T_\mu \stackrel{\Delta}{=} \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu}\right], \qquad (1.4) \\
y_f(\tau) = y(t_0 + \mu\tau), \quad u_f(\tau) = u(t_0 + \mu\tau), \quad y_f \in \mathbb{R}^{n_2}, \\
y_f(0) = \psi(t_0) + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)\varphi(t_0).
\end{gathered}$$

Здесь $y_f(\tau)$ — переменная ПС, $y_f \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u_f(\cdot) \in PC(T_\mu;\mathbb{R}^r)$ — функция управления для ПС. ПС (1.4) является стационарной системой размерности n_2 без запаздывания.

Определение 1.2. Для любого k, $k = 0,1,\ldots$, функция $z^k(t,\mu) = (x^{k\prime}(t,\mu), y^{k\prime}(t,\mu))'$, $z^k\colon T_h \cup T \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ называется *асимптотической аппроксимацией k-го порядка* решения $z(t,\mu)$ ЛНСВСЗ (1.1), (1.2), если существует не зависящая от μ положительная константа C такая, что при всех достаточно малых значениях параметра $\mu > 0$ для каждого $t \in T$ верно $||z(t,\mu) - z^k(t,\mu)|| \leqslant C\mu^{k+1}$, где $||\cdot||$ обозначает евклидову норму. Если константа не зависит от t, то аппроксимация равномерна по t.

Следующая теорема [26] устанавливает связь между решением задачи Коши (1.1), (1.2) для исходной ЛНСВСЗ и решениями ее ВС (1.3) и ПС (1.4).

Теорема 1.1 (Об аппроксимации 0-го порядка решения ЛНСВСЗ). *Пусть выполнены условия леммы 1.1 и функция $A_{21}(t+h)A_4^{-1}(t)\big(A_4^{-1}(t)A_3(t)\varphi(t) + \psi(t)\big)$ определена и имеет ограниченные производные на $[t_0 - h, t_0]$. Тогда существует $\mu^* > 0$ такое, что для всех $\mu \in (0,\mu^*]$ функции*

$$x^0(t) = x_s(t), \quad y^0(t) = y_f\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right) - A_4^{-1}(t)A_3(t)x_s(t), \quad t \in T, \tag{1.5}$$

где $x_s(t)$, $y_f(\tau)$ — решения ВС (1.3) и ПС (1.4), являются равномерными на T асимптотическими аппроксимациями 0-го порядка решения задачи (1.1), (1.2):

$$x(t) = x^0(t) + O(\mu), \quad y(t) = y^0(t) + O(\mu), \quad t \in T.$$

Замечание 1.1. В частном случае при отсутствии запаздывающих членов в (1.1) теорема 1.1 совпадает с теоремой 6.1 [35, с. 227].

Задача. Для ЛНСВСЗ (1.1), (1.2) обосновать подход к построению асимптотических аппроксимаций любых порядков ее решения через решения разделенных по темпам изменения переменных систем меньшей размерности на основе представления ЛНСВСЗ в кольце полиномов от оператора запаздывания и использования операторов нелокальных невырожденных преобразований; реализовать этот подход на примере построения асимптотической аппроксимации 1-го порядка решения ЛНСВСЗ.

§ 2. Расширение пространства состояний и погружение ЛНСВСЗ

Для решения поставленных задач в работе применяется подход на основе преобразований, для корректного применения которого к ЛНСВСЗ используем расширение пространства состояний и погружение ЛНСВСЗ в семейство систем. С этой целью представим правую часть ЛНСВСЗ (1.1) в операторной форме, введя оператор дифференцирования $p \stackrel{\Delta}{=} \frac{d}{dt}$ и оператор чистого запаздывания e^{-ph}: $e^{-ph}x(t) = x(t-h)$, $e^{-jph}x(t) = x(t-jh)$.

Обозначим $M = \operatorname{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}$ и определим множества $\mathcal{A}_\mu$ и $\mathcal{B}_\mu$ непрерывных на T операторов $\mathbf{A}_\mu$ правой части свободной системы и B_μ управляющей части (1.1):

$$\mathbf{A}_\mu \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{A}\big(t,\mu,e^{-ph}\big) = M^{-1}\mathbf{A}\big(t,e^{-ph}\big) \in \mathcal{A}_\mu, \quad B_\mu \stackrel{\Delta}{=} B(t,\mu) = M^{-1}B(t) \in \mathcal{B}_\mu, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{A}\left(t,e^{-ph}\right)$, $B(t)$ — это нестационарные блочные матричные операторы вида

$$\mathbf{A}\big(t,e^{-ph}\big) = A_0(t) + A_1(t)e^{-ph} \in \mathcal{A}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{B}, \tag{2.2}$$

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} A_{10}(t) & A_{20}(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{21}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которые образуют классы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ непрерывных ограниченных на T операторов.

Здесь и далее для обозначения матричных операторов, зависящих от оператора запаздывания e^{-ph}, будем использовать прямой шрифт (например, $\mathbf{A}\left(t, e^{-ph}\right)$) в отличие от не зависящих от оператора запаздывания операторов (например, $A(t)$). Для обозначения классов операторов используем каллиграфический шрифт ($\mathcal{A}$). С целью сокращения записей аргументы $\left(t, \mu, e^{-ph}\right)$ у операторов далее иногда будем опускать.

С использованием введенных выше операторов систему (1.1) можно записать в виде

$$(\mathbf{A}_\mu, B_\mu)\colon \dot{z}(t) = \mathbf{A}\left(t, \mu, e^{-ph}\right) z(t) + B\left(t, \mu\right) u(t) \tag{2.3}$$

и отождествить с парой матричных операторов $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu) \in (\mathcal{A}_\mu, \mathcal{B}_\mu)$.

Из (1.2) имеем начальные условия для системы (2.3):

$$z_0(\cdot) = \chi(\theta), \quad \theta \in T_h. \tag{2.4}$$

Совокупность всех начальных задач для системы $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu) \in (\mathcal{A}_\mu, \mathcal{B}_\mu)$ вида (2.3), (2.1), (2.2) с пространством состояний $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$, множеством начальных состояний Φ_0 (2.4) и управлениями $u(\cdot) \in PC(T, \mathbb{R}^r)$ обозначим Σ, множество всех их решений — Z, множество всех решений, порожденных $\chi(\cdot) \in \Phi_0$, обозначим $Z(\chi(\cdot))$.

Погрузим множество систем $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu)$ (2.3) в семейство систем.

Предположение 2.1. Матричные функции системы (1.1) продолжены с T на $(-\infty, t_1]$ так, что $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_\nu(t)$, $\nu = 3, 4$, ограничены, непрерывно дифференцируемы и $A_4(t)$ удовлетворяет предположению 1.1 для любого $t \in (-\infty, t_1]$.

Функции $\varphi(\theta), \psi(\theta)$ доопределим влево: $\varphi(\theta) \equiv 0, \psi(\theta) \equiv 0, \theta < t_0 - h$. Обозначим $T_{kh} \stackrel{\Delta}{=} [t_0 - (k+1)h, t_0]$.

Пусть $M_j^m(t)$, $m = \overline{0, k}$, $j = \overline{0, k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, -$ $n \times n$-матричные функции с элементами из кольца кусочно-непрерывных на $T_{kh} \cup T$ функций. Погрузим классы операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\mu$ в семейства классов $\mathcal{O}_k$, $\mathcal{O}_{\mu k}$, $k = 0, 1, \ldots,$. операторов $\mathbf{O}_k \in \mathcal{O}_k$ и $\mathbf{O}_{\mu k} \in \mathcal{O}_{\mu k}$ вида

$$\mathbf{O}_k\left(t, \mu, e^{-ph}\right) = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{m=0}^{k} \mu^m M_j^m(t) e^{-jph}, \quad \mathbf{O}_{\mu k}\left(t, \mu, e^{-ph}\right) = M^{-1} \cdot \mathbf{O}_k\left(t, \mu, e^{-ph}\right).$$

Введем также группу $\mathcal{O}_\infty$ $n \times n$-матричных операторов

$$\mathbf{O}_\infty\left(t, \mu, e^{-ph}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m M_j^m(t) e^{-jph}$$

с элементами из кольца $PC_b\big((-\infty, t_1]; \mathbb{R}\big)[[\mu, e^{-ph}]]$ и класс $\mathcal{O}_{\mu\infty}$ операторов $\mathbf{O}_{\mu\infty} = M^{-1} \cdot \mathbf{O}_\infty\big(t, \mu, e^{-ph}\big)$. В классах $\mathcal{O}_k$, $\mathcal{O}_{\mu k}$, $k = 0, 1, \ldots,$ $\mathcal{O}_{\mu\infty}$, $\mathcal{O}_\infty$ выделим подклассы $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{A}_{\mu k}$, $k = 0, 1, \ldots,$ $\mathcal{A}_{\mu\infty}$, $\mathcal{A}_\infty$ операторов, для которых $M_0^0(t)$, $M_1^0(t)$ имеют вид $A_0(t)$, $A_1(t)$ (2.2) и все остальные $M_j^m(t) \equiv 0$, $t \in T$. Тогда определенное выше множество $\mathcal{A}_\mu$ совпадает с классом $\mathcal{A}_{\mu 0}$, для любого $k = 0, 1, \ldots$ операторы класса $\mathcal{O}_k$ можно рассматривать как частный случай операторов класса $\mathcal{O}_{k+1}$ с $M_j^m(t) \equiv 0$, $m > k$, $j > k+1$ и $\mathbf{A}_\mu(t, e^{-ph}) \equiv$ $\equiv \mathbf{A}_{\mu k}(t, e^{-ph})$.

Таким образом на расширенном пространстве состояний $PC\big((-\infty, t]; \mathbb{R}^n\big)$ определены вложенные классы операторов такие, что

$$\mathcal{A}_{\mu k} \subset \mathcal{A}_{\mu(k+1)} \subset \mathcal{O}_{\mu(k+1)} \subset \mathcal{O}_{\mu\infty}, \; \mathcal{A}_{\mu k} \subset \mathcal{A}_{\mu\infty} \subset \mathcal{O}_{\mu\infty}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{2.5}$$

Аналогично (2.5) на множестве r-вектор-функций $u(\cdot) \in PC\left((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^r\right)$ определим вложенную систему классов $n \times r$-матричных операторов

$$\mathcal{V}_k \ni \mathbf{V}_k\left(t, e^{-ph}\right) = \sum_{j=0}^{k+1} V_j(t) e^{-jph}, \quad \mathcal{V}_\infty \ni \mathbf{V}_\infty\left(t, e^{-ph}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} V_j(t) e^{-jph},$$
$$\mathcal{V}_{\mu k} \ni M^{-1}\mathbf{V}_k, \quad \mathcal{V}_{\mu\infty} \ni M^{-1}\mathbf{V}_\infty,$$

в которых выделим подклассы $\mathcal{B}_k$, $\mathcal{B}_{\mu k}$, $k = 0, 1, \ldots$, $\mathcal{B}_{\mu\infty}$, $\mathcal{B}_\infty$, с $V_0(t) \triangleq B_0(t) \equiv B(t)$, $V_j(t) \triangleq B_j(t) \equiv 0$, $j \geqslant 1$:

$$\mathcal{B}_{\mu k} \subset \mathcal{B}_{\mu(k+1)} \subset \mathcal{V}_{\mu(k+1)} \subset \mathcal{V}_{\mu\infty}, \quad \mathcal{B}_{\mu k} \subset \mathcal{B}_{\mu\infty} \subset \mathcal{V}_{\mu\infty}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{2.6}$$

Таким образом согласно (2.5), (2.6) определено погружение системы (2.3) $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu) \in$ $\in (\mathcal{A}_\mu, \mathcal{B}_\mu) \subset (\mathcal{A}_{\mu k}, \mathcal{B}_{\mu k}) \subset (\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k}) \subset (\mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{V}_{\mu\infty})$, $k = 0, 1, \ldots$.

Наряду с (2.3)–(2.4) для любого $k = 0, 1, \ldots$ рассмотрим множество начальных задач для систем вида

$$(\mathbf{O}_{\mu k}, \mathbf{V}_{\mu k})\colon \dot{z}(t) = \mathbf{O}_{\mu k}\left(t, \mu, e^{-ph}\right) z(t) + \mathbf{V}_{\mu k}\left(t, \mu, e^{-ph}\right) u(t) + f_k(t, \mu), \quad t \in T, \tag{2.7}$$

где $f_k(\cdot, \mu) \in PC(T; \mathbb{R}^n)[\mu]$, с операторами $(\mathbf{O}_{\mu k}, \mathbf{V}_{\mu k}) \in (\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k})$, пространством состояний $PC([t - (k+1)h, t]; \mathbb{R}^n)$, начальными условиями

$$z_{0k}(\cdot, \mu) = \left\{\chi_k(\theta, \mu), \theta \in T_{kh}\right\}, \quad \chi_k(\cdot, \mu) \in \Phi_{0k} \triangleq PC\left(T_{kh}; \mathbb{R}^n\right)[\mu], \tag{2.8}$$

и управлениями $u(\cdot) \in PC(T_{kh} \cup T, \mathbb{R}^r)$, $u(t) \equiv 0$, $t < t_0$. Во множестве задач (2.7), (2.8) определим подмножество Σ_k начальных задач для системы вида

$$(\mathbf{A}_{\mu k}, \mathbf{B}_{\mu k})\colon \dot{z}(t) = \mathbf{A}_{\mu k}\left(t, \mu, e^{-ph}\right) z(t) + \mathbf{B}_{\mu k}\left(t, \mu, e^{-ph}\right) u(t), \quad t \in T, \tag{2.9}$$

которые получаются из (2.7) при $(\mathbf{O}_{\mu k}, \mathbf{V}_{\mu k}) = (\mathbf{A}_{\mu k}, \mathbf{B}_{\mu k})$ и $f_k(t, \mu) = 0$, $t \in T$, с начальными условиями (2.8) и множеством решений Z_k.

Для любой функции $\chi(\cdot) \in \Phi_0$ определим множества $\Phi_{0k}(\chi(\cdot)) \subset \Phi_{0k}$, $k = 0, 1, \ldots$, всех кусочно-непрерывных продолжений $z_{0k}(\cdot) = z_{0k}(\cdot, \chi(\cdot))$ ее на T_{kh}.

Пусть зафиксированы операторы $\mathbf{A}_\mu \in \mathcal{A}_\mu$, $B_\mu \in \mathcal{B}_\mu$, и согласно определенным выше вложениям им соответствуют операторы $\mathbf{A}_{\mu k} \in \mathcal{A}_{\mu k}$, $\mathbf{B}_{\mu k} \in \mathcal{B}_{\mu k}$. Установим соответствие между решениями задачи (2.3)–(2.4) из Σ и соответствующих ему задач из Σ_k.

Лемма 2.1. *При любом целом $k \geqslant 0$ и любых фиксированных $\mu \in (0, \mu^0]$, $u(t)$, $t \in T$, для любого $\chi(\cdot) \in \Phi_0$ и любого начального условия $z_{0k}(\cdot) = z_{0k}(\cdot, \chi(\cdot)) \in \Phi_{0k}$, сужение на $[t_0 - h, t_1]$ решения $z(\cdot, \mu, z_{0k}(\cdot), u(\cdot)) \in Z_k$ задачи из Σ_k для системы $(\mathbf{A}_{\mu k}, \mathbf{B}_{\mu k})$ совпадает с решением $z(\cdot, \mu, \chi(\cdot), u(\cdot))$ задачи из Σ для системы $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu)$.*

Доказательство. Обозначим $F(t, \tau, \mu)$, $F_k(t, \tau, \mu)$ — матрицы Коши [8, с. 33] соответствующих систем из Σ и Σ_k. Решение задачи (2.9), (2.8) в форме Коши с учетом $u(t) \equiv 0$, $t < t_0$, имеет вид [8, с. 32]:

$$z(t, \mu) = F_k(t, t_0, \mu)\chi_k(t_0, \mu) + \int_{t_0 - (k+1)h}^{t_0} F_k(t, s + h, \mu) M^{-1} A_1(s) z_{0k}(s, \mu)\, ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} F_k(t, s, \mu) M^{-1} B(s) u(s)\, ds.$$

Из определения операторов $\mathbf{A}_\mu$ и $\mathbf{A}_{\mu k}$ следует, что $\mathbf{A}_\mu(t, e^{-ph}) \equiv \mathbf{A}_{\mu k}(t, e^{-ph})$ для любого $k \geqslant 0$, поэтому верно $F_k(t, \tau, \mu) \equiv F(t, \tau, \mu)$, $\tau \geqslant t_0 - h$, $F_k(t, \tau, \mu) \equiv 0$, $\tau < t_0 - h$. С учетом этого и справедливости $\chi_k(t) \equiv \chi(t)$, $t \in T_h$, для любой $z_{0k}(\cdot, \mu) \in \Phi_{0k}(\chi(\cdot))$, это представление совпадает с решением системы $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu)$ для $\chi(\cdot) \in \Phi_0$. □

Следствие 2.1. *Множество всех решений* $Z(\chi(\cdot))$, $\chi(\cdot) \in \Phi_0$ *начальных задач из* Σ *образует в пространстве сужений на* $T_h \cup T$ *решений* $Z_k(z_{0k}(\chi(\cdot)))$, $\chi(\cdot) \in \Phi_0$ *начальных задач из* Σ_k *некоторое подмножество, которое определяется множеством начальных функций* Φ_0.

Таким образом, от исследования решений задачи (2.3), (2.4) для системы $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu)$ можно перейти к анализу решений задачи (2.9), (2.8) для системы $(\mathbf{A}_{\mu k}, \mathbf{B}_{\mu k})$ при $\chi_k(\cdot) \in \in \Phi_{0k}(\chi(\cdot))$, $\chi(\cdot) \in \Phi_0$, $z_{0k}(t, \chi(\cdot)) = 0$, $t < t_0 - h$, $k = 0, 1, \ldots$.

§ 3. Семейство преобразований ЛНСВСЗ

В § 2 определены вложения (2.5), (2.6) операторов систем, что позволяет рассматривать систему $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu)$ как частный случай системы $(\mathbf{O}_{\mu\infty}, \mathbf{V}_{\mu\infty}) \in (\mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{V}_{\mu\infty})$. Для любого оператора $\mathbf{A}_\mu \in \mathcal{O}_{\mu\infty}$ можно определить невырожденное преобразование [28, (22)] вида $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu\mathbf{H} \\ -\mathbf{L} & E_{n_2} - \mu\mathbf{L}\mathbf{H} \end{pmatrix}$, которое, аналогично [35, с. 227], выполняет точную декомпозицию системы $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu)$ на разделенные по темпам изменения переменных подсистемы при условии, что нестационарные матричные операторы $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$, $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям [28, (25), (20)]. Если выполнены условия предположения 2.1 и матричные функции $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_\nu(t)$, $\nu = 3, 4$, k раз ($k = 1, 2, \ldots$) непрерывно дифференцируемы с ограниченными производными на $(-\infty, t_1]$, то для достаточно малых $\mu > 0$ они могут быть найдены с любой точностью в виде: $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum\limits_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) + O(\mu^k)$, $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{H}^m(t, e^{-ph}) + O(\mu^k)$, где члены асимптотических рядов определяются по параметрам ЛНСВСЗ (1.1) согласно формулам [28, (30)–(34)]:

$$\mathbf{L}^m\left(t, e^{-ph}\right) = \sum_{j=0}^{m} L_j^m(t) e^{-jph}, \quad \mathbf{H}^m\left(t, e^{-ph}\right) = \sum_{j=0}^{m+1} H_j^m(t) e^{-jph}, \tag{3.1}$$

$$L_j^m(t) = A_4^{-1}(t)\left(\sum_{s=j-1}^{j} L_s^{m-1}(t) A_{1,j-s}(t - sh) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{k} \sum_{r=0}^{1} L_s^k(t) A_{2r}(t - sh) L_{j-s-r}^{m-k-1}(t - (r+s)h) + \dot{L}_j^{m-1}(t) \right), \tag{3.2}$$

$$H_j^m(t) = \left(\sum_{s=0}^{1} A_{1s}(t) H_{j-s}^{m-1}(t - sh) - \sum_{k=0}^{1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=0}^{m-1} A_{2k}(t) L_s^{i-1}(t - kh) H_{j-k-s}^{m-i}\big(t - (s+k)h\big) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} H_k^{n-1}(t) L_s^{m-n}(t - kh) A_{2,j-k-s}(t - (s+k)h) - \dot{H}_j^{m-1}(t) \right) A_4^{-1}(t - jh),$$

$$L_0^0(t) = A_4^{-1}(t) A_3(t), \quad L_j^m(t) = 0, \quad j < 0 \vee m < 0 \vee j > m,$$

$$H_0^0(t) = A_{20}(t) A_4^{-1}(t), \quad H_1^0(t) = A_{21}(t) A_4^{-1}(t - h), \tag{3.3}$$

$$H_j^m(t) \equiv 0, \quad j < 0 \vee m < 0 \vee j > m + 1.$$

Для любого $k = 0, 1, \ldots$ определим действующие на множестве $(\mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{V}_{\mu\infty})$ операторы $\mathbf{K}^k\left(t, \mu, e^{-ph}\right) \in R_{2k+1,2k+1}[\mu, e^{-ph}]$, $R = C(T; \mathbb{R}^{n\times n})$ вида:

$$\mathbf{K}^k(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m \mathbf{H}^m\left(t, e^{-ph}\right) \\ -\sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m \mathbf{L}^m\left(t, e^{-ph}\right) & E_{n_2} - \mu \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m \mathbf{L}^m\left(t, e^{-ph}\right) \sum\limits_{n=0}^{k} \mu^n \mathbf{H}^n\left(t, e^{-ph}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{L}^m$, $\mathbf{H}^m$ определяются по (3.1)–(3.3). Операторы $\mathbf{K}^k$ (3.4) являются асимптотическими аппроксимациями оператора расщепляющего преобразования $\mathbf{K}(t,\mu,e^{-ph})$ [28, (22)].

Предложение 3.1. *Для любого целого $k \geqslant 0$ оператор $\mathbf{K}^k\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ вида (3.4) унимодулярный и обратимый $\forall \mu > 0\ \forall t \in T$. При этом справедливо представление*

$$\left(\mathbf{K}^k\right)^{-1}(t,\mu,e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \sum\limits_{n=0}^{k} \mu^n \mathbf{H}^n\left(t,e^{-ph}\right) \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m \mathbf{L}^m\left(t,e^{-ph}\right) & -\mu \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m \mathbf{H}^m\left(t,e^{-ph}\right) \\ \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m \mathbf{L}^m\left(t,e^{-ph}\right) & E_{n_2} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Вычислим $\det \mathbf{K}^k(t,\mu,e^{-ph}) \equiv 1$, $\forall k \geqslant 0$, что согласно определению подтверждает унимодулярность матрицы $\mathbf{K}^k(t,\mu,e^{-ph})$. Поскольку для обратимости матрицы над кольцом полиномов необходимо и достаточно, чтобы она была унимодулярна, то справедливость первой части утверждения доказана. Представление (3.5) доказывается непосредственным вычислением. □

Из (3.4), (3.1) и (3.5) вытекает справедливость следующего утверждения.

Предложение 3.2. *Для любого целого $k \geqslant 0$ справедливо блочное представление оператора $\mathbf{K}^k$ и его обратного $(\mathbf{K}^k)^{-1}$:*

$$\mathbf{K}^k(t,\mu,e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{2k+1} K_j^k(t,\mu)e^{-jph}, \quad K_j^k(t,\mu) = \begin{pmatrix} K_{j11}^k(t,\mu) & K_{j12}^k(t,\mu) \\ K_{j21}^k(t,\mu) & K_{j22}^k(t,\mu) \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$(\mathbf{K}^k)^{-1}(t,\mu,e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{2k+1} \overline{K}_j^k(t,\mu)e^{-jph}, \quad \overline{K}_j^k(t,\mu) = \begin{pmatrix} \overline{K}_{j11}^k(t,\mu) & \overline{K}_{j12}^k(t,\mu) \\ \overline{K}_{j21}^k(t,\mu) & \overline{K}_{j22}^k(t,\mu) \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где

$$K_{j11}^k(t,\mu) = \delta_{0j}E_{n_1}, \quad K_{j12}^k(t,\mu) = \sum_{m=\max\{1,j\}}^{k+1} \mu^m H_j^{m-1}(t), \quad K_{j21}^k(t,\mu) = -\sum_{m=j}^{k} \mu^m L_j^m(t),$$

$$K_{j22}^k(t,\mu) = \delta_{0j}E_{n_2} - \sum_{m=\max\{1,j\}}^{2k+1} \mu^m \sum_{n=m-k}^{k} \sum_{i=0}^{n} L_i^n(t) H_{j-i}^{m-n-1}(t-ih),$$

$$\overline{K}_{j11}^k(t,\mu) = \delta_{0j}E_{n_1} - \sum_{m=\max\{1,j\}}^{2k+1} \mu^m \sum_{n=m-k}^{k} \sum_{i=0}^{n+1} H_{j-i}^{m-n-1}(t) L_i^n(t-(j-i)h), \tag{3.8}$$

$$\overline{K}_{j12}^k(t,\mu) = -\sum_{m=\max\{1,j\}}^{k+1} \mu^m H_j^{m-1}(t), \quad \overline{K}_{j21}^k(t,\mu) = \sum_{m=j}^{k} \mu^m L_j^m(t), \quad \overline{K}_{j22}^k(t,\mu) = \delta_{0j}E_{n_2},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \text{ — символ Кронекера.}$$

Каждый оператор $\mathbf{K}^k(t,\mu,e^{-ph})$, $k = 0,1,2,\ldots$, можно рассматривать как обратимое линейное нелокальное преобразование на множестве систем из $(\mathcal{O}_{\mu\infty},\mathcal{V}_{\mu\infty})$. Для любого k, $k = 0,1,2,\ldots$, операторы преобразований $\mathbf{K}^k(t,\mu,e^{-ph})$ применимы к любой системе класса $(\mathcal{O}_{\mu\infty},\mathcal{V}_{\mu\infty})$ и в силу вложений (2.5), (2.6) могут использоваться для построения аппроксимаций решений ЛНСВСЗ (1.1).

В следующем параграфе такой подход реализован для построения аппроксимации 1-го порядка.

§ 4. Асимптотическая аппроксимация 1-го порядка решения ЛНСВСЗ

Определим матричные операторы:

$$\mathbf{A}_\xi(t,\mu,e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{2} A_{\xi j}(t,\mu)e^{-jph}, \quad A_{\xi j}(t,\mu) = \begin{cases} 0, t \in [t_0, t_0+jh), \\ \sum\limits_{m=0}^{1} \mu^m A_{\xi j}^m(t), t \geqslant t_0+jh, \end{cases}$$

$$\mathbf{B}_\xi(t,\mu,e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{1} B_{\xi j}(t,\mu)e^{-jph}, \quad B_{\xi j}(t,\mu) = \sum_{m=0}^{1} \mu^m B_{\xi j}^m(t), \quad t \in T, \tag{4.1}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\eta(\tau,\mu,e^{-p\widetilde{h}}) = \sum_{j=0}^{1}\sum_{m=j}^{1} \mu^m \widetilde{A}_{\eta j}^m(\tau), \quad \widetilde{\mathbf{B}}_\eta(\tau,\mu,e^{-p\widetilde{h}}) = \sum_{j=0}^{1}\sum_{m=j}^{1} \mu^m \widetilde{B}_{\eta j}^m(\tau),$$

$$\widetilde{h} \triangleq \frac{h}{\mu}, \quad \tau \in T_\mu \triangleq \left[0, \frac{t_1-t_0-h}{\mu}\right],$$

где матричные функции $A_{\xi j}^m(t)$, $B_{\xi j}^m(t)$, $\widetilde{A}_{\eta j}^m(\tau)$, $\widetilde{B}_{\eta j}^m(\tau)$ определяются формулами

$$A_{\xi j}^0(t) = A_{1j}(t) - A_{2j}(t)L_0^0(t-jh), \quad j = 0,1; \quad A_{\xi j}^m(t) = 0, \quad j > m+1,$$

$$A_{\xi j}^m(t) = -\sum_{i=0}^{1} A_{2i}(t)L_{j-i}^m(t-ih), \quad m \geqslant 1, \quad j = \overline{0, m+1}, \tag{4.2}$$

$$B_{\xi 0}^0(t) = B_1(t) - H_0^0(t)B_2(t), \quad B_{\xi 1}^0(t) = -H_1^0(t)B_2(t-h),$$

$$B_{\xi j}^m(t) = -H_j^m(t)B_2(t-jh) - \tag{4.3}$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{i+1} H_k^i(t)L_{j-k}^{m-i-1}(t-kh)B_1(t-jh), \quad m \geqslant 1, \quad j = \overline{0, m},$$

$$\widetilde{A}_{\eta j}^m(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < j\widetilde{h}, \\ \sum\limits_{r=j}^{m} \dfrac{(\tau - j\widetilde{h})^{m-r}}{(m-r)!} A_{\eta j}^{r(m-r)}(t_0+jh), & \tau \geqslant j\widetilde{h}, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\widetilde{B}_{\eta j}^m(\tau) = \sum_{r=j}^{min\{m,1\}} \frac{(\tau - j\widetilde{h})^{m-r}}{(m-r)!} B_{\eta j}^{r(m-r)}(t_0+jh), \tag{4.5}$$

$$A_{\eta 0}^0(t) = A_4(t); \quad A_{\eta j}^m(t) = 0, \quad j > m \vee t < t_0+jh,$$

$$A_{\eta j}^m(t) = \sum_{i=0}^{1} L_{j-i}^{m-1}(t)A_{2i}(t-(j-i)h), \quad m \geqslant 1, \quad j = \overline{0, m}, \tag{4.6}$$

$$B_{\eta 0}^0(t) = B_2(t); \quad B_{\eta j}^m(t) = 0, \quad j > m \vee t < t_0+jh,$$

$$B_{\eta j}^m(t) = L_j^{m-1}(t)B_1(t-jh), \quad m \geqslant 1, \quad j = \overline{0, m}. \tag{4.7}$$

В классе начальных задач (2.9), (2.8) рассмотрим задачу для системы вида:

$$\dot{\xi}^1(t) = \mathbf{A}_\xi(t,\mu,e^{-ph})\xi^1(t) + \mathbf{B}_\xi(t,\mu,e^{-ph})u(t) + F_\xi(t,\mu), \quad \xi^1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t \in T, \tag{4.8}$$

$$\frac{d}{d\tau}\eta^1(\tau) = \widetilde{\mathbf{A}}_\eta(\tau,\mu,e^{-p\widetilde{h}})\eta^1(\tau) + \widetilde{\mathbf{B}}_\eta(\tau,\mu,e^{-p\widetilde{h}})\widetilde{u}(\tau) + F_\eta(\tau,\mu), \quad \eta^1 \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \tau \in T_\mu, \tag{4.9}$$

$\tau = \frac{t-t_0}{\mu}$, с начальными условиями

$$\xi^1(\theta,\mu) = \phi(\theta,\mu), \quad \theta < t_0, \qquad \eta^1(\widetilde{\theta},\mu) = \psi(\widetilde{\theta},\mu), \quad \widetilde{\theta} < 0, \quad \widetilde{\theta} \triangleq \frac{\theta - t_0}{\mu}, \tag{4.10}$$

где кусочно-непрерывные на T матричные операторы $\mathbf{A}_\xi(t,\mu,e^{-ph})$, $\mathbf{B}_\xi(t,\mu,e^{-ph})$, $\widetilde{\mathbf{A}}_\eta(\tau,\mu,e^{-ph})$, $\widetilde{\mathbf{B}}_\eta(\tau,\mu,e^{-ph})$ определяются по (4.1)–(4.5), $\phi(\theta,\mu)$, $\psi(\widetilde{\theta},\mu)$ — заданные кусочно-непрерывные функции, $u(t)$ — кусочно-непрерывное управление, $\widetilde{u}(\tau)=u(t_0+\mu\tau)$, $F_\xi(t,\mu)$, $F_\eta(\tau,\mu)$ — заданные кусочно-непрерывные n_1- и n_2-вектор-функции возмущений.

Заметим, что согласно (4.1)–(4.7) нестационарные матричные операторы $\mathbf{A}_\xi,\mathbf{B}_\xi,F_\xi$ могуть иметь разрывы первого рода только в точках t_0+jh, $j=0,1,2$, а операторы $\mathbf{A}_\eta$, $\widetilde{\mathbf{B}}_\eta$, F_η — только в точках $\tau=j\widetilde{h}$, $j=0,1,2$.

Уравнение (4.8) задает динамику медленной подсистемы в исходной шкале времени $t\in T$, а уравнение (4.9) — динамику быстрой подсистемы, определенной на «растянутой» шкале времени $\tau\in T_\mu$. Подсистемы (4.8) и (4.9) связаны через управление.

Определение 4.1. При фиксированном $\mu>0$ и заданном $u(t)$, $(t\in T)$, под *решением системы* (4.8), (4.9) *с начальными условиями* (4.10) понимаем n-вектор-функцию $\zeta(t)=(\xi^{1\prime}(t),\eta^{1\prime}(\tau))'$, $t\in[t_0-2h,t_1]$, $\tau=\frac{t-t_0}{\mu}$, компоненты которой совпадают с начальными функциями из (4.10) для $t\leqslant t_0$, $\tau\leqslant 0$, удовлетворяют системе (4.8), (4.9) для $t\in T$, $\tau\in T_\mu$ и являются непрерывными на T, T_μ функциями.

Предложение 4.1. *Для любых заданных $\mu>0$ и $u(t)$, $(t\in T)$, решение задачи Коши* (4.8)–(4.10) *существует, единственно и для него справедливы теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных задачи и параметров.*

Доказательство первой части утверждения несложно провести методом интегрирования по шагам с учетом требования непрерывности решения (то есть согласования в граничных точках интервалов интегрирования: точках t_0+jh, $j=0,1,\ldots,$ для (4.8) и $j\widetilde{h}$, $j=0,1,\ldots,$ для (4.9)). При этом получаемая на каждом шаге система удовлетворяет требованиям теоремы 7.1 [11, с. 187], откуда следует непрерывная зависимость от начальных данных и параметров. □

Цель следующей теоремы состоит в том, чтобы используя вложение ЛНСВСЗ в виде (2.3) в класс $(A_{\mu 1},B_{\mu 1})\in(\mathcal{O}_{\mu\infty},\mathcal{V}_{\mu\infty})$, преобразование зависимых и независимых переменных системы доказать ее асимптотическую эквивалентность системе вида (4.8), (4.9) и, используя уравнения связи для решений исходной и преобразованной систем, получить асимптотическую аппроксимацию 1-го порядка решения ЛНСВСЗ (1.1)–(1.2).

Теорема 4.1 (Об аппроксимации 1-го порядка решения ЛНСВСЗ). *Пусть матричные функции ЛНСВСЗ* (1.1) *продолжены на $[t_0-3h,t_1]$ таким образом, что выполняется предположение 1.1, и матричные функции $A_{ij}(t)$, $i=1,2$, $j=0,1$, $A_i(t)$, $i=3,4$, имеют ограниченные на $[t_0-3h,t_1]$ производные; функции $\varphi(\theta),\psi(\theta),\theta\in T_h$, из начальных условий* (1.2) *дифференцируемы и имеют ограниченные производные. Тогда существует $\mu^*>0$ такое, что для всех $\mu\in(0,\mu^*]$ решение начальной задачи* (1.1), (1.2) *равномерно* (*по t*) *асимптотически* (*по μ*) *аппроксимируется на $T_h\cup T$ согласно формулам*

$$
\begin{aligned}
&x(t)=x^1(t)+O(\mu^2),\ x^1(t)=\xi^1(t)+\mu H_0^0(t)\eta^1\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)+\mu H_1^0(t)\eta^1\left(\frac{t-t_0-h}{\mu}\right),\\
&y(t)=y^1(t)+O(\mu^2),\\
&y^1(t)=(E_{n_2}-\mu L_0^0(t)H_0^0(t))\eta^1\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)-\mu L_0^0(t)H_1^0(t)\eta^1\left(\frac{t-t_0-h}{\mu}\right)-\\
&\qquad-(L_0^0(t)+\mu L_0^1(t))\xi^1(t)-\mu L_1^1(t)\xi^1(t-h),
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

где $(\xi^1(t),\eta^1(\tau))$ *— решение системы* (4.8), (4.9) *с начальными условиями*

$$\begin{aligned}&\xi^1(\theta,\mu)=(E_{n_1}-\mu H_0^0(\theta)L_0^0(\theta))\varphi(\theta)-\mu H_1^0(\theta)L_0^0(\theta-h)\varphi(\theta-h)-\\&-\mu H_0^0(\theta)\psi(\theta)-\mu H_1^0(\theta)\psi(\theta-h),\quad \theta\leqslant t_0,\\&\eta^1(\theta,\mu)=\psi(\theta)+(L_0^0(\theta)+\mu L_0^1(\theta))\varphi(\theta)+\mu L_1^1(\theta)\varphi(\theta-h),\quad \theta\leqslant t_0,\\&\varphi(\theta)\equiv 0,\quad \psi(\theta)\equiv 0,\quad \theta<t_0-h,\quad u(t)\equiv 0,\quad t<t_0.\end{aligned}\tag{4.12}$$

и функции $F_s(t,\mu)$, $s\in\{\xi,\eta\}$, *таковы, что* $F_\xi(t,\mu)\equiv 0$, $F_\eta(t_0+\mu\tau,\mu)\equiv 0$, $t>t_0+2h$, $\tau>\frac{2h}{\mu}$, $F_\eta(e,\mu)=F_\eta(t_0+\mu\tau,\mu)$ *и*

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}F_\xi(t,\mu)\\F_\eta(t,\mu)\end{pmatrix}=M\Big[\overline{K}_j^1(t,\mu)A_1(t-jh)\chi(t-(j+1)h)+\frac{d}{dt}\Big(\overline{K}_{j+1}^1(t,\mu)\chi(t-(j+1)h)\Big)+\\&+\sum_{k=0}^{j}\Big(\overline{K}_{k-1}^1(t,\mu)A_1(t-(k-1)h)+\overline{K}_k^1(t,\mu)M^{-1}A_0(t-kh)+\dot{\overline{K}}_k^1(t,\mu)\Big)\times\\&\times K_{j+1-k}^1(t-kh,\mu)\overline{K}_0^1(t-(j+1)h,\mu)\chi(t-(j+1)h)\Big],\ t\in[t_0+jh,t_0+(j+1)h],\ j=0,1.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Доказательство проведем по схеме доказательства теоремы 1.1 [26] с использованием преобразования $\mathbf{K}^1(t,\mu,e^{-ph})$ (3.4), $k=1$.

Отметим во-первых, что в условиях теоремы функции $L_j^m(t)$, $m=0,1$, $j=\overline{0,m}$, $H_j^m(t)$, $m=0,1$, $j=\overline{0,m+1}$, (3.2), (3.3) непрерывны и имеют ограниченные производные на $[t_0-3h,t_1]$. Поэтому из (3.7) и (3.8) следует

$$\begin{aligned}&\overline{K}_0^1(t,\mu)=\begin{pmatrix}O(1)&O(\mu)\\O(1)&E_{n_2}\end{pmatrix}g_0(t),\quad \overline{K}_1^1(t,\mu)=\begin{pmatrix}O(\mu)&O(\mu)\\O(\mu)&0\end{pmatrix}g_1(t),\\&\overline{K}_2^1(t,\mu)=\begin{pmatrix}O(\mu^2)&O(\mu^2)\\0&0\end{pmatrix}g_2(t),\quad \overline{K}_3^1(t,\mu)=\begin{pmatrix}O(\mu^3)&0\\0&0\end{pmatrix}g_3(t),\quad t\in[t_0-3h,t_1],\end{aligned}\tag{4.14}$$

где функции $g_j(t)$, $j=\overline{0,3}$, непрерывны с ограниченными производными на $[t_0-3h,t_1]$.

Рассмотрим ЛНСВСЗ в виде (2.3)–(2.4). Согласно лемме 2.1 от исследования решений системы $(\mathbf{A}_\mu,B_\mu)$ можно перейти к анализу решений системы $(\mathbf{A}_{\mu 1},\mathbf{B}_{\mu 1})$, к которой, согласно вложениям (2.5), (2.6), как к системе из класса $(\mathcal{O}_{\mu 1},\mathcal{V}_{\mu 1})\subset(\mathcal{O}_{\mu\infty},\mathcal{V}_{\mu\infty})$, применимо преобразование $\mathbf{K}^1(t,\mu,e^{-ph})$. Выполним в (2.3)–(2.4) нелокальное (по времени) преобразование переменных состояния системы, которое индуцирует определенное на пространстве $PC\left((-\infty,t];\mathbb{R}^{n_1+n_2}\right)$ преобразование $\mathbf{K}^1(t,\mu,e^{-ph})$ (3.4):

$$z(t)=\mathbf{K}^1(t,\mu,e^{-ph})\zeta(t),\quad t\in(-\infty,t_1],\quad z(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix},\quad \zeta(t)=\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix}.\tag{4.15}$$

Заметим, что замена переменных (4.15) обратима и

$$\zeta(t)=(\mathbf{K}^1)^{-1}(t,\mu,e^{-ph})z(t),\quad t\in(-\infty,t_1].\tag{4.16}$$

Из (4.16) с учетом (3.7), используя (2.4) и полагая $\chi(\theta)\equiv 0$, $\theta<t_0-h$, получаем:

$$\zeta(t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\overline{K}_j^1(t,\mu)z(t-jh)+\overline{K}_{i+1}^1(t,\mu)\chi(t-(i+1)h),\\t\in[t_0+ih,t_0+(i+1)h),\quad i=0,1,2,\\\displaystyle\sum_{j=0}^{3}\overline{K}_j^1(t,\mu)z(t-jh),\quad t\geqslant t_0+3h.\end{cases}\tag{4.17}$$

При выполнении условий теоремы правые части (4.17) дифференцируемы. Получим уравнения динамики ЛНСВСЗ (2.3) в новых переменных $\xi(t)$, $\eta(t)$. Для этого продифференцируем равенства (4.17) с учетом (2.1). Используя производные в силу системы (2.3), представление оператора преобразования в виде (3.6) и выполняя преобразования с учетом определяющих и алгебраических свойств оператора запаздывания и $u(t) \equiv 0$, $t < t_0$, получим:

$$M\dot{\zeta}(t) = \sum_{j=0}^{4} \mathcal{A}_{xyj}(t,\mu) z(t-jh) + \sum_{j=0}^{3} \mathcal{B}_{xyj}(t,\mu) u(t-jh) + F_{xy}(t,\mu), \quad t \in T, \tag{4.18}$$

где

$$\mathcal{A}_{xyj}(t,\mu) = \begin{cases} 0, & t < t_0 + jh \vee j < 0, \vee j > 4, \\ M \begin{pmatrix} \overline{K}^1_{j-1}(t,\mu) A_1(t-(j-1)h) + \\ + \overline{K}^1_j(t,\mu) M^{-1} A_0(t-jh) + \dot{\overline{K}}^1_j(t,\mu) \end{pmatrix}, & t \geqslant t_0 + jh, \quad j \geqslant 0, \end{cases} \tag{4.19}$$

$$\mathcal{B}_{xyj}(t,\mu) = M\overline{K}^1_j(t,\mu) M^{-1} B(t-jh), \quad t \in T, \tag{4.20}$$

$$F_{xy}(t,\mu) = M\left(\overline{K}^1_i(t,\mu) A_1(t-ih)\chi(t-(i+1)h) + \frac{d}{dt}\left(\overline{K}^1_{i+1}(t,\mu)\chi(t-(i+1)h)\right)\right),$$

$$t \in [t_0 + ih, t_0 + (i+1)h), \quad i = 0,1,2,3, \tag{4.21}$$

$$K^1_j(t,\mu) \stackrel{\Delta}{\equiv} 0, \quad j \geqslant 4 \vee j < 0. \tag{4.22}$$

Теперь в (4.18) выполним замену переменных (4.15). Используя (3.6), выполняя преобразования полученных выражений с учетом (4.19) и (4.22), получаем уравнения динамики ЛНСВСЗ в новых переменных состояния:

$$M\dot{\zeta}(t) = \sum_{j=0}^{7} \mathcal{A}_{\xi\eta j}(t,\mu)\zeta(t-ih) + \sum_{j=0}^{3} \mathcal{B}_{xyj}(t,\mu) u(t-jh) + F_{xy}(t,\mu), \quad t \in T, \tag{4.23}$$

$$\mathcal{A}_{\xi\eta j}(t,\mu) = \sum_{k=j-3}^{4} \mathcal{A}_{xyk}(t,\mu) K^1_{j-k}(t-kh), \quad t \in T. \tag{4.24}$$

В условиях теоремы выполнены условия леммы [26] и с учетом (4.16) функция $\zeta(t)$, $t \in (-\infty, t_1]$, ограничена. Поэтому из (4.23) с учетом (4.14) имеем:

$$M\dot{\zeta}(t) = \sum_{j=0}^{2} \left[\mathcal{A}_{\xi\eta j}(t,\mu)\zeta(t-jh) + \mathcal{B}_{xyj}(t,\mu) u(t-jh)\right] + F_{xy}(t,\mu) + O(\mu^2), \quad t \in T. \tag{4.25}$$

Из (4.19) и (4.24) для $j = 0,1,2$ имеем представление

$$\mathcal{A}_{\xi\eta j}(t,\mu) = \begin{cases} 0, & t < t_0 + jh \vee j < 0 \vee j > 7, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{i,j\}} M \begin{pmatrix} \overline{K}^1_{k-1}(t,\mu) A_1(t-(k-1)h) + \\ + \overline{K}^1_k(t,\mu) M^{-1} A_0(t-kh) + \dot{\overline{K}}^1_k(t,\mu) \end{pmatrix} K^1_{j-k}(t,\mu), \\ t \in [t_0 + ih, t_0 + (i+1)h). \end{cases} \tag{4.26}$$

Подставляя (3.6), (3.7) в (4.26) и выполняя преобразования полученных выражений с учетом (4.2), (4.6) и вида M получаем представление

$$\mathcal{A}_{\xi\eta j}(t,\mu)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=0}^{1}\mu^m A^m_{\xi j}(t)+O(\mu^2) & O\left(\mu^2\right)\\ O(\mu^2) & \sum\limits_{m=j}^{1}\mu^m A^m_{\eta j}(t)+O(\mu^2)\end{pmatrix},\quad t\geqslant t_0+jh.$$

Аналогично, подставляя (3.6), (3.7) в (4.20) с учетом (4.3), (4.7) получаем представление

$$\mathcal{B}_{xyj}(t,\mu)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=0}^{1}\mu^m B^m_{\xi j}(t)+O(\mu^2)\\ \sum\limits_{m=j}^{1}\mu^m B^m_{\eta j}(t)+O(\mu^2)\end{pmatrix},\quad t\geqslant t_0+jh.$$

Отметим, что из (3.7) и (4.21) следует $F_{xy}(t,\mu)=O(\mu^j)$, $t\in[t_0+jh,t_0+(j+1)h)$, $j=2,3$. Окончательно из (4.25) с учетом (4.1)–(4.5), (4.13) получаем уравнения динамики ЛНСВСЗ (1.1) в новых переменных состояния:

$$\dot{\xi}(t)=\sum_{j=0}^{2}(A_{\xi j}(t,\mu)+O(\mu^2))\xi(t-jh)+\sum_{j=0}^{2}(B_{\xi j}(t,\mu)+O(\mu^2))u(t-jh)+ \tag{4.27}$$
$$+F_\xi(t,\mu)+O(\mu^2),$$
$$\mu\dot{\eta}(t)=\sum_{j=0}^{1}\sum_{m=j}^{1}\mu^m(A^m_{\eta j}(t,\mu)+O(\mu^2))\eta(t-jh)+ \tag{4.28}$$
$$+\sum_{j=0}^{1}\sum_{m=j}^{1}\mu^m(B^m_{\eta j}(t,\mu)+O(\mu^2))u(t-jh)+F_\eta(t,\mu)+O(\mu^2),\quad t\in T.$$

Начальные условия для (4.27), (4.28) определим в соответствии с заменой (4.16). С учетом (4.12), (4.14) они имеют вид:

$$\xi(\theta)=\xi^1(\theta)+O\left(\mu^2\right),\ \ \eta(\theta)=\eta^1(\theta)+O\left(\mu^2\right),\ \ \theta\leqslant t_0. \tag{4.29}$$

Перепишем подсистему (4.28) в быстрой («растянутой») шкале времени. Для этого выполним замену независимой переменной $\tau=\frac{t-t_0}{\mu}$. Получаем с учетом $\mu\frac{d}{dt}=\frac{d}{d\tau}$ представление быстрой подсистемы (4.28) в «растянутой» шкале времени:

$$\frac{d}{d\tau}\eta(t_0+\mu\tau)=\sum_{j=0}^{1}\sum_{m=0}^{1}\mu^m A^m_{\eta j}(t_0+\mu\tau)\eta(t_0+\mu\tau)+$$
$$+\sum_{j=0}^{1}\sum_{m=j}^{1}\mu^m B^m_{\eta j}(t_0+\mu\tau)u(t_0+\mu\tau)+F_\eta(t_0+\mu\tau,\mu)+O(\mu^2),\quad \tau\in T_\mu. \tag{4.30}$$

В условиях теоремы из (4.6), (4.7) следует дифференцируемость для $t\geqslant t_0+jh$, $j=0,1$, матричных функций $A^m_{\eta j}(t)$, $B^m_{\eta j}(t)$. Используем линейную аппроксимацию функций

$$A^m_{\eta j}\left(\mu(\tau-j\widetilde{h})+t_0+jh\right),\qquad B^m_{\eta j}\left(\mu(\tau-j\widetilde{h})+t_0+jh\right)$$

в окрестности точки $\mu = 0$:

$$A^m_{\eta j}\left(\mu(\tau - j\widetilde{h}) + t_0 + jh\right) = \sum_{r=0}^{1} \mu^r \frac{(\tau - j\widetilde{h})^r}{r!} A^{m(r)}_{\eta j}(t_0 + jh) + O\left(\mu^2\right),$$
$$B^m_{\eta j}\left(\mu(\tau - j\widetilde{h}) + t_0 + jh\right) = \sum_{r=0}^{1} \mu^r \frac{(\tau - j\widetilde{h})^r}{r!} B^{m(r)}_{\eta j}(t_0 + jh) + O\left(\mu^2\right). \tag{4.31}$$

Введем новые функции: $\widetilde{\eta}(\tau) = \eta\left(\mu\tau + t_0\right)$, $\widetilde{u}(\tau) = u\left(\mu\tau + t_0\right)$, $\tau \in [-\widetilde{h}, 0] \cup T_\mu$ и подставим аппроксимации (4.31) в (4.30). После несложных алгебраических преобразований с учетом обозначений (4.4), (4.5), (4.1) получим

$$\frac{d\widetilde{\eta}(\tau)}{d\tau} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}_\eta(\tau, \mu, e^{-p\widetilde{h}}) + O\left(\mu^2\right)\right)\widetilde{\eta}(\tau) + \tag{4.32}$$
$$+ \left(\widetilde{\mathbf{B}}_\eta(\tau, \mu, e^{-p\widetilde{h}}) + O\left(\mu^2\right)\right)\widetilde{u}(\tau) + F_\eta(t_0 + \mu\tau, \mu) + O(\mu^2), \quad \tau \in T_\mu.$$

Начальные условия для $\widetilde{\eta}(\tau)$ определяются согласно (4.12), (4.29) как

$$\widetilde{\eta}(\theta) = \eta(t_0 + \mu\widetilde{\theta}), \quad \widetilde{\theta} \in [-\widetilde{h}, 0]. \tag{4.33}$$

В отличие от *сингулярно* возмущенной системы (1.1), (1.2) полученная в результате преобразования зависимых и независимой переменных исходной ЛНСВСЗ алгебраически эквивалентная ей система (4.27), (4.32) является *регулярно* возмущенной. Опуская в (4.27), (4.32), (4.29) члены порядка $O(\mu^2)$, приходим к системе 1-го порядка аппроксимации, которая совпадает с (4.8), (4.9), (4.12).

Сравнивая начальные задачи (4.8), (4.9), (4.12) и (4.27), (4.32), (4.29), (4.33) и учитывая непрерывную зависимость решений задачи (4.8), (4.9), (4.12) от начальных условий и параметров (предложение 4.1), убеждаемся в справедливости асимптотической аппроксимации

$$\xi^1(t) = \xi(t) + O\left(\mu^2\right), \quad \eta^1(\tau) = \widetilde{\eta}(\tau) + O\left(\mu^2\right), \quad t \in T. \tag{4.34}$$

Применяя теперь преобразование (4.15) к решению (4.34) преобразованной системы (4.27), (4.29), получаем равенство (4.11), что завершает доказательство теоремы 4.1. □

В частном случае, если (1.1) является стационарной системой без запаздывания, система (4.8), (4.9) совпадает с «уточненными» медленными и быстрыми моделями из [35, с. 73], и утверждение теоремы 4.1 совпадает с утверждением [35, с. 73, теорема 5.2].

Замечание 4.1. Используя вложение системы $(\mathbf{A}_\mu, B_\mu)$ в класс $(\mathcal{O}_{\mu k}, \mathcal{V}_{\mu k}) \subset (\mathcal{O}_{\mu\infty}, \mathcal{V}_{\mu\infty})$ и преобразование $\mathbf{K}^k(t, \mu, e^{-ph})$, $k = 2, 3, \ldots$, аналогично теореме 4.1 можно получить аппроксимации любого порядка решения ЛНСВСЗ.

Пример 4.1. Пусть ЛНСВСЗ (1.1), (1.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = -t\,x(t) + x(t-h) + y(t-h), \quad x \in \mathbb{R}, \\ &\mu\dot{y}(t) = -x(t) - y(t) + u(t),\ y \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 5h], \\ &\varphi(\theta) = -1, \quad \psi(\theta) = 2, \quad \theta \in [-h, 0]. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Для (4.35) выполнены условия теорем 1.1, 4.1 и ее ВС (1.3) и ПС (1.4) имеют вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_s(t) = -t\,x_s(t) + 1,\ t \in [0, h), \quad x_s(0) = -1, \\ &\dot{x}_s(t) = -t\,x_s(t) + u_s(t-h), \quad t \geqslant h, \\ &\frac{d}{d\tau}y_f(\tau) = -y_f(\tau) + u_f(\tau), \quad u_f(\tau) = u(\mu\tau), \quad \tau \in \left[0, \frac{5h}{\mu}\right], \quad y_f(0) = 1. \end{aligned}$$

Заметим, что ВС и ПС для ЛНСВСЗ (4.35) являются системами без запаздывания в состоянии.

Связь решений ВС и ПС с аппроксимацией 0-го порядка решения ЛНСВСЗ:

$$x^0(t) = \xi^0(t), \quad \xi^0(t) = x_s(t), \quad y^0(t) = \eta^0\left(\frac{t}{\mu}\right) - \xi^0(t), \quad \eta^0(\tau) = y_f(\tau).$$

Сравнение точного решения с аппроксимацией 0-го порядка решения при $h = 2$, $u(t) = \sin t$, $t \in T$, для $\mu = 0.1$ показано на рис. 1.

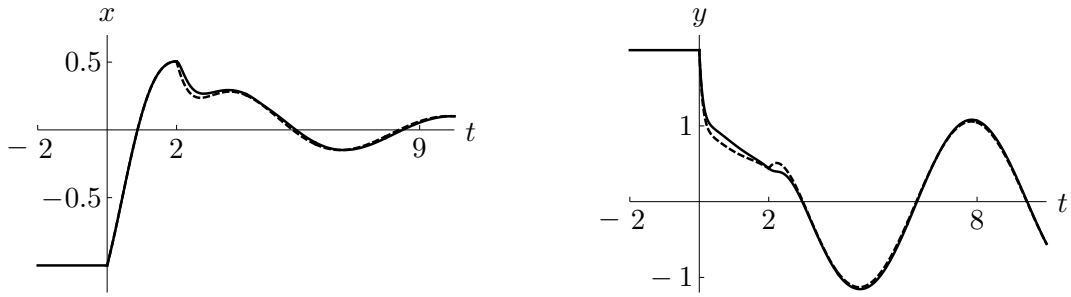

Рис. 1. x-компонента (слева) и y-компонента (справа) точного решения (сплошная линия) и их асимптотическая аппроксимация 0-го порядка (пунктир) для примера 4.1 при $\mu = 0.1$, $u(t) = \sin\, t,\ t \in T$

Система (4.8), (4.12) для (4.35) имеет вид:

$$\dot\xi^1(t) = -t\,\xi^1(t) + (1+\mu t), \quad t \in [0,h), \quad \xi^1(0) = -1+\mu,$$
$$\dot\xi^1(t) = -t\,\xi^1(t) - \mu(t-h)\xi^1(t-h) + (1+\mu t)u(t-h), \quad t \in [h,2h),$$
$$\dot\xi^1(t) = -t\,\xi^1(t) - \mu(t-h)\xi^1(t-h) + (1+\mu t)u(t-h) + \mu\,u(t-2h), \quad t \in [2h,5h],$$
$$\frac{d}{d\tau}\eta^1(\tau) = -\eta^1(\tau) + \mu\eta^1(\tau-\widetilde h) + \widetilde u(\tau), \quad \tau \in [0,5\widetilde h], \quad \eta^1(\widetilde\theta) = 1-\widetilde\theta, \quad \widetilde\theta \in [-\widetilde h, 0].$$

Связь решения этой системы с аппроксимацией 1-го порядка решения ЛНСВСЗ (4.35):

$$x^1(t) = \xi^1(t) - \mu\,\eta^1\left(\frac{t-h}{\mu}\right),$$
$$y^1(t) = \eta^1\left(\frac{t}{\mu}\right) + \mu\,\eta^1\left(\frac{t-h}{\mu}\right) - (1+\mu\,t)\xi^1(t), \quad t \in T.$$

Для сравнения качества аппроксимации решения при различных значениях малого параметра, рассчитаем интегральную норму ошибок ($\varepsilon_x = x(\cdot) - x^k(\cdot)$, $\varepsilon_y = y(\cdot) - y^k(\cdot)$) аппроксимаций 0-го и 1-го порядков решения на интервале $[0, 10]$ (табл. 1).

Таблица 1. Интегральная норма ошибок аппроксимаций решения (4.35)

	Аппроксимация 0-го порядка			Аппроксимация 1-го порядка		
	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.01$	$\mu = 0.005$	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.01$	$\mu = 0.005$
$\|\|\varepsilon_x\|\|_1$	0.057277	0.011558	0.005786	0.033359	0.001328	0.000332
$\|\|\varepsilon_y\|\|_1$	0.177552	0.035649	0.017832	0.113763	0.004421	0.001101

Сравнение ошибок из табл. 1 подтверждает, что аппроксимация 1-го порядка дает лучший результат и с уменьшением значения μ ошибка аппроксимации уменьшается.

§ 5. Заключение

Для ЛНСВСЗ обоснован метод построения асимптотических аппроксимаций решения задачи Коши, основанный на представлении ЛНСВСЗ в кольце полиномов от оператора запаздывания, погружении ее в семейство систем в кольце степенных рядов в расширенном пространстве состояний с использованием асимптотических, алгебраических методов и операторов преобразований.

Построение аппроксимаций решения ЛНСВСЗ сводится к решению независимых подзадач для систем меньшей размерности, часть из которых является стационарными (1.4) или имеет кусочно-полиномиальные коэффициенты (4.9). Декомпозированные подсистемы можно решать параллельно, использовать для их решения разные по масштабам времени шкалы и различные методы.

Функции $x^k(t)$, $y^k(t)$, $k = 0, 1$, (1.5), (4.11), выраженные через решения более простых, чем исходная ЛНСВСЗ, подсистем (1.3), (1.4) и (4.8), (4.9), являются равномерными (по t) асимптотическими (по μ) аппроксимациями k-го порядка решения ЛНСВСЗ (1.1), (1.2). Аналогично можно построить аппроксимации решения ЛНСВСЗ более высоких порядков. Разработанный метод построения асимптотических аппроксимаций решений может быть обобщен на ЛНСВСЗ со многими соизмеримыми запаздываниями [46], с запаздыванием в управлении и другие ЛНСВСЗ.

Реализуемый в работе декомпозиционный подход к построению асимптотических аппроксимаций решения задачи Коши с использованием обратимых операторов преобразований для ЛНСВСЗ расширяет арсенал методов анализа и синтеза сингулярно возмущенных систем с запаздыванием и является альтернативным к методу погранфункций. Исследование связи предлагаемого метода с другими для систем с запаздыванием будет предметом будущих публикаций.

Подход, основанный на использовании обратимых операторов преобразований, является удобным инструментом для исследования структурных свойств и синтеза систем управления [25, 27, 41].

Результаты исследования настоящей работы можно использовать при разработке декомпозиционных методов анализа и синтеза для повышения точности регулирования в системах автоматического управления, при управлении реальными физическими, техническими, биологическими, экономическими системами с разнотемповыми движениями и запаздыванием.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, проект № Ф22-050.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астровский А. И. Наблюдаемость линейных нестационарных систем. Минск: МИУ, 2007.
2. Астровский А. И., Гайшун И. В. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск: Беларуская навука, 2013.
3. Астровский А. И., Гайшун И. В. Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1998. Вып. 7. С. 3–13. https://www.mathnet.ru/rus/at2758
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. Т. 1. С. 93–154.
5. Буяльский В. И. Моделирование системы автоматического регулирования с постоянным запаздыванием, с учетом изменения нагрузки // Вісник СевНТУ: зб. наук. пр. Сер. Автоматизація процесів та управління. Севастополь, 2012. Вып. 125. С. 42–48.

6. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
7. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ». 1982. Т. 20. С. 3–77. https://www.mathnet.ru/rus/intm60
8. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Методы функционального анализа. Минск: Изд-во БГУ, 1973.
9. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 1999.
10. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. Вып. 1. С. 3–51. https://www.mathnet.ru/rus/at1125
11. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
12. Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздыванием. Минск: Изд-во ИМ АН БССР, 1978.
13. Крокко Л., Чжен Синь-И. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. М.: ИЛ, 1958.
14. Курина Г. А., Калашникова М. А. Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // Автоматика и телемеханика. 2022. Вып. 11. С. 3–61. https://doi.org/10.31857/S0005231022110010
15. Левашова Н. Т., Михеев Н. А. Задача Коши для сингулярно возмущенного уравнения с запаздывающим аргументом // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2023. № 5. 2350103. https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.78.2350103
16. Марченко В. М. Преобразование систем с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 10. С. 1882–1884. https://www.mathnet.ru/rus/de3213
17. Марченко В. М., Луазо Ж.-Ж. Реализация динамических систем в шкалах систем с последействием. I. Реализуемость // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 11. С. 1515–1523. https://www.mathnet.ru/rus/de11592
18. Ни М. К., Нефедов Н. Н., Левашова Н. Т. Асимптотика решения сингулярно возмущённого дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 303–316. https://doi.org/10.1134/S0374064120030024
19. Стрыгин В. В., Фридман Э. М. Асимптотика интегральных многообразий сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Mathematische Nachrichten. 1984. Т. 117. № 1. С. 83-109. https://doi.org/10.1002/mana.3211170106
20. Стрыгин В. В., Соболев В. А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. https://elibrary.ru/item.asp?id=30130147
21. Хартовский В. Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно: ГрГУ, 2022. https://elibrary.ru/item.asp?id=73241144
22. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
23. Цехан О. Б. Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2017. Т. 7. № 1. С. 50–61. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28092639
24. Цехан О. Б. Декомпозиция сингулярно возмущенной функционально-дифференциальной системы на основе невырожденного преобразования // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 190. С. 130–143. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-190-130-143
25. Цехан О. Б. Квазидифференцируемость и равномерная наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущённых систем // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 8. С. 1123–1138. https://doi.org/10.31857/S0374064123080113

26. Цехан О. Б. Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2024. Т. 14. № 1. С. 37–47. https://elibrary.ru/item.asp?id=60785127
27. Цехан О. Б. Композитный наблюдатель линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с квазидифференцируемыми коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 2024. Вып. 4. С. 31–54. https://doi.org/10.31857/S0005231024040029
28. Цехан О. Б. Расщепляющее преобразование линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием в уравнении медленной переменной // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2024. Т. 236. С. 49–71. https://www.mathnet.ru/rus/into1318
29. Califano C., Moog C. H. Canonical forms of time-delay systems // 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Maui, HI: IEEE, 2012. P. 3862–3867. https://doi.org/10.1109/cdc.2012.6426805
30. Chang K. W. Singular perturbations of a general boundary value problem // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1972. Vol. 3. Issue 3. P. 520–526. https://doi.org/10.1137/0503050
31. Erfani A., Rezaei S., Pourseifi M., Derili H. Optimal control in teleoperation systems with time delay: A singular perturbation approach // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 338. P. 168–184. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.01.026
32. Fridman E. Decoupling transformation of singularly perturbed systems with small delays and its applications // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1996. Vol. 76. Suppl. 2. P. 201–204. https://zbmath.org/0886.34063
33. Fridman E. Introduction to time-delay systems: Analysis and control. Cham: Birkhäuser, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09393-2
34. Glizer V. Y. Controllability of singularly perturbed linear time delay systems. Cham: Birkhäuser, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-030-65951-6
35. Kokotović P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. Singular perturbation methods in control: Analysis and design. SIAM, 1999. https://doi.org/10.1137/1.9781611971118
36. Kopeikina T. B. Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems // Systems Science. 1995. Vol. 21. No. 1. P. 17–36.
37. Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu D. S. Discrete singularly perturbed control problems (A survey) // Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems. Series B. Applications and Algorithms. 2017. Vol. 24. No. 5. P. 335–370.
38. Lehman B., Widjaya I., Shujaee K. Vibrational control of chemical reactions in a CSTR with delayed recycle stream // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1995. Vol. 193. Issue 1. P. 28–59. https://doi.org/10.1006/jmaa.1995.1222
39. Naidu D. S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B. Applications and Algorithms. 2002. Vol. 9. No. 2. P. 233–278.
40. Naligama C. A., Tsekhan O. B. Decoupling of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay based on a nondegenerate transformation // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2021. Т. 11. № 3. С. 27–36. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47146832
41. Pawluszewicz E., Tsekhan O. Stability and stabilisability of the singularly perturbed system with delay on time scales: A decomposition approach // International Journal of Control. 2022. Vol. 95. Issue 9. P. 2406–2419. https://doi.org/10.1080/00207179.2021.1913289
42. Pekař L., Gao Qingbin. Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: A literature overview of some recent results // IEEE Access. 2018. Vol. 6. P. 35457–35491. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2851453

43. Prljaca N., Gajic Z. General transformation for block diagonalization of multitime-scale singularly perturbed linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2008. Vol. 53. Issue 5. P. 1303–1305. https://doi.org/10.1109/TAC.2008.921029
44. Strygin V. V., Sharuda D. V. Asymptotic expansion of a solution of stiff systems of delay differential equations // IFAC Proceedings Volumes. 2000. Vol. 33. Issue 23. P. 287–289. https://doi.org/10.1016/s1474-6670(17)36958-6
45. Strygin V. V. Boundary function method for nonlinear singularly perturbed time delay systems // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2000. Вып. 1. С. 154–163. http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2000/01/strygin.pdf
46. Tsekhan O. Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation // Axioms. 2019. Vol. 8. Issue 2. 71. https://doi.org/10.3390/axioms8020071
47. Tsekhan O. Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay // Dynamic Control and Optimization. DCO 2021, Aveiro, Portugal, February 3–5, Selected, Revised Contributions. Cham: Springer, 2023. P. 77–97. https://doi.org/10.1007/978-3-031-17558-9_4
48. Wang Kuiyang, He Ren, Li Heng, Tang Jinhua, Liu Ruochen, Li Yangmin, He Ping. Observer-based control for active suspension system with time-varying delay and uncertainty // Advances in Mechanical Engineering. 2019. Vol. 11. Issue 11. https://doi.org/10.1177/1687814019889505

Поступила в редакцию 28.08.2024
Принята к публикации 09.12.2025

Цехан Ольга Борисовна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического и информационного обеспечения экономических систем, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, 230023, Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7636-4589
E-mail: tsekhan@grsu.by

Цитирование: О. Б. Цехан. Асимптотические аппроксимации решений одного класса линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 4. С. 578–600.

MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 4. Pp. 578–600.

O. B. Tsekhan

Asymptotic approximations of a solution of one class of linear time-varying singularly perturbed systems with constant delay

Keywords: singularly perturbed system, time-varying system, delay, asymptotic approximation, solution.

MSC2020: 34K26, 34K17, 41A60

DOI: 10.35634/vm250405

For a linear time-varying singularly perturbed control system with constant state delay in the equation for slow variables (LTVSPSD), a method for constructing asymptotic approximations of solutions has been developed based on the representation of the right-hand side operator of the system in a ring of polynomials in the delay operator, embedding the LTVSPSD into a family of systems in the extended state space, and applying non-degenerate transformations. Asymptotic approximations of zero and first orders of the solution of the Cauchy problem for the LTVSPSD are constructed.

Funding. The study was supported by BRFFR No. F22-050.

REFERENCES

1. Astrovskii A. I. *Nablyudaemost' lineinykh nestatsionarnykh sistem* (Observability of linear non-stationary systems), Minsk: Minsk Institute of Management, 2007.
2. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. *Lineinye sistemy s kvazidifferentsiruemymi koeffitsientami: upravlyaemost' i nablyudaemost' dvizhenii* (Linear systems with quasi-differentiable coefficients: controllability and observability of actions), Minsk: Belaruskaya navuka, 2013.
3. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. Uniform and approximative observability of nonstationary linear systems, *Automation and Remote Control*, 1998, vol. 59, no. 7, part 1, pp. 907–915. https://zbmath.org/1079.93506
4. Bogolyubov N. N., Mitropolskii Yu. A. Method of integral manifolds in nonlinear mechanics, *Trudy Mezhdunarodnogo Simpoziuma po Nelineinym Kolebaniyam*, Kiev: Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1963, vol. 1, pp. 93–154 (in Russian).
5. Buyal'skii V. I. Modeling of automatic control system with constant delay, taking into account load change, *Visnik Sevastopol's'kogo Natsional'nogo Tekhnichnogo Universitetu. Ser. Avtomatizatsiya Protsesiv ta Upravlinnya: Zbirnik Naukovikh Prac*, Sevastopol, 2012, issue 125, pp. 42–48 (in Russian).
6. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. *Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii* (Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations), Moscow: Nauka, 1973.
7. Vasil'eva A. B., Dmitriev M. G. Singular perturbations in optimal control problems, *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 34, issue 3, pp. 1579–1629. https://doi.org/10.1007/BF01262406
8. Gabasov R. F., Kirillova F. M. *Optimizatsiya lineinykh sistem: Metody funktsional'nogo analiza* (Optimization of linear systems: methods of functional analysis), Minsk: Belarusian State University, 1973.
9. Gaishun I. V. *Vvedenie v teoriyu lineinykh nestatsionarnykh sistem* (Introduction to the theory of linear non-stationary systems), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 1999.
10. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems, *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, issue 1, pp. 1–43. https://doi.org/10.1134/S0005117906010012
11. Erugin N. P. *Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsial'nykh uravnenii* (A book for reading on the general course of differential equations), Moscow: Nauka, 1970.

12. Kirillova F. M., Marchenko V. M. *Funktsional'nye preobrazovaniya i nekotorye kanonicheskie formy v lineinykh sistemakh s zapazdyvaniem* (Functional transformations and some canonical forms in linear systems with delay), Minsk: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Byelorussian SSR, 1978.
13. Crocco L., Cheng Sin-I. Theory of combustion instability in liquid propellant rocket motors. London: Butterworths Scientific Publications; New York: Interscience Publishers Inc., 1956.
14. Kurina G. A., Kalashnikova M. A. Singularly perturbed problems with multi-tempo fast variables, *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83, issue 11, pp. 1679–1723. https://doi.org/10.1134/S0005117922011001 7
15. Levashova N. T., Mikheev N. A. Cauchy problem for a singularly perturbed delay equation, *Vestnik Moskovskogo Universiteta, Seriya 3: Fizika. Astronomiya*, 2023, no. 5, 2350103 (in Russian). https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.78.2350103
16. Marchenko V. M. Transformations of systems with a retarded argument, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1977, vol. 13, no. 10, pp. 1882–1884 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de3213
17. Marchenko V. M., Loiseau J.-J. Realization of dynamical systems in scales of systems with aftereffect: I. Realizability, *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 11, pp. 1587–1595. https://doi.org/10.1134/S0012266106110085
18. Ni M. K., Nefedov N. N., Levashova N. T. Asymptotics of the solution of a singularly perturbed second-order delay differential equation, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 290–303. https://doi.org/10.1134/S0012266120030027
19. Strygin V. V., Fridman E. M. Asymptotics of integral manifolds of singularly perturbed systems of differential equations with retarded argument, *Mathematische Nachrichten*, 1984, vol. 117, no. 1, pp. 83–109 (in Russian). https://doi.org/10.1002/mana.3211170106
20. Strygin V. V., Sobolev V. A. *Razdelenie dvizhenii metodom integral'nykh mnogoobrazii* (Separation of motions by the method of integral manifolds), Moscow: Nauka, 1988. https://elibrary.ru/item.asp?id=30130147
21. Khartovskii V. E. *Upravlenie lineinymi sistemami neitral'nogo tipa: kachestvennyi analiz i realizatsiya obratnykh svyazei* (Control of linear systems of neutral type: Qualitative analysis and implementation of feedback), Grodno: Grodno State University, 2022. https://elibrary.ru/item.asp?id=73241144
22. Hale J. K. *Theory of functional differential equations*, New York: Springer, 1977. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2
23. Tsekhan O. B. Decoupling transformation for linear stationary singularly perturbed system with delay and its applications to analysis and control of spectrum, *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 50–61 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28092639
24. Tsekhan O. B. Decomposition of singularly perturbed functional-differential systems based on a nondegenerate transformation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2025, vol. 288, no. 1, pp. 128–141. https://doi.org/10.1007/s10958-025-07672-w
25. Tsekhan O. B. Quasidifferentiability and uniform observability of linear time-varying singularly perturbed systems, *Differential Equations*, 2023, vol. 59, no. 8, pp. 1130–1146. https://doi.org/10.1134/S0012266123080116
26. Tsekhan O. B. Asymptotic approximation of the solution of one linear time-varying singularly perturbed system with constant delay, *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*, 2024, vol. 14, no. 1, pp. 37–47 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=60785127
27. Tsekhan O. B. Composite observer of a linear time-varying singularly perturbed system with quasidifferentiable coefficients, *Automation and Remote Control*, 2024, vol. 85, no. 4, pp. 373–390. https://doi.org/10.31857/S0005117924040022
28. Tsekhan O. B. Splitting transformation for a linear nonstationary singularly perturbed system with constant delay in the equation for the slow variable, *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, 2024, vol. 236, pp. 49–71 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/into1318

29. Califano C., Moog C. H. Canonical forms of time-delay systems, *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Maui, HI: IEEE, 2012, pp. 3862–3867. https://doi.org/10.1109/cdc.2012.6426805
30. Chang K. W. Singular perturbations of a general boundary value problem, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1972, vol. 3, issue 3, pp. 520–526. https://doi.org/10.1137/0503050
31. Erfani A., Rezaei S., Pourseifi M., Derili H. Optimal control in teleoperation systems with time delay: A singular perturbation approach, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 338, pp. 168–184. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.01.026
32. Fridman E. Decoupling transformation of singularly perturbed systems with small delays and its applications, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1996, vol. 76, suppl. 2, pp. 201–204. https://zbmath.org/0886.34063
33. Fridman E. *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*, Cham: Birkhäuser, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09393-2
34. Glizer V. Y. *Controllability of singularly perturbed linear time delay systems*, Cham: Birkhäuser, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-030-65951-6
35. Kokotović P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. *Singular perturbation methods in control: Analysis and design*, SIAM, 1999. https://doi.org/10.1137/1.9781611971118
36. Kopeikina T. B. Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems, *Systems Science*, 1995, vol. 21, no. 1, pp. 17–36.
37. Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu D. S. Discrete singularly perturbed control problems (A survey), *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems. Series B. Applications and Algorithms*, 2017, vol. 24, no. 5, pp. 335–370.
38. Lehman B., Widjaya I., Shujaee K. Vibrational control of chemical reactions in a CSTR with delayed recycle stream, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1995, vol. 193, issue 1, pp. 28–59. https://doi.org/10.1006/jmaa.1995.1222
39. Naidu D. S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B. Applications and Algorithms*, 2002, vol. 9, no. 2, pp. 233–278.
40. Naligama C. A., Tsekhan O. B. Decoupling of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay based on a nondegenerate transformation, *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*, 2021, vol. 11, no. 3, pp. 27–36. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47146832
41. Pawluszewicz E., Tsekhan O. Stability and stabilisability of the singularly perturbed system with delay on time scales: A decomposition approach, *International Journal of Control*, 2022, vol. 95, issue 9, pp. 2406–2419. https://doi.org/10.1080/00207179.2021.1913289
42. Pekař L., Gao Qingbin. Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: A literature overview of some recent results, *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 35457–35491. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2851453
43. Prljaca N., Gajic Z. General transformation for block diagonalization of multitime-scale singularly perturbed linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, vol. 53, issue 5, pp. 1303–1305. https://doi.org/10.1109/TAC.2008.921029
44. Strygin V. V., Sharuda D. V. Asymptotic expansion of a solution of stiff systems of delay differential equations, *IFAC Proceedings Volumes*, 2000, vol. 33, issue 23, pp. 287–289. https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)36958-6
45. Strygin V. V. Boundary function method for nonlinear singularly perturbed time delay systems, *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Fizika, Matematika*, 2000, issue 1, pp. 154–163. http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2000/01/strygin.pdf
46. Tsekhan O. Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation, *Axioms*, 2019, vol. 8, issue 2, 71. https://doi.org/10.3390/axioms8020071

47. Tsekhan O. Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay, *Dynamic Control and Optimization. DCO 2021, Aveiro, Portugal, February 3–5, Selected, Revised Contributions*, Cham: Springer, 2023, pp. 77–97. https://doi.org/10.1007/978-3-031-17558-9_4
48. Wang Kuiyang, He Ren, Li Heng, Tang Jinhua, Liu Ruochen, Li Yangmin, He Ping. Observer-based control for active suspension system with time-varying delay and uncertainty, *Advances in Mechanical Engineering*, 2019, vol. 11, issue 11, https://doi.org/10.1177/1687814019889505

Received 28.08.2024
Accepted 09.12.2025

Olga Borisovna Tsekhan, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical and Information Support of Economic Systems, Yanka Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7636-4589
E-mail: tsekhan@grsu.by

Citation: O. B. Tsekhan. Asymptotic approximations of a solution of one class of linear time-varying singularly perturbed systems with constant delay, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 4, pp. 578–600.